1ª PARTE: ESPACIOS NORMADOS

TEMA 1: ESPACIOS NORMADOS

1. NORMA EN UN ESPACIO VECTORIAL

Consideraremos en adelante espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Veamos algunos ejemplos de espacios vectoriales:

EJEMPLOS: ① $\mathbb{K}$ es espacio vectorial de dimensión 1 sobre $\mathbb{K}$.

② $\mathbb{K}^n$ es espacio vectorial de n-dim sobre $\mathbb{K}$.

③ El conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}$ de las matrices de orden $m\times n$ con elementos en $\mathbb{K}$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, de $m\times n$-dim

④ El conjunto de las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$ con las leyes $\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}$ y $\lambda\cdot\{x_n\}=\{\lambda x_n\}$, es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{K}$.

⑤ El conjunto de sucesiones convergentes en $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial de dimensión infinita sobre $\mathbb{K}$, subespacio del anterior.

⑥ El conjunto de las sucesiones en $\mathbb{K}$ que verifican que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$ $(p\geq 1)$ es, tambien, un subespacio de dimensión infinita del espacio de las sucesiones en $\mathbb{K}$.

⑦ Conjunto de las funciones $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$

⑧ Subespacios del anterior son el conjunto de las funciones continuas en $[a,b]$, el conjunto de las funciones acotadas en $[a,b]$, el conjunto de las funciones Riemann-integrables, el conjunto de las funciones de variación acotada. Todos los anteriores son espacios vectoriales de dimensión infinita.

DEFINICION: (Norma en un espacio vectorial).

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una norma sobre V es una aplicación

$$\|\ldots\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\| \quad \text{(se lee: "norma de } x\text{")}$$

que verifica las propiedades:

i) $\|x\|=0 \iff x=0$

ii) $\forall x,y\in V$, $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

iii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}, \forall x\in V$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\|$.

DEFINICION: Se llama espacio normado al par $(V, \|\ldots\|)$, es decir, es un espacio vectorial dotado de una norma.

Vamos a obtener unas consecuencias inmediatas de la definición de norma:

1.1. PROPOSICION: iv) $\forall x \in V, \ \|x\| \geq 0$.
v) $\forall x \in V, \ \|-x\| = \|x\|$.
vi) $\forall x, y \in V, \ \big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x+y\|$ (*)

Demostr.: v) Dado $-1 \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V$, $\|(-1)x\| = |-1| \cdot \|x\| = \|x\|$.
iv) $\forall x \in V$, $0 = \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2 \cdot \|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0$.
vi) $\forall x, y \in V$, $\|x\| = \|(x+y) + (-y)\| \leq \|x+y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x+y\|$
Analogamente, $\|y\| - \|x\| \leq \|x+y\|$
Luego $\forall x, y \in V$, $\big| \|x\| - \|y\| \big| = \sup\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} \leq \|x+y\|$. csqd.

EJEMPLOS: ① En $\mathbb{K}$ es una norma la aplicación $x \in \mathbb{K} \longmapsto |x| \in \mathbb{R}$ donde $|\ldots|$ es el módulo del complejo x (si $x \in \mathbb{R}$, el módulo de x es el valor absoluto de x, pero siempre podemos considerar $x \in \mathbb{C}$).
Se demuestra que $\|\ldots\| : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es una norma en $\mathbb{K}$ si y solo si
$\exists a > 0 \ / \ \forall x \in \mathbb{K}, \ \|x\| = a|x|$ (Cond. nec: $\forall x, y \in \mathbb{K} - \{0\}$, $\|xy\| = |x| \|y\| = |y| \|x\| \Rightarrow \frac{\|x\|}{|x|} = \frac{\|y\|}{|y|} = a$, Con. Suf: Trivial)

② Dado $p \geq 1$ es una norma en $\mathbb{K}^n$ la definida por
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$
Se le llama norma p.
Se demuestra que $\lim_{p \to +\infty} \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$
A la norma $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ se le llama norma infinito.

③ En el espacio vectorial de las sucesiones acotadas en $\mathbb{K}$ es una norma la definida por:
$$\|\{x_n\}\| = \sup_n \{|x_n|\}$$

④ En el espacio vectorial de las sucesiones de potencia p-ésima sumable (sucesiones que verifican que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$) es una norma
$$\|\{x_n\}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}$$

⑤ En el espacio vectorial de las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R} \ldots$
a) ... acotadas es una norma $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$
b) ... R-integrables es una norma $\|f\| = \int_a^b |f|$ y tambien $\|f\|_p = \left[\int_a^b |f|^p \right]^{1/p}$.
c) ... continuas es una norma $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

(*) En particular, tenemos tambien que $\forall x, y \in V$, $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$.

1.2. PROPOSICION: Si $\|\ldots\|$ es una norma en V, entonces la aplicación $d: (x,y)\in V^2 \longmapsto d(x,y)=\|x-y\|\in\mathbb{R}$ es una métrica (distancia) en V que verifica las propiedades:

A) d es invariante por traslaciones: $\forall x,y,z\in V$, $d(x+z,y+z)=d(x,y)$

B) d es absolutamente homogenea frente a las homotecias, es decir

$\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall x,y\in V$, $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\, d(x,y)$.

Recíprocamente, si d es una distancia en V que es invariante por traslaciones y absolutamente homogenea frente a las homotecias, entonces la aplicación $\|\ldots\|: x\in V\longmapsto \|x\|=d(x,0)\in\mathbb{R}$ es una norma en V.

Demostr.: – Veamos que d es una métrica:

$d(x,y)=0 \Leftrightarrow \|x-y\|=0 \Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

$d(x,y)=\|x-y\|=\|y-x\|=d(y,x)$

$\forall x,y,z\in V$, $d(x,y)=\|x-y\|=\|(x-z)+(z-y)\|\leq\|x-z\|+\|z-y\|=d(x,z)+d(z,y)$.

– d verifica A) y B):

A) $d(x+z,y+z)=\|(x+z)-(y+z)\|=\|x-y\|=d(x,y)$, $\forall x,y,z\in V$.

B) $d(\lambda x,\lambda y)=\|\lambda x-\lambda y\|=\|\lambda(x-y)\|=|\lambda|\cdot\|x-y\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x,y\in V$.

Recíproco: i) $\|x\|=0 \Leftrightarrow d(x,0)=0 \Leftrightarrow x=0$.

ii) $\forall x,y\in V$, $\|x+y\|=d(x+y,0)\leq d(x+y,y)+d(y,0)=d(x,0)+d(y,0)=\|x\|+\|y\|$

iii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\forall x\in V$, $\|\lambda x\|=d(\lambda x,0)=|\lambda|\,d(x,0)=|\lambda|\cdot\|x\|$. csqd.

