TEMA 11º: ESTABILIDAD SEGÚN LIAPUNOV.

1. INTRODUCCIÓN.

Si tenemos una E.D. $y'=F(x,y)$ que representa un fenómeno físico, p.ej., las trayectorias de un satélite artificial, y la solución general es $f(x,x_0,y_0)$, hay dos tipos de incertidumbre acerca de las condiciones iniciales: p. ej., en el satélite artificial hay factores que no se pueden determinar, como las condiciones atmosféricas; en segundo lugar está el error de las medidas.

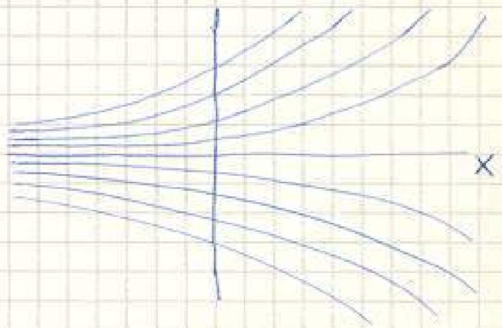
Se trata de saber si pequeñas variaciones de las condiciones iniciales nos producirán pequeñas perturbaciones en la trayectoria, y si ésta tiende a estabilizarse con el tiempo (x representa el tiempo).

El teorema de continuidad de la solución general dice que

$\forall (x,x_0,y_0), \forall \varepsilon>0, \exists \eta(\varepsilon,x,x_0,y_0)>0 / \|(\bar{x},\bar{y})-(x_0,y_0)\|<\eta \Rightarrow \|f(x,\bar{x},\bar{y})-f(x,x_0,y_0)\|<\varepsilon$

Puesto que η depende de x, bien pudiera ocurrir que cuando x se haga suficientemente grande las trayectorias de las soluciones se vayan separando más y más, y esto no lo evita el teorema global de continuidad de la solución general.

Ejemplo: Sea la E.D. $y'=y$



Cuando x crece las soluciones se separan.

Veámoslo analíticamente: La solución que pasa por (x_0,y_0) es

$$y(x)=y_0\, e^{x-x_0}$$

Variando las condiciones iniciales se tiene $(y_0+\Delta y_0)\, e^{x-x_0}$. Luego la variación es $\Delta y_0\, e^{x-x_0}$.

Basta tomar entonces $\eta<\varepsilon\, e^{x_0-x}$.

Cuando $x\to+\infty$, $\eta\to 0$, es decir hay que tomar η tanto más pequeño cuanto más grande sea x. Puede suceder que físicamente η no se pueda tomar tan pequeño, con lo cual estas soluciones serán "inestables".

Diremos que la solución es estable cuando para mantener la diferencia de las soluciones $<\varepsilon$ basta hacer la perturbación de las c.i. $<\eta$, y este η nos sirve para lograr que la diferencia de las soluciones sea $<\varepsilon$ en un intervalo infinito.

2. DEFINICIONES

Solo definiremos la estabilidad para las soluciones constantes. Se demuestra que basta hacerlo para la solución nula que, por ello, se suele llamar el origen.

Sea $I =]\xi, +\infty[$ donde $\xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Sea $\rho > 0$, y consideremos la bola $B_\rho = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y\| < \rho\}$ $(\rho \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$.

Sea $F : I \times B_\rho \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente lipschitziana en $I \times B_\rho$.

Sea el S.D. $y' = F(x, y)$.

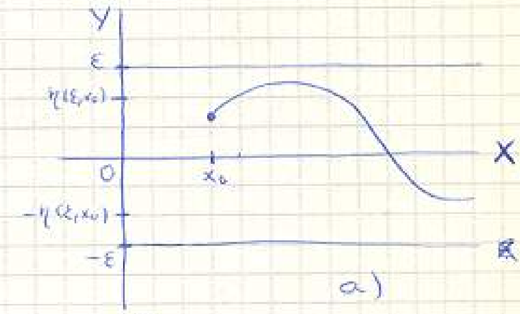
Supondremos que $\forall x \in I$, $F(x, 0) = 0$. Esto significa que la función nula $y(x) = 0$ es solución para el S.D.

DEFINICION: (Estabilidad del origen)

El origen (la solución nula) es estable si se verifica que

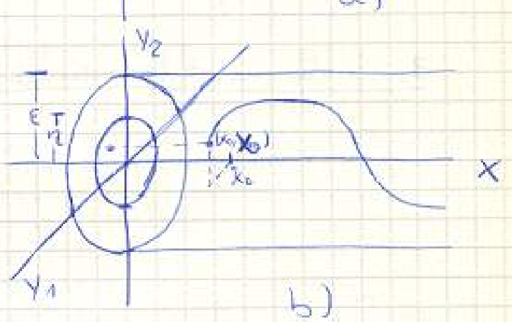
$\forall \varepsilon \ (0 < \varepsilon < \rho), \forall x_0 \in I, \exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0$ / si $\|y_0\| < \eta$ y si $\forall x \geq x_0, x \in J(x_0, y_0)$ se verifica que $\|f(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon$.

donde $J(x_0, y_0)$ es el intervalo donde está definida la solución maximal que pasa por (x_0, y_0).



Interpretación geométrica:

El significado geométrico de la definición anterior es el siguiente: Siempre que partamos de un punto $y_0 \in]-\eta, \eta[$ (caso a)) la solución de la E.D. que pasa por (x_0, y_0) está contenida en la ε-banda centrada en el eje OX.



El caso de un S.D. plano, es decir, de dos ecuaciones (caso b)), siempre que $y_0 \in B_\eta \subset \mathbb{R}^n$, la solución que pasa por (x_0, y_0) está contenida en el cilindro de eje OX y radio ε.

Como vemos η depende del punto x_0.