Se deduce de esta proposición que son "sinónimos" los conceptos de espacio vectorial normado y espacio vectorial con una métrica que verifica A) y B). En un espacio normado están ligadas por A) y B) la estructura algebraica y la topológica. Podemos decir, entonces, que la de espacio normado es una estructura algebraico – topológica.

Vamos a recordar algunas definiciones dadas en TOPOLOGIA I

DEFINICIONES: Sean M y M' espacios métricos y d y d' las métricas respectivas.

a) Una aplicación $f: M\to M'$ es una isometría si es biyectiva y $\forall x,y\in M$, $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$.

b) $f: M\to M'$ es una semejanza si $\exists\rho\geq 0 / \forall x,y\in M$, $d'(f(x),f(y))=\rho\, d(x,y)$.

c) $f: M\to M'$ es lipschitziana si $\exists\rho\geq 0 / \forall x,y\in M$, $d'(f(x),f(y))\leq\rho\, d(x,y)$.

A la vista de estas definiciones podemos afirmar que toda isometría es una semejanza, que toda semejanza es una aplicación lipschitziana y que toda aplicación Lipschitziana es continua.

Vamos a dar a continuación una proposición muy sencilla de demostrar pero de consecuencias muy importantes.

1.3. PROPOSICION: Sea E un espacio normado. Se verifica:

a) $\forall a \in E$, la traslación de vector a es una isometría, es decir, la aplicación $x \in E \longmapsto x+a \in E$ es una isometría.

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, la aplicación $x \in E \longmapsto \lambda x \in E$ (homotecia "λ") es una semejanza.

c) Las aplicaciones $x \in E \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ y $(x,y) \in E^2 \longmapsto x+y \in E$ son lipschitzianas.

d) La aplicación $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto \lambda x \in E$ es continua.

Demostr.: a) Sabemos que la norma en E define una métrica sobre E que verifica A) y B) (PROPOSICION 1.2.). Que la traslación de vector a es una isometría es trivial por A): $\forall a \in E$, $d(x+a, y+a) = d(x,y)$, $\forall x, y \in E$.

b) Dado $\lambda \in \mathbb{K}$, la aplicación $x \in E \longmapsto \lambda x \in E$ es una semejanza de constante $\rho = |\lambda|$, pues $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$.

c) La aplicación $\begin{array}{rcl} \|\ldots\| : E & \longrightarrow & (\mathbb{R}, |\ldots|) \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$ es lipschitziana; una constante de Lipschitz para $\|\ldots\|$ es $\rho = 1$, pues

$\forall x, y \in E$, $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| = d(x,y)$.

La métrica producto en $E \times E$ está definida por $d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}$.

Sea $\begin{array}{rcl} f : E \times E & \longrightarrow & E \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array}$

Entonces, $\forall (x_1,x_2),(y_1,y_2) \in E \times E$, $d(f(x_1,x_2), f(y_1,y_2)) = d(x_1+x_2, y_1+y_2) =$
$= \|(x_1+x_2) - (y_1+y_2)\| \leq \|x_1 - y_1\| + \|x_2 - y_2\| =$
$= d(x_1,y_1) + d(x_2,y_2) \leq 2 \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\} = 2\, d_\infty((x_1,x_2),(y_1,y_2))$

Luego una constante de Lipschitz es $\rho = 2$.

d) Se trata de probar que $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 / d_\infty[(\lambda,x),(\mu,y)] \leq \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow d(\lambda x, \mu y) \leq \varepsilon$.

Recordemos que $d_\infty[(\lambda,x),(\mu,y)] = \max\{|\lambda - \mu|, \|x-y\|\}$
y $d(\lambda x, \mu y) = \|\lambda x - \mu y\|$

$\|\lambda x - \mu y\| = \|\lambda x - \lambda y + \lambda y - \mu y\| \leq |\lambda| \, \|x-y\| + |\lambda - \mu| \cdot \|y\|$

Si $\lambda \neq 0$ tomamos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}, \frac{\varepsilon}{2(\|x\|+1)}\right\}$. Si $\max\{|\lambda-\mu|, \|x-y\|\} \leq \delta$

Entonces $\|\lambda x - \mu y\| \leq |\lambda| \cdot \|x-y\| + |\lambda - \mu| \cdot \|y\| \overset{(*)}{\leq} |\lambda| \cdot \|x-y\| + |\lambda - \mu| (\|y\|+1) \leq$
$\leq |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} + \frac{\varepsilon}{2(\|x\|+1)} (\|x\|+1) = \varepsilon$.

Si $\lambda = 0$ tomamos $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{(\|x\|+1)}\right\}$

Entonces si $\max\{|0-\mu|, \|x-y\|\} \leq \delta \Rightarrow$
$\Rightarrow d(0,\mu y) = \|\mu y\| = |\mu|\cdot\|y\| \leq |\mu|\cdot(\|x\|+1) \leq \frac{\varepsilon}{\|x\|+1}(\|x\|+1) = \varepsilon$.

2. Compacidad en un espacio normado.

2.1. PROPOSICION: Dos bolas abiertas (cerradas) cualesquiera de un espacio normado son "semejantes", y por tanto, homeomorfas, uniformemente homeomorfas y lipschitzianamente homeomorfas.

Demostr.: Denotamos por $B(x,r)$ la bola abierta de centro x y radio r y por $B[x,r]$ la correspondiente bola cerrada. Entonces:
$\forall x \in E, \forall r>0, \quad B(x,r) = x + r\,B(0,1)$ y $B[x,r] = x + r\,B[0,1]$.
Probémoslo: $x + r\,B(0,1) = \{x+ry / y \in B(0,1)\} = \{x+ry / \|y\|<1\}$.
Sea $z \in B(x,r)$; entonces $\|x-z\|<r$.
Sea $y = \frac{1}{r}(z-x)$. Entonces $\|y\| = \left|\frac{1}{r}\right|\cdot\|z-x\| < \left|\frac{1}{r}\right|\,|r| = 1$

Además $z = x+ry$ con $\|y\|<1$, luego $z \in x + r\,B(0,1)$.
Por otro lado $\forall y \in B(0,1)$, $z = x+ry \in B(x,r)$ pues
$\|z-x\| = \|x+ry-x\| = |r|\cdot\|y\| = r\cdot\|y\| < r$.
Luego $B(x,r) = x + r\,B(0,1)$. Análogamente, $B[x,r] = x + r\,B[0,1]$.
La aplicación $h_r: y \in B(0,1) \longmapsto ry \in B(0,r)$ es una semejanza y la aplicación $t_x: z \in B(0,r) \longmapsto x+z \in B(x,r)$ es una isometría.
Luego $h = t_x \circ h_r: y \in B(0,1) \longmapsto x+ry \in B(x,r)$ es una semejanza.
Por tanto, toda bola abierta en E es "semejante" a $B(0,1)$. Por la transitividad de la semejanza, todas las bolas abiertas de E son semejantes. Analogamente, todas las bolas cerradas son semejantes. c.s.q.d.

2.2. COROLARIO: Toda propiedad de semejanza, y, por tanto, toda propiedad topológica, uniforme o lipschitziana, de una bola abierta (cerrada) de un espacio normado, es una propiedad de todas las bolas abiertas (cerradas) del mismo. (*)

2.3. COROLARIO: Un espacio normado es localmente compacto si y solo si todas las bolas cerradas del mismo son compactas.

Demostr.: $\Rightarrow$ Si E es localmente compacto, todo punto tiene un entorno compacto. Para este entorno existe una bola cerrada centrada en el punto contenida en el entorno. Esta bola es un subconjunto cerrado de un compacto, y, por tanto, compacta. Por el corolario anterior, se tiene que todas las bolas cerradas de E son compactas.

$\Leftarrow$| Si toda bola cerrada en E es compacta, $\forall x \in E$, $B[x,1]$ es un entorno compacto de x, que prueba que E es localmente compacto. c.s.q.d.

2.4. COROLARIO: Un espacio normado E es localmente compacto si y solo si todo cerrado y acotado en E es compacto.

Demostr.: $\Rightarrow$| Todo conjunto acotado está contenido en una bola cerrada. Siendo E localmente compacto, dicha bola es compacta. Luego, el subconjunto de E que se nos da es un cerrado contenido en un compacto y, por tanto, compacto.

$\Leftarrow$| Toda bola cerrada en E es un conjunto cerrado y acotado; entonces, toda bola cerrada es compacta. En virtud del corolario anterior, E es localmente compacto. c.s.q.d.

OBSERVACION: Un espacio normado $E \neq \{0\}$ no puede ser compacto, pues una condición necesaria para que un espacio métrico (y, en particular, un espacio normado) sea compacto es que sea acotado, y un espacio normado nunca es acotado (hay distancias tan grandes como se desee).

Se probará más adelante que un espacio normado es localmente compacto si y solo si es de dimensión finita.

3. Ejemplo de espacio normado: Espacio de las funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

Sea $I=[a,b]$ un intervalo compacto de la recta real. Sea $C(I)$ el espacio vectorial de las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$.

Según Teorema de Bolzano-Weierstrass sobre la acotación de funciones continuas en un compacto (ANALISIS I, TEMA 5º, TEOREMA 1.2) toda función continua sobre un compacto alcanza su valor máximo en el compacto. Podemos definir, entonces, una aplicación

$$\begin{aligned} \|\ldots\| : C(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \|f\| = \max_{x\in I} |f(x)| \left(= \sup_{x \in I} |f(x)|\right). \end{aligned}$$

3.1. PROPOSICION: La aplicación $\|\ldots\|$ definida anteriormente es una norma sobre $C(I)$.

Demostr.: i) $\|f\|=0 \Leftrightarrow f=0$, pues $\max_{x\in I}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \forall x\in I, |f(x)|=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in I, f(x)=0$.

ii) $\forall f,g \in C(I)$, $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$.

$\|f+g\| = \max_{x\in I} |(f+g)(x)| = \max_{x\in I} |f(x)+g(x)| \leq \max_{x \in I}\left[|f(x)|+|g(x)|\right] \leq$ (*)

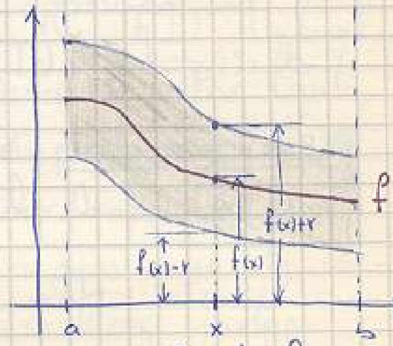
$\leq \max_{x\in I} |f(x)| + \max_{x\in I} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$

iii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in C(I), \|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$

$$\|\lambda f\| = \max_{x\in I} |(\lambda f)(x)| = \max_{x\in I} |\lambda \cdot f(x)| = \max_{x\in I} |\lambda|\cdot|f(x)| \overset{(*)}{=} |\lambda| \max_{x\in I} |f(x)| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

Por tanto, $\|\ldots\|$ es una norma en $C(I)$. csqd. (*)

■ Estudiemos como son las bolas en el espacio métrico $C(I)$. La distancia inducida por la norma en $C(I)$ se define por: $d(f,g) = \|f-g\|$. Entonces, dado $r>0$, $B(f,r) = \{g \in C(I) / \|f-g\| < r\}$, es decir, si una función g está en $B(f,r)$ la mayor distancia entre los puntos $(x, f(x))$ y $(x, g(x))$ cuando x recorre I, es menor que r. Por tanto, $B(f,r)$ es el conjunto de funciones continuas de I en $\mathbb{R}$ cuya gráfica está contenida en el interior de la "banda" de $\mathbb{R}^2$ limitada por la gráfica de las funciones $f_1 : x \in I \longmapsto f(x)+r \in I$ y $f_2 : x \in I \longmapsto f(x) - r \in I$ (se le llama r-banda de f). $B[f,r]$ contiene a $B(f,r)$ y a las funciones continuas de I en $\mathbb{R}$ contenidas en la r-banda de f, pudiendo tocar las gráficas de las funciones f_1 y f_2.



r-banda de f.

La frontera de $B(f,r)$ queda caracterizada del siguiente modo:

$$g \in Fr[B(f,r)] \iff \|f-g\| \leq r \wedge \exists x \in I / |f(x) - g(x)| = r.$$

En este espacio normado se verifica que la adherencia de la bola abierta es la bola cerrada, cosa que no ocurre en cualquier espacio métrico.

■ CONVERGENCIA EN $C_\infty(I)$: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de $C(I)$ que converge hacia una función $f \in C(I)$. Por definición de convergencia se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) < \varepsilon$, donde d es la distancia inducida por la norma en $C(I)$, es decir, $d(f_n, f) = \|f_n - f\| = \max_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Entonces $[(f_n)_n \xrightarrow{C(I)} f] \iff [\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow \max_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

Por tanto, el concepto de convergencia en $C(I)$ coincide con la idea que tenemos de convergencia uniforme de sucesiones funcionales. Aplicando el CRITERIO DE CONVERGENCIA UNIFORME DE CAUCHY (ANALISIS I, TEMA 9º, TEOREMA 1.3.) te-

(*) A esta norma se le suele llamar $\|\ldots\|_\infty$ y al espacio normado $(C(I), \|\ldots\|)$ se le representa por $C_\infty(I)$. No obstante, mientras no se preste a confusión, los seguiremos denotando por $\|\ldots\|$ y $C(I)$.