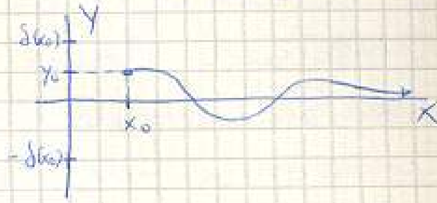
DEFINICION: El origen se dice uniformemente estable si

$$(\forall \varepsilon / 0 < \varepsilon < \rho)\ (\exists \eta(\varepsilon) > 0) / (\forall x_0 \in I), (\forall y_0 / \|y_0\| < \eta), (\forall x \geq x_0 / x \in J(x_0, y_0)) \Rightarrow \|f(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon$$

En este caso podremos encontrar un $\eta > 0$ que depende solo de ε que sirve para todos los $x_0 \in I$.

DEFINICION: El origen se dice atractivo si

$\forall x_0 \in I, \exists \delta(x_0) > 0 \,/\, (\forall y_0 / \|y_0\| < \delta)$ se verifica que $f(x, x_0, y_0)$ está definida para $x \geq x_0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, x_0, y_0) = 0$.



DEFINICION: El origen se dice uniformemente atractivo si

$\exists \delta > 0 / (\forall x_0 \in I)(\forall y_0 / \|y_0\| < \delta)$ se tiene que $f(x, x_0, y_0)$ está definida para $x \geq x_0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, x_0, y_0) = 0$.

DEFINICIONES: a) El origen es asintóticamente estable si es estable y atractivo.

b) El origen es uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y uniformemente atractivo.

2.1. PROPOSICION: El origen es estable si, y solo si

$$\boxed{(\forall \varepsilon / 0<\varepsilon<\rho)(\forall x_0 \in I)(\exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0) / (\forall y_0 / \|y_0\| < \eta) \text{ se tiene que } \forall x \geq x_0 \; f(x, x_0, y_0) \text{ está definida y } \|f(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon}$$

Demostr.: $\Leftarrow$] Trivial, pues si $f(x, x_0, y_0)$ está definida es porque $x \in J(x_0, y_0)$

$\Rightarrow$] Si el origen es estable, dado $x \geq x_0$, $f(x, x_0, y_0)$ está definida porque la solución general se puede prolongar indefinidamente, pues la solución nunca llega a la frontera de $I \times B_\rho$. c.q.d.

3. Sistemas diferenciales autónomos planos. Características.

A) Consideremos un S.D. de la forma

$$\begin{cases} y_1' = F_1(y_1, y_2) \\ y_2' = F_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

donde $F_1, F_2 : I \times B_\rho \to \mathbb{R}^1$ son continuas y localmente lipschitzianas en $I \times B_\rho$ donde $I =]\xi, +\infty[$.

A un S.D. de este tipo, en el que F no depende de x se le llama un S.D. AUTONOMO, y se dice PLANO por ser de dos ecuaciones.

El plano $Y_1 Y_2$ se llama PLANO DE FASES

Una solución de este S.D. será de la forma

$$\begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \end{cases}$$

igualdades que definen en forma paramétrica una curva sobre el plano de fases, y se llamará una CARACTERISTICA.

Nos restringiremos al estudio de estos S.D.

3.1. PROPOSICION: Si $\begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \end{cases}$ es una solución para el S.D. anterior entonces $\forall x_0 \in I$, $\begin{cases} y_1 = y_1(x-x_0) \\ y_2 = y_2(x-x_0) \end{cases}$ es tambien solución del mismo para los x tales que $x - x_0 \in I$.

La demostración es trivial.

Si $\begin{cases} y_1 = y_{01} \\ y_2 = y_{02} \end{cases}$ es una solución constante del S.D., en el plano de fase no le corresponde una característica a esta solución, sino un solo punto: (y_{01}, y_{02}).

3.2. PROPOSICION: Por cada punto de B_p pasa, a lo sumo, una característica, por supuesto, para S.D. autonomos planos.

Demostr.: Notese que si $\begin{cases} y_1 = y_1(x) \\ y_2 = y_2(x) \end{cases}$ es una solución que representa una característica C en el plano de fases entonces $\forall x_0 \in I$, $\begin{cases} y_1 = y_1(x-x_0) \\ y_2 = y_2(x-x_0) \end{cases}$ representa la misma característica.

Supongamos entonces que tenemos dos características C_1 y C_2 representadas por $(y_1(x), y_2(x))$ y $(z_1(x), z_2(x))$, respectivamente, que se cortan en un punto, es decir, supongamos que existen $x_0, x_1 \in I$ tales que $(y_1(x_0), y_2(x_0)) = (z_1(x_1), z_2(x_2)) = (y_{01}, y_{02})$.

Veamos que $C_1 \equiv C_2$.

Consideremos la solución

$$(y_1(x+x_0-x_1), y_2(x+x_0-x_1))$$

Esta solución coincide con $(z_1(x), z_2(x))$ en el punto x_1 y, por tanto, la unicidad de soluciones asegura que

$$(y_1(x+x_0-x_1), y_2(x+x_0-x_1)) = (z_1(x), z_2(x)), \forall x \in I$$

Como $(y_1(x+x_0-x_1), y_2(x+x_0+x_1))$ es una representación paramétrica de C_1 y $(z_1(x), z_2(x))$ lo es de C_2 queda visto que $C_1 \equiv C_2$. c.q.d.

Hay puntos en el plano de fases por los que no pasa ninguna característica y que corresponden a las soluciones constantes. Estos puntos se llaman PUNTOS SINGULARES. Es decir, si $\begin{cases} y_1 = y_{01} \\ y_2 = y_{02} \end{cases}$ es una solución constante del S.D. entonces por el punto (y_{01}, y_{02}) no pasa ninguna característica. A (y_{01}, y_{02}) se le llama punto singular o punto crítico.

B) INTERPRETACION CINEMATICA: Si tenemos un S.D. autonomo plano

$$\begin{cases} y_1' = F_1(y_1, y_2) \\ y_2' = F_2(y_1, y_2) \end{cases} \qquad (1)$$

consideremos el campo vectorial (en este caso, función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$)

$$V(y_1, y_2) = (F_1(y_1, y_2), F_2(y_1, y_2))$$

Las ecuaciones (1) expresan el movimiento de una partícula en el plano de fases Y_1Y_2, con la condición de que en cada punto (y_1, y_2) del mismo la velocidad de la partícula es $V(y_1, y_2)$. Las características representan trayectorias fijas a lo largo de las cuales se mueven las partículas, independientemente del tiempo en que empieza a moverse.