(*) $\forall x \in I,\ |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \max |f(x)| \Rightarrow \max |\lambda| \cdot |f(x)| \leq |\lambda| \max |f(x)|$.

nemos el siguiente

3.2. COROLARIO: $C_\infty(I)$ es un espacio normado completo (*).

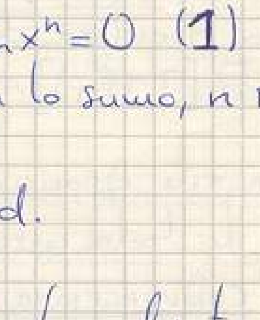
Demostr.: El criterio de convergencia uniforme de Cauchy dice que
$[(f_n) \longrightarrow f$ uniformemente en $I] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in I]$
y esto último equivale a decir que $(f_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $C(I)$. Luego, toda sucesión (f_n) de Cauchy en $C(I)$ converge uniformemente hacia una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Como las f_n, $n \in \mathbb{N}$, son continuas y la convergencia es uniforme se tiene que f es continua en I, es decir, $f \in C(I)$, lo cual prueba que (f_n) converge en $C(I)$. c.s.q.d.

3.3. PROPOSICION: Sea $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces, el espacio vectorial $C(I)$ es de dimensión infinita.

Demostr.: Hay que probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un sistema libre de n vectores (funciones) de $C(I)$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones $f_0 : x \in I \mapsto 1 \in \mathbb{R}$, $f_1 : x \in I \mapsto x \in \mathbb{R}$, $f_2 : x \in I \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$, ..., $f_n : x \in I \longmapsto x^n \in \mathbb{R}$ son continuas y linealmente independientes, pues si fueran linealmente dependientes existirían $n+1$ escalares $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ no todos nulos tales que:
$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0$$
o bien, tales que $\forall x \in I$, $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_n x^n = 0$ (1)
lo cual es absurdo, pues la ecuación (1) tiene, a lo sumo, n raíces, y en I hay una infinidad no numerable de elementos.
Por tanto, $C(I)$ es de dimensión infinita. c.s.q.d.

3.4. PROPOSICION: $C_\infty(I)$ no es localmente compacto.

Demostr.: Si con θ representamos la función nula sobre el intervalo cerrado $I = [0,1]$, probaremos que $B[\theta, 1]$ no es compacto, con lo cual tendremos en $C(I)$ un conjunto cerrado y acotado no compacto, de donde deduciremos que $C(I)$ no es localmente compacto (COROLARIO 2.4).
Probaremos que $B[\theta, 1]$ no es compacto viendo que admite un subconjunto infinito que no tiene ningún punto de acumulación, o bien, que hay una sucesión acotada que no tiene ningún valor de adherencia.
Consideremos $I = [0,1]$, por simplicidad.
En $C(I)$, tomamos la sucesión $(f_n)_n$ donde
$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = x^n$$



Entonces, $\forall x \in [0,1[$, $\lim_n f_n(x) = \lim_n x^n = 0$ y $\lim_n f_n(1) = 1$.
Por tanto, (f_n) converge puntualmente en $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$ hacia la función

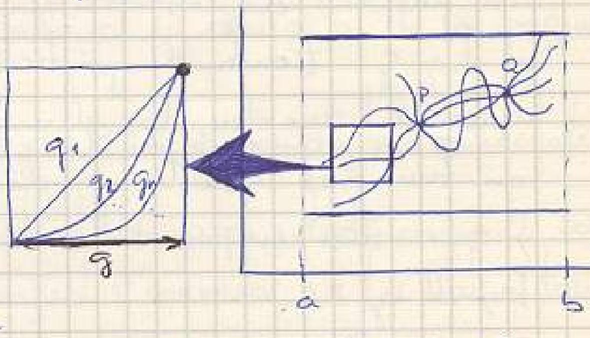
$$f: x \in [0,1] \longmapsto f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ = 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Este límite no es uniforme, pues si la convergencia fuese uniforme, siendo f_n continua, $\forall n \in \mathbb{N}$, debería ser f continua, y no lo es.
Por tanto, $(f_n)_n$ no converge en $C(I)$. Entonces, toda subsucesión de $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia f en $\mathcal{F}(I;\mathbb{R})$, y, por tanto, ninguna subsucesión de $(f_n)_n$ converge en $C_\infty(I)$, lo cual prueba que $(f_n)_n$ no tiene ningún valor de adherencia. Por tanto, según lo indicado anteriormente, $B[\theta,1]$ no es compacto. c.s.q.d. ■

El criterio empleado en la demostración anterior, resumido, es el siguiente: "Si en una parte de $C(I)$ existe una sucesión puntualmente convergente, pero no uniformemente convergente, entonces dicha parte no es compacta".

Para decidir la compacidad o no compacidad de una parte de $C(I)$ podemos seguir el siguiente criterio intuitivo (puede probarse formalmente):
Si introducimos en dicha parte de $C(I)$ un cuadrado de modo que las restricciones de las funciones de dicha parte al cuadrado sean todas las funciones continuas que podemos definir en el cuadrado, entonces, dicha parte de $C(I)$ no será compacta.

Consideremos el subconjunto F de $C([a,b])$ de la figura formado por las funciones continuas que pasan por los puntos P y Q. Las restricciones de estas funciones al cuadrado dibujado en la figura son todas las funciones continuas que podemos definir en el cuadrado.



Consideremos en dicho cuadrado las funciones $g_1, g_2, \dots, g_n, \dots$ definidas análogamente a como se definieron las funciones $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ en la demostración de la PROPOSICION 3.4. Estas funciones se pueden prolongar a funciones de F. Esta sucesión funcional converge puntualmente, pero no uniformemente, hacia una función g definida sobre el cuadrado de modo análogo a la función f de PROPOSICION 3.4., lo que prueba que F no es compacto.

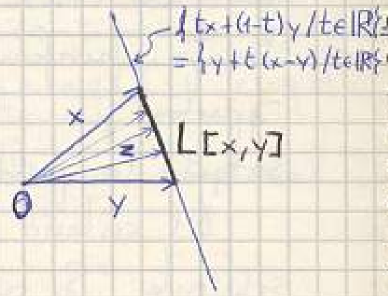
Este es, entonces, un método intuitivo para decidir si una parte de $C(I)$ es compacta o no.

4. Conexión en espacios normados

Vamos a dar dos definiciones, puramente algebraicas, es decir, basadas exclusivamente en la estructura vectorial de espacio normado, pero que luego relacionaremos con la estructura métrica de dicho espacio.