Los puntos singulares son puntos en los que la velocidad es cero (puntos de reposo o de equilibrio). Tiene sentido definir si esos puntos son estables o inestables.

C) 3.3. PROPOSICION: Para un S.D. autonomo plano, si el origen es estable es uniformemente estable.

Demostr.: Por hipótesis

$(\forall \varepsilon / 0 < \varepsilon < \rho)(\forall x_0 \in I)(\exists \eta(\varepsilon, x_0) > 0) / (\forall y_0 / \|y_0\| < \eta)(\forall x \geq x_0)$ $f(x, x_0, y_0)$ está definida y $\|f(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon$.

que en el caso de un S.D. autonomo plano se puede expresar así

$(\forall \varepsilon / 0 < \varepsilon < \rho)(\forall x_0 \in I)(\exists \eta(x_0, \varepsilon) > 0) / (\forall (y_1(x), y_2(x)) / \|(y_1(x_0), y_2(x_0))\| < \eta), (\forall x \geq x_0)$ $(y_1(x), y_2(x))$ está definida e $\|(y_1(x), y_2(x))\| < \varepsilon$.

Sea $x_1 \in I$ fijo. Entonces

$(\forall \varepsilon / 0 < \varepsilon < \rho)(\exists \eta(\varepsilon) > 0) / (\forall (y_1(x), y_2(x)) / \|(y_1(x_1), y_2(x_1))\| < \eta)(\forall x \geq x_1)$ $(y_1(x), y_2(x))$ está definida y $\|(y_1(x), y_2(x))\| < \varepsilon$.

Veamos que este η vale para todo $x_0 \in I$.

Sea $(z_1(x), z_2(x))$ una solución tal que $\|(z_1(x_0), z_2(x_0))\| < \eta$.

Consideremos la solución $(y_1(x), y_2(x)) = (z_1(x + x_0 - x_1), z_2(x + x_0 - x_1))$.

En el punto x_1 se verifica que $\|(y_1(x_1), y_2(x_1))\| < \eta$.

Por hipótesis, $\forall x \geq x_1$, $(z_1(x + x_0 - x_1), z_2(x + x_0 - x_1))$ está definida y $\|(z_1(x + x_0 - x_1), z_2(x + x_0 - x_1))\| < \varepsilon$,

y esto equivale a decir que

$\forall x \geq x_0$, $(z_1(x), z_2(x))$ está definida y $\|(z_1(x), z_2(x))\| < \varepsilon$

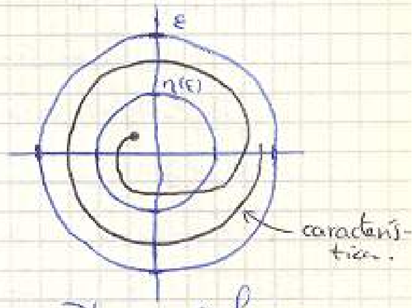
pues si $x \geq x_1 \Rightarrow x + x_0 - x_1 \geq x_1 + x_0 - x_1 = x_0$. csqd.

Por tanto, para S.D. autónomos planos la estabilidad en el origen es equivalente a la estabilidad uniforme y podemos decir que el origen es estable si

$(\forall \varepsilon / 0 < \varepsilon < \rho)(\exists \eta(\varepsilon) > 0) / (\forall (y_1(x), y_2(x)) / \|(y_1(x_0), y_2(x_0))\| < \eta), (\forall x \geq x_0)\ (y_1(x), y_2(x))$
$\forall x_0 \in I$

está definida y $\|(y_1(x), y_2(x))\| < \varepsilon$.

Geométricamente significa que si partimos de un punto $(y_1(x_0), y_2(x_0))$ del círculo de radio $\eta(\varepsilon)$ en el plano de fases, entonces la característica permanece contenida dentro del círculo de radio ε.



Plano de fase

4. FUNCIONES DE SIGNO DEFINIDO Y SEMIDEFINIDO.

Consideremos el intervalo $I =]\tau, +\infty[$ y la bola $B'_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n / \|y\| \leq \sigma\}$.
Sea $V: I \times B'_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $V(x, 0) = 0, \forall x \in I$.

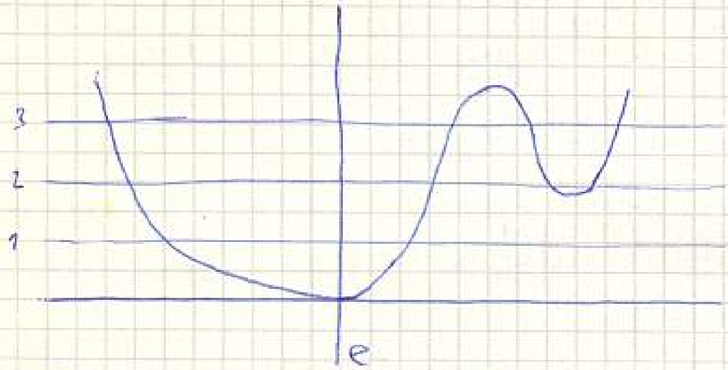
DEFINICION: Se dice que V es semidefinida positiva si
$\forall (x,y) \in I \times B'_\sigma$, $V(x,y) \geq 0$.
Se dice que V es semidefinida negativa si
$\forall (x,y) \in I \times B'_\sigma$, $V(x,y) \leq 0$.
Se dice que V tiene signo semidefinido si es semidefinida positiva o semidefinida negativa.

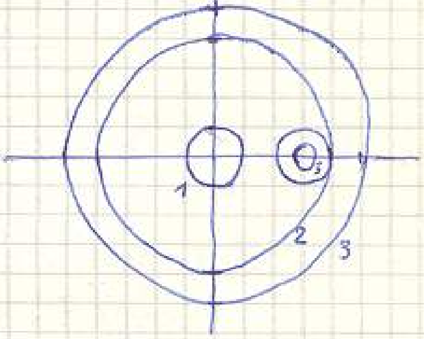
Sea $W: B'_\sigma \to \mathbb{R}$ continua tal que $W(0) = 0$
DEFINICION: Se dice que W es definida positiva si
$\forall y \in B'_\sigma - \{0\}$, $W(y) > 0$
Se dice que es definida negativa si
$\forall y \in B'_\sigma - \{0\}$, $W(y) < 0$
Se dice que es de signo definido si es definida positiva o definida negativa.

DEFINICION: Sea $V: I \times B'_\sigma \to \mathbb{R}$ continua tal que $V(x, 0) = 0, \forall x \in I$.
Se dice que V es definida positiva si existe una función $W: B'_\sigma \to \mathbb{R}$ continua tal que $W(0) = 0$ y definida positiva tal que $\forall (x,y) \in I \times B'_\sigma$, $V(x,y) \geq W(y)$.

Análogamente, V se dice definida negativa si existe $W: B'_\sigma \to \mathbb{R}$ continua tal que $W(0)=0$ y definida negativa tal que
$\forall (x,y) \in I \times B'_\sigma$, $V(x,y) \leq W(y)$.
Se dice que V es de signo definido si es definida positiva o definida negativa.

Ejemplos: 1) La función idénticamente nula es semidefinida positiva y semidefinida negativa.
2) La función $W(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ definida en una bola cerrada $B'_\sigma = B'(0,\sigma) \subset \mathbb{R}^2$ es definida positiva.
3) La función $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = y_1^2 + y_2^2$ definida en $B'_\sigma \subset \mathbb{R}^n$ no es definida positiva, pero sí semidefinida positiva.
4) La función $V(x, y_1, y_2) = e^{-x}(y_1^2 + y_2^2)$ definida en $\mathbb{R} \times B'_\sigma$ no es definida positiva, a pesar de que es estrictamente positiva salvo en el origen.
La geometría de las funciones definidas positivas no es sencilla.





Por ejemplo, si giramos el plano en el que está la curva de la primera figura alrededor del eje e obtenemos la gráfica de una función definida positiva. Las rectas 1, 2 y 3 al girar forman planos que cortan a la superficie y determinan sobre el plano horizontal las curvas de nivel de la segunda figura.

4.1. PROPOSICIÓN: Sea $V: B'_\sigma \to \mathbb{R}$ definida positiva y sea $c_0 = \inf\{V(y) / \|y\| = \sigma\}$.
Entonces, para todo $c \in]0, c_0[$ existe un conjunto Ψ_c entorno abierto y conexo de 0 tal que
$\forall y \in \Psi_c$, $V(y) < c$
y $\forall y \in Fr(\Psi_c)$, $V(y) = c$
Además, si c converge monótonamente a cero, los Ψ_c están encajados y sus diámetros tienden a cero.

Demostr.: Sea $c \in]0, c_0[$. Consideremos un camino

$$y^*: [0,1] \longrightarrow B'_\sigma$$

tal que $y^*(0) = 0$ e $y^*(1) \in Fr\, B'_\sigma$ (frontera de B'_σ).

Consideremos los $y^*(s) \in B'_\sigma$ tales que

$$\forall s' \in [0,s],\ V(y^*(s')) < c.$$

Sea Ψ_c el conjunto de todos los puntos $y^*(s)$ que verifican la condición anterior, donde $y^*(s)$ recorre el conjunto de los caminos sobre B'_σ definidos en $[0,1]$ tales que $y^*(0)=0$ e $y^*(1) \in Fr\, B'_\sigma$.

Veamos que Ψ_c es abierto: Sea $y^*(s) \in \Psi_c$. Entonces $V(y^*(s)) < c$. Como V es continua existe una bola en la cual $V(y) < c$. Veamos que todos los puntos de esa bola están en Ψ_c. Es decir, probaremos que existe, para cada punto de la bola, un camino y^* a lo largo del cual es $V(y^*(s)) < c$. Esto es trivial, pues para $y^*(s)$ existe un camino tal que $\forall s' \in [0,s]$, $V(y^*(s')) < c$, y dado un punto de la bola el segmento que lo une con $y^*(s)$ también verifica que en todos sus puntos la imagen de V es menor que c, segmento que se puede prolongar hasta la frontera de la bola B'_σ.

Ψ_c es, por definición, conexo por arcos y, por tanto, conexo.

Veamos que $\forall y \in Fr\, \Psi_c$, $V(y) = c$.

Supongamos que existe $y \in Fr\, \Psi_c$ tal que $V(y) < c$. Por ser V continua, en una bola de centro y la función V es menor que c, y esto ya es una contradicción, pues en cada bola de centro $y \in Fr\, \Psi_c$ hay puntos del complementario de Ψ_c en los cuales no puede ser V menor que c, por la definición de Ψ_c.

Si $c \to 0$ monótonamente, trivialmente los Ψ_c están encajados.

Veamos que $\lim_{c\to 0} \delta(\Psi_c) = 0$, donde $\delta(\Psi_c)$ es el diámetro de Ψ_c.

Si $\lim_{c\to 0} \delta(\Psi_c) \neq 0$, existiría $\varepsilon > 0$ tal que para todo $c \leq c_0$ existe $y \in B'_\sigma$ tal que $\|y\| \geq \varepsilon$ y $V(y) = c$

Se verificaría entonces que

$$\inf\{V(y) \ /\ \varepsilon \leq \|y\| \leq \sigma\} = 0$$

lo cual contradice que V es continua y estrictamente positiva en el conjunto $\{y / \varepsilon \leq \|y\| \leq \sigma\}$. c.s.q.d.

4.2. PROPOSICION: Sea $V: B'_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $V(0)=0$. Entonces V es definida positiva si y solo si existe una función $a:[0,\sigma] \to \mathbb{R}$ continua estrictamente creciente, nula en el origen y tal que
$$\forall y \in B'_\sigma, \ V(y) \geq a(\|y\|).$$

La demostración de la implicación $\Leftarrow$ es trivial.

Para demostrar la implicación $\Rightarrow$ se define $a^*(r) = \inf\{V(y) / r \leq \|y\| \leq \sigma\}$ y se prueba que a^* es continua, creciente y estrictamente positiva salvo en 0 que vale 0. Se reemplazaría luego a^* por una función continua a tal que $a \geq a^*$ y de forma que a verifique el teorema.