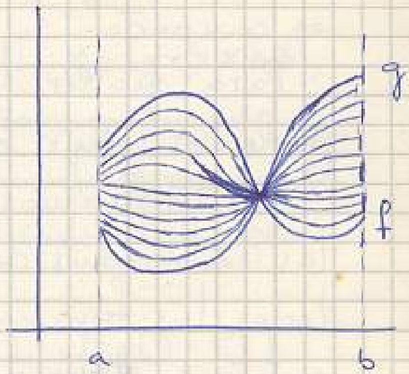
Sea V un espacio vectorial real o complejo ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

DEFINICION: Se llama segmento (resp. segmento abierto) de extremos $x, y \in V$ el conjunto $L[x,y] = \{tx + (1-t)y \,/\, t \in [0,1]\}$ (resp. $L(x,y) = \{tx+(1-t)y \,/\, t \in]0,1[\}$).

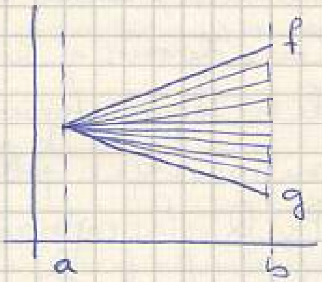


* El segmento $L[x,y]$ es el conjunto de vectores z de V que se pueden poner en la forma
$z = tx + (1-t)y = y + t(x-y)$, $t \in [0,1]$, es decir, si $z \in L[x,y]$, z es un vector suma de y con un vector paralelo a $x-y$ y de módulo menor que él.

* Veamos como son los segmentos en $C(I)$.
Dadas $f, g \in C(I)$ se tiene:
$L[f,g] = \{tf + (1-t)g \,/\, t \in [0,1]\}$
Este conjunto no contiene a todas las funciones continuas cuyas gráficas estén comprendidas entre las gráficas de f y g. Se trata de una "deformación continua" (o aun más, una "deformación lineal") de las gráficas de f y g.

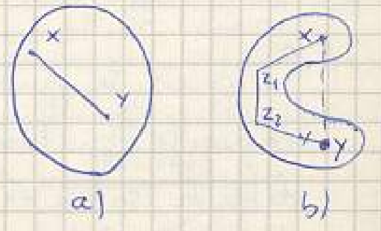


Si f y g tienen de gráfica las rectas de la figura del margen, los elementos de $L[f,g]$ son funciones que tienen de gráfica una recta y que están comprendidas entre las gráficas de f y de g.



DEFINICION: Decimos que un subconjunto A de un espacio vectorial V es convexo si $\forall x, y \in A$, $L[x,y] \subset A$.

Ejemplos: ① En $\mathbb{R}^2$ la figura a) es un conjunto convexo. La figura b), en cambio, no lo es, pues existen dos puntos x, y del conjunto de modo que el segmento $L[x,y]$ no esta contenido en dicho conjunto.



a) b)

② En $C(I)$, el conjunto de funciones diferenciables es una parte convexa, pues si $t \in [0,1]$ y f y g son funciones diferenciables en I, entonces $tf + (1-t)g$ es diferenciable en I, como combinación lineal de fun-

ciones diferenciables en I. El conjunto de funciones de $C(I)$ que pasan por un punto (x_0, y_0) tambien es convexo, pues si f y g pasan por (x_0, y_0), $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$, entonces $\forall t \in [0,1]$, $[tf+(1-t)g](x_0) =$
$= t \cdot f(x_0) + (1-t) g(x_0) = t\, y_0 + (1-t) y_0 = t\, y_0 + y_0 - t\, y_0 = y_0$

4.1. PROPOSICION: Toda bola abierta (cerrada) en un espacio normado E es un conjunto convexo.

Demostr.: Consideremos la bola abierta $B(x,r)$ con $x \in E$ y $r>0$.
Como sabemos $B(x,r) = \{y \in E \,/\, \|x-y\| < r\}$.
Se trata de probar que $\forall y,z \in B(x,r)$, $L[y,z] \subset B(x,r)$, o bien, que dados $y,z \in B(x,r)$, $\forall t \in [0,1]$, $t\,y + (1-t)\,z \in B(x,r)$.

$\| t\,y + (1-t)z - x \| = \| t(y-x) + (1-t)(z-x) \| \leq |t|\, \|y-x\| + |1-t|\, \|z-x\|$

Como $t \in [0,1]$, $|t| = t$ y $|1-t| = 1-t$. Luego

$\| t\,y + (1-t)z - x \| \leq |t|\, \|y-x\| + |1-t| \cdot \|z-x\| = t\, \|y-x\| + (1-t)\, \|z-x\| <$
$< t\,r + (1-t)\,r = r$.

Luego $\forall t \in [0,1]$, $t\,y + (1-t)z \in B(x,r)$, si $y,z \in B(x,r)$. csqd.

DEFINICION: Definimos la poligonal de vértices $x_0, x_1, \dots, x_n$, en este orden, como el conjunto

$$P[x_0, x_1, \dots, x_n] = L[x_0, x_1] \cup L[x_1, x_2] \cup \dots \cup L[x_{n-2}, x_{n-1}] \cup L[x_{n-1}, x_n]$$

DEFINICION: Un subconjunto A de un espacio vectorial V diremos que es conexo por poligonales si

$$\forall x,y \in A,\ \exists z_1, \dots, z_n \in A \,/\, P[x, z_1, z_2, \dots, z_n, y] \subset A. \quad (*)$$

Ejemplos: ① El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dibujado en la figura b) de la página anterior es conexo por poligonales.
② La gráfica de la función $x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2 \in \mathbb{R}$ no es conexa por poligonales.

Como consecuencia inmediata de la definición tenemos que todo conjunto convexo es conexo por poligonales. A los conjuntos convexos se les llama tambien conexos por segmentos

• Recordemos de TOPOLOGIA I que un subconjunto A de un espacio topológico X es conexo por arcos si cualesquiera que sean $x,y \in A$ existe una aplicación continua

$$\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$$

de modo que $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$, $\varphi([a,b]) \subset A$.
Recordemos tambien que todo conjunto conexo por arcos es conexo, y que el recíproco no es cierto, pues, por ejemplo, el conjunto

$\{(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x}) \,/\, x<0\} \cup \{(0,y) \,/\, y \in [-1,1]\}$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}^2$, pero no conexo por arcos.

4.2. PROPOSICION: Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Entonces, todo conjunto conexo por poligonales es conexo por arcos.