5. FUNCIONES DE LIAPUNOV. Condición suficiente de estabilidad.

Si tenemos una función $V: I \times B_\sigma \to \mathbb{R}$ derivable y una solución f del S.D. cuyo grafo está contenido en $I \times B_\sigma$ se tiene que
$$\frac{d}{dx} V(x, f(x)) = \frac{\partial}{\partial x} V(x, f(x)) + \frac{\partial}{\partial y} V(x, f(x)) \cdot F(x, f(x))$$

A veces se escribe
$$\dot{V}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} V(x,y) + \frac{\partial}{\partial y} V(x,y) F(x,y)$$
que se suele llamar derivada total de V.

DEFINICION: (Función de Liapunov).

Una función $V: I \times B_\rho \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $V(x,0)=0$, $\forall x \in I$, es una función de Liapunov si existe un valor $\sigma < \rho$ tal que en $I \times B'_\sigma$ V es de signo definido y $\dot{V}$ es de signo semidefinido contrario.

B_ρ es la bola de centro 0 y radio ρ y B'_σ es la bola cerrada de centro cero y radio σ.

5.1. LEMA: Sea Γ un dominio de $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Gamma} \subset B_\sigma$ y sea $V: I \times B_\sigma \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Si existe una constante positiva a y se verifica que

i) $\exists (x_0, y_0) \in I \times \Gamma \,/\, V(x_0, y_0) < a$.

ii) Si $(x,y) \in I \times Fr(\Gamma)$, $V(x,y) \geq a$.

iii) $\forall (x,y) \in I \times \Gamma$, $\dot{V}(x,y) \leq 0$

entonces se tiene que $\forall x \geq x_0$, la solución $f(x, x_0, y_0)$ toma sus valores en Γ.

Demostr.: Supongamos que existe $x^{**}>x_0$ tal que $f(x^{**},x_0,y_0)\notin\Gamma$. Siendo f continua existe $x^*>x_0$ tal que $f(x^*,x_0,y_0)\in Fr(\Gamma)$. Entonces, por ii)

$$V(x^*,f(x^*,x_0,y_0))\geq a. \quad (1)$$

Por iii), la función $V(x,f(x,x_0,y_0))-a$ es no creciente, pues su derivada es menor o igual que cero.

Además,

$$V(x_0,f(x_0,x_0,y_0))-a=V(x_0,y_0)-a<0, \text{ por i)}.$$

Siendo $x^*>x_0$ y $V(x,f(x,x_0,y_0))-a$ no creciente, se tendría que $V(x^*,f(x^*,x_0,y_0))-a\leq V(x_0,y_0)-a<0$

es decir $V(x^*,f(x^*,x_0,y_0))<a$ lo cual contradice a (1).

Por tanto, la solución $f(x,x_0,y_0)$ toma sus valores en Γ. c.s.q.d.

5.2. TEOREMA: (Condición suficiente de estabilidad).

> Si existe una función de Liapunov, el origen es estable.

Demostr.: Sea $V: I\times B'_\sigma\to\mathbb{R}$ una función de Liapunov. Supongamos que V es definida positiva. Entonces, por definición de función de Liapunov, $\dot V$ es semidefinida negativa.

Por ser V definida positiva, existe una función $a:[0,\sigma]\to\mathbb{R}$ continua, estrictamente creciente nula en el origen y tal que

$$V(x,y)\geq a(\|y\|), \quad \forall (x,y)\in I\times B'_\sigma.$$

Dado ε tal que $0<\varepsilon<\sigma$ se verifica que

$$V(x,y)\geq a(\varepsilon),\ \forall x\in I,\ \forall y\in B_\varepsilon \cup Fr\, B_\varepsilon.$$

Se verifica, por supuesto, que V es continua y $V(x,0)=0$, $\forall x\in I$.

Entonces

dado $x_0\in I$, $\exists\, \eta(\varepsilon,x_0)>0 / (\forall y_0/\|y_0\|<\eta)$ se tiene que $V(x_0,y_0)<a(\varepsilon)$.

Vamos a aplicar el lema anterior para $\Gamma=B_\varepsilon$ y $a=a(\varepsilon)$.

Se tiene que

si $\|y_0\|<\eta$ entonces $f(x,x_0,y_0)\in B_\varepsilon$ y, por tanto, $\|f(x,x_0,y_0)\|<\varepsilon$, $\forall x$.

con lo cual tenemos

$$\forall\varepsilon, \forall x_0, \exists\,\eta(\varepsilon,x_0)>0 / \underset{\forall y_0}{\|y_0\|<\eta} \Rightarrow \|f(x,x_0,y_0)\|<\varepsilon$$

y, por tanto, el origen es estable. c.s.q.d.

OBSERVACION: Si además se verificase que $\lim_{y\to 0} V(x,y)=0$ uniformemente respecto de $x\in I$, entonces η no dependería de x_0 y el origen sería uniformemente estable.

5.3. LEMA: Sea Γ un dominio de $\mathbb{R}^n$ con $\overline{\Gamma} \subset B_\sigma$. Sea $V: I \times B_\sigma \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}^+$ tales que

1) $\forall (x,y) \in I \times \Gamma$, $V(x,y) \geq a$

2) $\dot{V}(x,y) \leq -b < 0$.

Entonces se verifica que

$\forall (x_0, \eta_0) \in I \times \Gamma$, $\exists x^* > x_0 \,/\, f(x^*, x_0, \eta_0) \in Fr(\Gamma)$.

Demostr.: Si existiese $(x_0, \eta_0) \in I \times \Gamma$ tal que para todo $x^* > x_0$ fuese $f(x^*, x_0, \eta_0) \in \mathring{\Gamma}$ se tendría

$$a \leq V(x, f(x, x_0, \eta_0)) = V(x_0, \eta_0) + \int_{x_0}^{x} \dot{V}(t, f(t, x_0, \eta_0))\, dt \leq V(x_0, \eta_0) - b(x - x_0)$$

para $x \geq x_0$, lo cual no puede ser.