Demostr.: Sea $A \subset E$ un conjunto conexo por poligonales, es decir, tal que
$$\forall x,y \in A,\ \exists z_1, z_2, \dots, z_n \in A \ / \ L[x,z_1] \cup L[z_1,z_2] \cup \dots \cup L[z_{n-1},z_n] \cup L[z_n,y] \subset A.$$
Definimos la aplicación:
$$\begin{aligned} \varphi : [0,n+1] \subset \mathbb{R} &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \begin{cases} = t z_1 + (1-t)x \text{ si } t \in [0,1] \\ = (t-1) z_2 + (2-t) z_1 \text{ si } t \in [1,2] \\ \dots\dots\dots \\ = [t-(k-1)] z_k + (k-t) z_{k-1} \text{ si } t \in [k-1,k] \\ \dots\dots\dots \\ = (t-n+1) z_n + (n-t) z_{n-1} \text{ si } t \in [n-1,n] \\ = (t-n) y + (n+1-t) z_n \text{ si } t \in [n,n+1] \end{cases} \end{aligned}$$
Esta aplicación es, trivialmente, continua. Los puntos en que presenta mayor dificultad probar la continuidad son los extremos de los intervalos; calculemos los límites laterales:
$$\lim_{\substack{t \to k \\ t<k}} \varphi(t) = \lim_{t \to k} ([t-k+1] z_k + (k-t) z_{k-1}) = (k-k+1) z_k + (k-k) z_{k-1} = z_k$$
$$\text{y } \lim_{\substack{t \to k \\ t>k}} \varphi(t) = \lim_{t \to k} ([t-k] z_{k+1} + (k+1-t) z_k) = (k-k) z_{k+1} + (k+1-k) z_k = z_k.$$
Además $\varphi(0) = x$, $\varphi(n+1) = y$, y $\varphi([0,n+1]) \subset A$, pues
$\varphi([0,1]) = L[x,z_1]$, $\varphi([1,2]) = L[z_1,z_2]$, ..., $\varphi([n,n+1]) = L[z_n,y]$. csqd.

Como consecuencia inmediata de esta proposición obtenemos el siguiente:

4.3. COROLARIO: Sea E un espacio normado y A un subconjunto de E. Entonces:
(A convexo) $\Rightarrow$ (A conexo por poligonales) $\Rightarrow$ (A conexo por arcos) $\Rightarrow$ (A conexo).

CONSECUENCIAS: ① Todo espacio normado E es convexo, pues $\forall x,y \in E$, $L[x,y] \subset E$. Entonces, por el corolario anterior, todo espacio normado es conexo por poligonales, conexo por arcos y CONEXO.

② Todo subespacio vectorial de un espacio normado es convexo y, por tanto, conexo. Toda variedad lineal (trasladado de un subespacio) de un espacio normado es convexa y, por tanto, conexo.

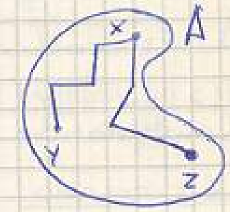
③ Según PROPOSICION 4.1. toda bola en un espacio normado es un conjunto convexo y, por tanto, conexo.

④ Consecuencia inmediata de ③ es que todo espacio normado es localmente convexo (todo punto admite un sistema fundamental de entornos convexos), pues las bolas centradas en un punto constituyen un SFE del punto. Por tanto, todo espacio normado es LOCALMENTE CONEXO, es decir, todo punto admite un SFE ...

⑤ Trivialmente, todo segmento $L[x,y]$ es un conjunto convexo y, por tanto, conexo.

4.4. TEOREMA: En un espacio normado E todo conjunto abierto y conexo es conexo por poligonales.

Demostr.: Sea A un conjunto abierto y conexo de E. Sea x un punto de A. Basta probar que para todo $y \in A$ existe una poligonal contenida en A que "une" los puntos x e y, pues, entonces, dados $y, z \in A$ existe una poligonal que une los puntos y y z, pasando por x, es decir, si $P[y, s_1, \dots, s_n, x]$ es la poligonal que une y y x, y $P[x, r_1, \dots, r_m, z]$ es la poligonal que une x y z, entonces, z e y están unidos por la poligonal $P[y, s_1, \dots, s_n, x, r_1, \dots, r_m, z]$.



Probemos, entonces, que fijado $x \in A$, $\forall y \in A$, $\exists s_1, \dots, s_n \in A \,/\, P[y, s_1, \dots, s_n, x] \subset A$.
Sea A_1 el conjunto de los $y \in A$ tales que x e y se pueden unir por una poligonal contenida en A, y $A_2 = A - A_1$, es decir, A_2 es el conjunto de los elementos $z \in A$ tales que z y x no se pueden unir por una poligonal contenida en A.
Evidentemente, A_1 y A_2 son disjuntos y $A_1 \cup A_2 = A$. Además $A_1 \neq \emptyset$, pues $x \in A$.
Probemos que A_1 y A_2 son abiertos. (*)

— A_1 es abierto: Probaremos que para cada $y \in A_1$ existe una bola centrada en y, contenida en A_1. Dado $y \in A_1$, $y \in A$. Siendo A abierto tenemos que $\exists r > 0 \,/\, B(y,r) \subset A$.
Entonces $B(y,r) \subset A_1$, por lo siguiente: si $y \in A_1$ se puede unir con x mediante una poligonal $P[x, r_1, \dots, r_n, y]$; entonces $\forall z \in B(y,r)$, siendo $B(y,r)$ convexa, el segmento $L[y,z] \subset B(y,r)$. Por tanto, todo $z \in B(y,r)$ se puede unir con x mediante la poligonal $P[x, r_1, \dots, r_n, y, z]$, y esto significa que $z \in A_1$. Luego $\forall y \in A_1$, $\exists r > 0 \,/\, B(y,r) \subset A_1$, que prueba que A_1 es abierto.

— A_2 es abierto: Dado $y \in A_2$, se tiene que $y \in A$. Siendo A abierto, existe $r > 0$ tal que $B(y,r) \subset A$. Probemos que $B(y,r) \subset A_2$.
Si algún punto $z \in B(y,r)$ no estuviera en A_2, estaría en A_1 y, por tanto, se podría unir con x mediante una poligonal $P[x, s_1, \dots, s_m, z]$.
Siendo $B(y,r)$ convexa, x e y se podrían unir mediante la poligonal $P[x, s_1, \dots, s_m, z, y]$ en contra de que $y \in A_2$. Luego $B(y,r) \subset A_2$ y, por tanto, A_2 es abierto.

Entonces, A_1 y A_2 son dos conjuntos disjuntos, abiertos con $A_1 \cup A_2 = A$. Siendo $A_1 \neq \emptyset$, debe ser $A_2 = \emptyset$, pues al ser A conexo no se puede expresar como unión de dos conjuntos no vacíos, abiertos y disjuntos. Por tanto, $A = A_1$, lo que prueba que todo punto $y \in A$ se puede unir con x mediante una poligonal contenida en A, y según se indicó anteriormente, queda probado que dos puntos cualesquiera de A se pueden unir mediante una poligonal contenida en A, es decir, que A es conexo por poligonales. c.s.q.d.