5.4. LEMA: Si se añade a las hipótesis del lema anterior la condición de que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que

$\forall (x,y) \in I \times \Gamma$, $V(x,y) \leq c$

entonces

$\forall (x_0, \eta_0) \in I \times \Gamma$, $\exists T(x_0, \eta_0) > 0$ y $\exists x^* \in]x_0, x_0 + T[$ tal que

$f(x^*, x_0, \eta_0) \in Fr(\Gamma)$.

5.5. TEOREMA: Sea $\sigma < \rho$ y $V: I \times B_\rho \to \mathbb{R}$ una función de Liapunov en $I \times B'_\sigma$. Si se verifica

i) $\lim_{y \to 0} V(x,y) = 0$ uniformemente respecto de $x \in I$.

ii) $\dot{V}(x,y)$ es definida negativa en $I \times B'_\sigma$

entonces se tiene que para cualquier solución $f(x, x_0, \eta_0)$ tal que $\forall x \geq x_0$, $f(x, x_0, \eta_0) \in B_\sigma$ se verifica que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x, x_0, \eta_0) = 0.$$

6. Estudio de las características y singularidades de un S.D. autónomo plano.

A) Estudiaremos el S.D. autónomo plano

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

donde $x' = \dfrac{dx}{dt}$ e $y' = \dfrac{dy}{dt}$, y suponemos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

En vez de estudiar este S.D. se puede estudiar el transformado de éste mediante una afinidad, pues las afinidades conservan la estabilidad y la atractividad en el origen.

Por ello estudiaremos estos S.D. en la forma canónica. Pueden darse los siguientes casos:

Caso 1: Las dos raíces del polinomio característico $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$ son reales y distintas. Sean éstas λ_1 y λ_2. Tenemos dos subcasos:

1.a) λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo.

1.b) λ_1 y λ_2 tienen distinto signo.

Caso 2: El polinomio característico tiene una raíz doble λ.

2.a) $\text{rang} \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$.

2.b) $\text{rang} \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 1$.

Caso 3: λ_1 y λ_2 son complejas conjugadas

3.a) $\text{Re}\,\lambda_1 = \text{Re}\,\lambda_2 = 0$.

3.b) $\text{Re}\,\lambda_1 = \text{Re}\,\lambda_2 \neq 0$.

Si estudiamos estos tres casos tendremos estudiada la estabilidad en el origen para un S.D. autónomo plano. Las propiedades que aquí obtengamos serán también propiedades de los sistemas transformados de éste mediante afinidades.

B) CASO 1:

1.a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Suponemos que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. El punto crítico es el $(0,0)$ solamente. Vamos a estudiar la configuración del plano de fases.

La matriz canónica de Jordan es $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$.

La solucion general del S. D. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ es

$$\begin{cases} x = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Si $C_1 = 0$ tenemos la solución $\begin{cases} x = 0 \\ y = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$

Como $\lambda_2 < 0$, cuando $t \to +\infty$ se verifica que $y \to 0$. Luego la dirección de la característica cuando $t \to +\infty$ es hacia cero. Segun sea C_2 mayor que cero o menor que cero, obtenemos las características dibujadas al margen (fig. 1)

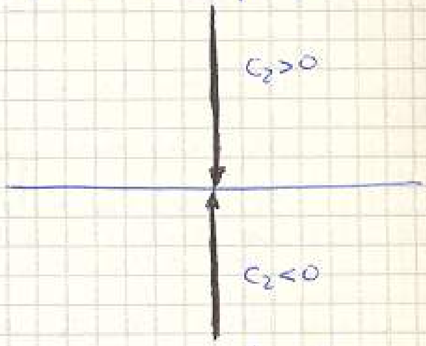


fig. 1.

Si $C_2 = 0$ tenemos la solución $\begin{cases} x = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = 0 \end{cases}$

y análogamente tendríamos (fig. 2)

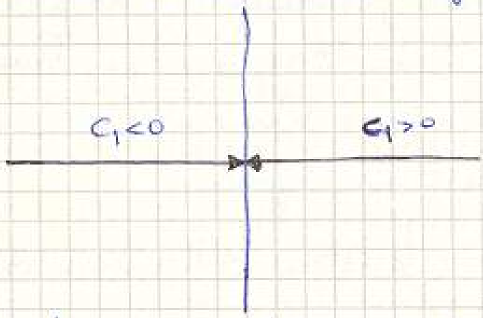


fig. 2.

Las características no rectilineas (que se obtienen para $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$) verifican que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{C_2 e^{\lambda_2 t}}{C_1 e^{\lambda_1 t}} = \frac{C_2}{C_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = \begin{cases} = +\infty & \text{si } C_1 \text{ y } C_2 \text{ tienen el mismo signo} \\ = -\infty & \text{si } \operatorname{sig} C_1 \neq \operatorname{sig} C_2 . \end{cases}$$

Las pendientes en el origen tienden a $\pm\infty$ cuando $t \to \infty$. Además cuando $t \to +\infty$, se verifica que $x(t) \to 0$ e $y(t) \to 0$.
Luego la configuración del plano de fases queda como en la fig. 3. Se dice de O que es un punto NODAL.

Las características curvilineas son tangentes a una de las características rectilineas.

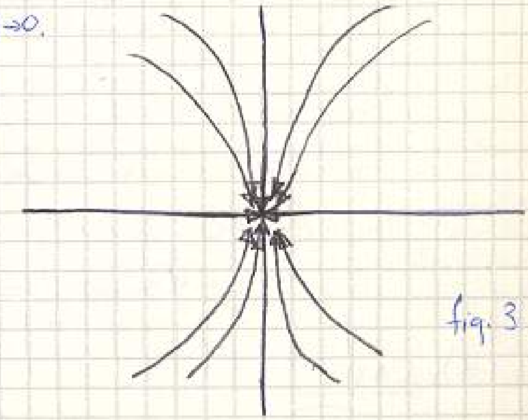


fig. 3

El origen es asintóticamente estable pues $\lim_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$.

(1.b) Si fuese $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, obtendríamos una configuración análoga.

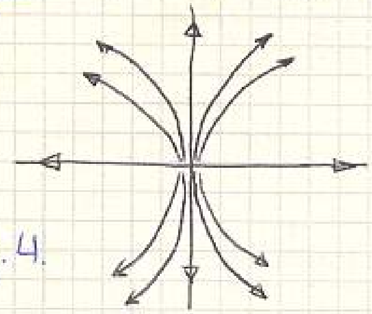


fig. 4.