Combinando este teorema con el COROLARIO 4.3. obtenemos el siguiente:

4.5. COROLARIO: Sea A un conjunto abierto de un espacio normado E. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) A es conexo por poligonales.

b) A es conexo por arcos

c) A es conexo.

Demostr.: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) por COROLARIO 4.3., c) $\Rightarrow$ a) por TEOREMA 4.4.

5. Límites y continuidad en espacios normados

Teniendo en cuenta que un espacio normado es un espacio métrico particular, los conceptos de límite y continuidad de una función en un punto se definen del siguiente modo:

"Sean E y F espacios normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Sea A un subconjunto de E y $f: A \subset E \to F$ una aplicación. Entonces:

a) Si a es un punto de acumulación de A

$$\left[\lim_{x\to a} f(x) = b\right] \Longleftrightarrow \left[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x\in A,\, x\neq a}{\|x-a\| < \delta} \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon\right] \quad (*)$$

b) Si $a \in A$, decimos que f es continua en el punto a si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x\in A}{\|x-a\| < \delta} \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

5.1. PROPOSICION: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $f: A \subset E \to F$ y $g: B \subset E \to F$ aplicaciones, y a un punto de acumulación de $A \cap B$. Entonces:

a) Si existen $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$, entonces existe $\lim_{x\to a} (f+g)(x)$ y su valor es $b+c$.

b) Si $a \in A'$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, existe $\lim_{x\to a} (\lambda f)(x) = \lambda b$.

Demostr.: a) $\left(\lim_{x\to a} f(x) = b\right) \Rightarrow \left(\text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / \underset{x\in A,\, x\neq a}{\|x-a\| < \delta_1} \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon/2\right)$

$\left(\lim_{x\to a} g(x) = c\right) \Rightarrow \left(\text{dado } \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 / \underset{x\in B,\, x\neq a}{\|x-a\| < \delta_2} \Rightarrow \|g(x) - c\| < \varepsilon/2\right)$

Sea $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Entonces

dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A \cap B,\, x \neq a}{\|x-a\| < \delta} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underset{x\in A,\, x\neq a}{\|x-a\| < \delta_1} \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon/2 \\ \underset{x\in B,\, x\neq a}{\|x-a\| < \delta_2} \Rightarrow \|g(x) - c\| < \varepsilon/2 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|(f+g)(x) - (b+c)\| \leq \|f(x) - b\| + \|g(x) - c\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Luego $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = b+c$

b) Si $\lambda = 0$, la demostración es trivial. Supongamos que $\lambda \neq 0$.
Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A,\, x \neq a}{\|x-a\| < \delta} \Rightarrow \|f(x) - b\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$

Luego dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A,\, x \neq a}{\|x-a\| < \delta} \Rightarrow \|(\lambda f)(x) - \lambda b\| = |\lambda| \cdot \|f(x) - b\| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$

Luego $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lim_{x \to a} (\lambda f)(x) = \lambda \cdot b$. c.s.q.d.

Análogamente, se prueba que la suma de dos funciones continuas en un punto de la intersección de los dominios de definición de ambas funciones es otra función continua en dicho punto, y que el producto de un escalar por una función continua en un punto es también continua en dicho punto.

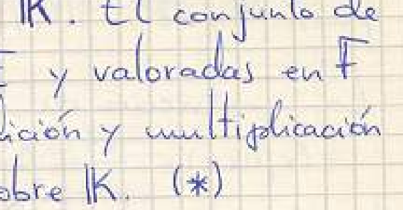
Entonces podemos enunciar la siguiente

5.2. PROPOSICION: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$. El conjunto de funciones definidas en un entorno de un punto $a \in E$ y valoradas en F que son continuas en a, posee respecto a la adición y multiplicación por un escalar, estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. (*)

* LIMITE DE UNA FUNCION SEGUN UN SUBESPACIO.

Sean E y F espacios normados sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Sea L un subespacio vectorial de E. Dado un vector $a \in E$, $a + L = \{a + x \in E / x \in L\}$ es la variedad lineal determinada por el vector a y el subespacio L. Sea, entonces, $f: A \subset E \to F$ una aplicación y a un punto de acumulación de $A \cap (a+L)$. Entonces:

DEFINICION: Se dice que f tiene por límite b en el punto a según el subespacio L si la restricción de f a $A \cap (a+L)$ tiene por límite b en el punto a. Es decir, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A \cap (a+L),\, x \neq a}{\|x-a\| < \delta} \Rightarrow \|f(x) - b\| < \varepsilon$.



Decir que f tiene límite b en el punto a significa que como quiera que nos acerquemos al punto a, f toma valores próximos a b. Decir que f tiene límite b en el punto a según el subespacio L significa que como quiera que nos acerquemos al punto a por puntos de la variedad lineal $a+L$, f toma valores próximos a b.

El hecho de que una función f tenga límite en un punto según un subespacio no implica que f tenga límite en ese punto. Es más, puede ocurrir que una función f tenga límites en un punto según todos **los** subespacios propios de E y que dichos límites coincidan, sin que f tenga límite en dicho punto (ver EJEMPLO 1). Análogamente a como se ha definido el límite de una función según un subespacio se puede definir el límite de una función en un punto $a \in E$ según un subconjunto B de E con solo exigir que $a \in (A \cap B)'$, siendo A el dominio de definición de f.

EJEMPLO 1: Consideremos el espacio normado $(\mathbb{R}^2, \|\ldots\|)$ donde $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$.

Sea la aplicación

$$f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

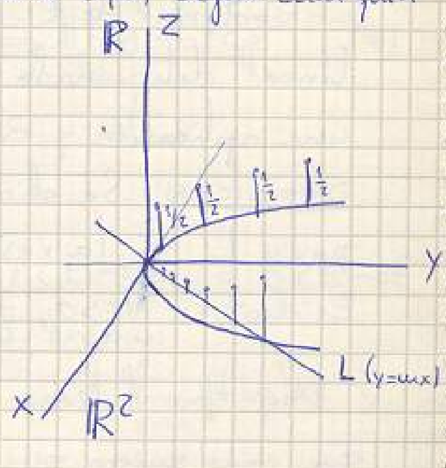
Veamos que f tiene límites en $(0,0)$ según todos los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ y que dichos límites coinciden. Los subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ son las rectas de ecuaciones $y = mx$ y la recta $\{(0,y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$.