Solo varía el sentido de las flechas, pues $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \pm\infty$ y $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \pm\infty$.

El origen es en este caso un punto nodal inestable.

(1.c) Supongamos que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. De nuevo los ejes coordenados (o mejor, los semiejes coordenados) son características, pero con la diferencia de que los semiejes del eje de ordenadas tienen el mismo sentido que en 1.a y los semiejes del eje de abscisas tienen el mismo sentido que en 1.b. Para dibujar las demás características dibujaremos las correspondientes al primer cuadrante $(C_1, C_2 > 0)$ y las demás se obtienen por simetrías.

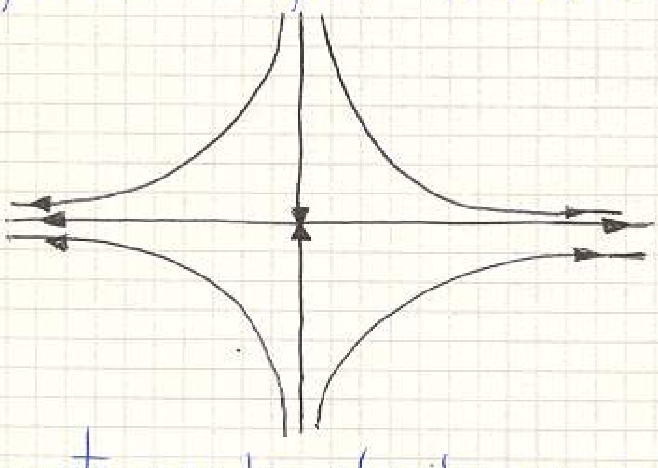
Se verifica que

$$\lim_{t\to+\infty} (x(t), y(t)) = (+\infty, 0)$$

$$\lim_{t\to-\infty} (x(t), y(t)) = (0, +\infty)$$

Por tanto, el origen es inestable

La configuración del plano de fases es la siguiente



Se dice en este caso que el origen es un punto de caballete.

Observar que siendo $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$, no puede ser $\lambda_1 = 0$ ni $\lambda_2 = 0$.

C) CASO 2: Suponemos que el polinomio característico tiene una raíz doble λ.

(2.a) Supongamos que $\operatorname{rang} \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$.

En este caso es $b = c = 0$ y $a = d = \lambda$.

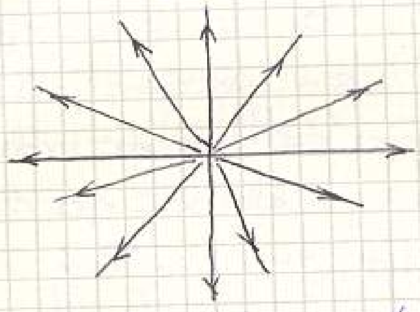
La solución general del S.D. es

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = C_2 e^{\lambda t} \end{cases}$$

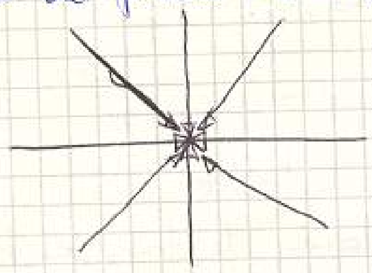
En este caso todas las características son rectilíneas

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{C_2}{C_1}$$

La configuración es, para $\lambda > 0$



El punto nodal es degenerado y es inestable, para $\lambda > 0$.
Si $\lambda < 0$, el punto nodal degenerado es estable y atractivo y la configuración del plano de fases es



(2.b) Supongamos que $\text{rang}\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 1$

Supongamos que $\lambda < 0$. La matriz canónica de Jordan es

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

pues debe ser $\text{rang}(J-\lambda I) = \text{rang}\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}$.

La solución general del S.D.

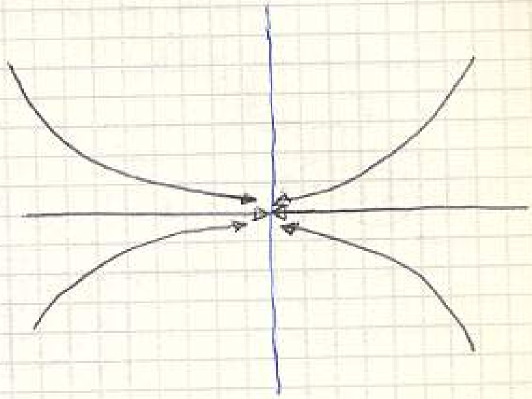
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tJ}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t} \\ C_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Si $C_2 = 0$, entonces $y(t) = 0$ y $x(t) = C_1 e^{\lambda t}$ y obtenemos como características los semiejes del eje de abscisas con sentido hacia el origen pues $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ por ser $\lambda < 0$.

Las demás características verifican que
$$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_2e^{\lambda t}}{C_1e^{\lambda t}+C_2te^{\lambda t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{C_2}{C_1+C_2t}=0$$
es decir, son curvas que en el origen tienen pendiente cero. No pueden cortar al eje de las equis, pues entonces tendríamos dos características pasando por un mismo punto (del eje equis).
Se llama un nudo degenerado, pues solo hay dos características rectilíneas.



Observar que de las característi-cas solo sabemos que tienen pendiente cero en el origen.
No serán, por tanto, necesariamente de la forma de la figura.
Como $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0$ la única solución singular es el $(0,0)$
Los puntos críticos son aquellos por los que no pasa ninguna característica.

D) <u>Caso 3º</u>: Las raíces λ_1 y λ_2 del polinomio característico son complejas conjugadas. Sean $\lambda_1=\alpha+\beta i$, $\lambda_2=\alpha-\beta i$

(3.a) $\operatorname{Re}\lambda_i=0$, $i=1,2$, es decir, $\alpha=0$.
La forma canónica de Jordan de $\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ es
$$J=\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\beta\\ \beta & 0\end{bmatrix}$$
En este caso el S.D. queda
$$\begin{cases} x'(t)=-\beta y(t)\\ y'(t)=\beta x(t)\end{cases}$$
La solución general de este S.D. es
$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=e^{tJ}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta t & -\operatorname{sen}\beta t\\ \operatorname{sen}\beta t & \cos\beta t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_1\cos\beta t-C_2\operatorname{sen}\beta t\\ C_1\operatorname{sen}\beta t+C_2\cos\beta t\end{bmatrix}$$
Puesto que $x(t)^2+y(t)^2=C_1^2+C_2^2$
las soluciones son circunferencias concéntricas

Si hubiésemos considerado el S.D. tal y como estaba hubiésemos obtenido elipses, que son afínmente equivalentes a las circunferencias.
La configuración en este caso se llama centro.

Veamos cual es el sentido de las características. Para ello consideraremos el S.D.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x \end{cases}$$

y veremos como varían y e y'. Supongamos $\beta > 0$.
Entonces si $x > 0$, $y' = \beta x > 0$ e y crece a la derecha de O
Si $x < 0$, $y' = \beta x < 0$ e y decrece a la izquierda de O.
Por tanto, el sentido es contrario a las agujas del reloj.
En el caso general el sentido depende del signo de c.
En este caso el origen es estable pero no atractivo.

3.b $\mathrm{Re}\,\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2$, es decir $\alpha \neq 0$. Supondremos $\beta > 0$.
La solución general del S.D.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{tJ} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Las características en este caso serán espirales. Se trata de ver si el argumento es creciente o decreciente, donde el argumento es

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)}$$

Vamos a calcular la solución general.

$$e^{tJ} = e^{\begin{bmatrix} \alpha t & -\beta t \\ \beta t & \alpha t \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta t & -\operatorname{sen}\beta t \\ \operatorname{sen}\beta t & \cos\beta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\alpha t}\cos\beta t & -e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t - c_2 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ y(t) = c_1 e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t + c_2 e^{\alpha t}\cos\beta t \end{cases}$$

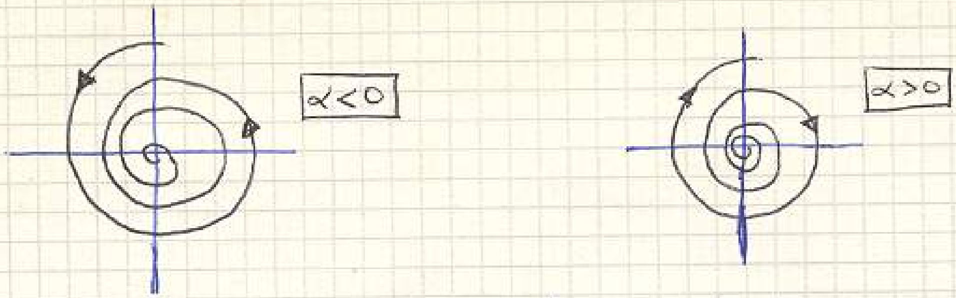
Si suponemos $\alpha < 0$, se verifica que

$$\lim_{t\to\infty} (x(t), y(t)) = (0,0)$$

Se verifica que $\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \dfrac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2} =$

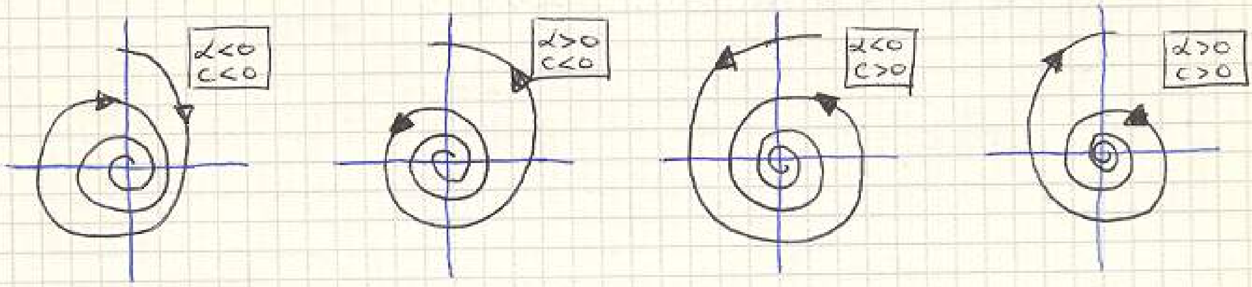
$$= \frac{x(\beta x + \alpha y) - y(\alpha x - \beta y)}{x^2+y^2} = \beta$$

Puesto que $\beta > 0$, φ sería creciente, y las características girán de la forma



Por tanto, si $\alpha<0$ el origen es estable y atractivo y si $\alpha>0$ el origen es inestable y no atractivo. La configuración se llama foco o punto espiral.

En el caso general, las configuraciones son de los siguientes tipos:



E) Los casos anteriores se resumen en lo siguiente:

Sea un S.D. autónomo plano

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax+by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx+dy \end{cases}$$

con $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. Sean λ_1 y λ_2 las raices de $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Entonces:

1) Si λ_1 y λ_2 son reales y del mismo signo tenemos un <u>punto nodal</u> o <u>nudo</u>.

2) Si λ_1 y λ_2 son reales y de signos opuestos tenemos un <u>punto de caballete o silla</u>

3) Si λ_1 y λ_2 son imaginarios puros tenemos lo que se llama un <u>centro</u>.

4) Si λ_1 y λ_2 son complejos con $\operatorname{Re}\lambda_1 = \operatorname{Re}\lambda_2 \neq 0$ tenemos un <u>foco</u> o <u>punto espiral</u>.

F) En cuanto a la estabilidad del punto crítico $(0,0)$ podemos enunciar la siguiente proposición:

6.1. PROPOSICION: Una condición necesaria y suficiente para que el punto $(0,0)$ sea estable es que λ_1 y λ_2 tengan sus partes reales negativas o nulas.
El punto $(0,0)$ es atractivo si, y solo si, λ_1 y λ_2 tienen partes reales estrictamente negativas.

EJERCICIO: Estudiar la estabilidad en la E.D.L. de orden 2 con coeficientes constantes y homogénea. Esta E.D. puede reducirse al estudio de un S.D. autonomo plano.