La restricción de f al conjunto $\{(0,y)/y \in \mathbb{R}\} - \{(0,0)\}$ es la función nula pues $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(0,y) = 0$. Luego $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = 0$.

La restricción de f al subespacio $y = mx$ está definida por:

$$f(x, mx) = \frac{x^2 mx}{x^4 + m^2 x^2}$$

Entonces $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 mx}{x^4 + m^2x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx}{x^2+m^2} = 0$, y esto cualquiera que sea $m \in \mathbb{R}$. Luego el límite de f en el punto $(0,0)$ según cualquier subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ es 0. Es decir, a medida que nos acercamos al punto $(0,0)$ por cualquier recta que pase por el origen y contenida en el plano XY, los valores de f se aproximan también a 0. Sin embargo, f no tiene límite en el punto $(0,0)$, pues si nos acercamos a $(0,0)$ siguiendo la parábola $y = x^2$ ocurre que



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

6. APLICACIONES LINEALES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS NORMADOS

Las aplicaciones lineales entre espacios normados son los homomorfismos de las estructuras vectoriales subyacentes.

DEFINICION: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una aplicación lineal f de E en F es una aplicación que verifica las propiedades

a) $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$

b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$

Estas dos propiedades pueden reunirse en una sola:

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in E$, $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

EJEMPLOS DE APLICACIONES LINEALES:

① Una aplicación $f: \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es lineal si y solo si existe una matriz $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esto permite "identificar" las aplicaciones lineales a las matrices, es decir, el conjunto $\mathcal{H}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ de las aplicaciones lineales de $\mathbb{K}^m$ en $\mathbb{K}^n$ es isomorfo al conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ de las matrices de orden $m\times n$ de elementos de $\mathbb{K}$.

② Sea $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Si $a \in \mathbb{R}$, la aplicación

$$\varphi: f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longmapsto f(a) \in \mathbb{R}$$

es una aplicación lineal de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$.

③ Sea $C(I)$ el espacio vectorial de las funciones continuas sobre el intervalo compacto $I = [a, b]$ y con valores en $\mathbb{R}$. La aplicación:

$$f \in C(I) \longmapsto \int_a^b f \in \mathbb{R}$$

es una aplicación lineal. Una aplicación lineal de $C(I)$ en sí mismo es

$$\Psi: f \in C(I) \longmapsto g \in C(I)$$

siendo $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es decir, g es la primitiva de f que vale cero en a.

④ Sea $C^1(I)$ el subespacio vectorial de $C(I)$ formado por las funciones de clase 1 de I en $\mathbb{R}$, es decir, las funciones con derivada continua en I. Son lineales las aplicaciones siguientes:

$$f \in C^1(I) \longmapsto f' \in C(I)$$
$$f \in C^1(I) \longmapsto f'(a) \in \mathbb{R}$$
$$f \in C^1(I) \longmapsto \lambda f \in C^1(I), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

⑤ Sea $\mathbf{c}$ el espacio vectorial de las sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$. La aplicación $(x_n)_n \in \mathbf{c} \longmapsto \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ es lineal.

Veamos, ahora, algunos ejemplos de aplicaciones que no son lineales:

① La aplicación $(x_n) \in c \longmapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\} \in \mathbb{R}$ no es lineal, pues el supremo de la suma de dos sucesiones de c no tiene porqué ser la suma de los supremos. Contraejemplo: $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} = 1$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{-\frac{1}{n}\} = 0$

$\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\} = 0$ $\sup_{n\in\mathbb{N}} \{\frac{1}{n}\} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \{-\frac{1}{n}\} = 1$

② La aplicación $f \in C^1(I) \longmapsto |f| \in C(I)$ no es lineal

③ La aplicación $f \in C^1(I) \longmapsto \operatorname{Sen} \circ f \in C^1(I)$ no es lineal.

* El conjunto $\mathcal{H}(E,F)$ de las aplicaciones lineales de E en F con las operaciones adición y multiplicación por un escalar (inducidas por las operaciones de F) tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, subespacio de $\mathcal{A}(E,F)$. Denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ al conjunto de las aplicaciones lineales de E en F que son continuas: $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{H}(E,F) \cap \mathcal{C}(E,F)$. Luego $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, subespacio de $\mathcal{H}(E,F)$ y de $\mathcal{C}(E,F)$.

6.1. TEOREMA: Sean E y F espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Sea $f: E \to F$ una aplicación lineal. Entonces, las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) f es continua.

b) f es continua en un punto $a \in E$.

c) f es bornológica. (*)

d) f es lipschitziana.

e) f es uniformemente continua.

Demostr.: a) ⇒ b) | Trivial, pues si f es continua, es continua en todos y cada uno de los puntos de E.

b) ⇒ c) | Veamos primeramente que si f es continua en $a \in E$, en virtud de la aditividad de f, f es continua en 0. Se trata de ver que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \|x\| < \delta \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$.

Siendo f continua en $a \in E$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \|y - a\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(a)\| < \varepsilon$.

Sea $x \in E$ tal que $\|x\| < \delta$. Dado $x \in E$, existe $y \in E$ tal que $x = y - a$.

Entonces: $\|x\| < \delta \Rightarrow \|y - a\| < \delta \Rightarrow \|f(y) - f(a)\| = \|f(y-a)\| < \varepsilon \Rightarrow \|f(x)\| < \varepsilon$.

Probemos ahora que f es bornológica, es decir, que transforma acotados de E en acotados de F. Por definición, un conjunto es acotado si y sólo lo si está contenido en una bola. Se prueba fácilmente que un conjunto es acotado sii está contenido en una bola de centro 0. Es suficiente probar, entonces, que la imagen por f de una bola de centro 0 en E está contenida en una bola de centro 0 en F. Por hipótesis, f es continua en $a \in E$ y hemos probado que, entonces, f es continua en $0 \in E$. Esto implica que dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta_1 > 0 / \|x\| < \delta_1 \Rightarrow \|f(x)\| < 1$, o lo que es equivalente que $f(B(0,\delta_1)) \subset B(0,1)$.

Consideremos entonces la bola $B(0,r)$ en E. Dado $r>0, \exists \lambda > 0 / r = \lambda \delta_1$.

Probemos que $f(B(0,r)) \subset B(0,\lambda)$, con lo cual quedará probada esta implicación.

$[\forall x \in B(0,r) = B(0,\lambda\delta_1), \|x\| < \lambda \delta_1] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall x \in B(0,r), \|\frac{x}{\lambda}\| < \delta_1] \overset{(f \text{ continua})}{\Longrightarrow} [\forall x \in B(0,r), \|f(\frac{x}{\lambda})\| < 1] \overset{(f \text{ lineal})}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow [\forall x \in B(0,r), \|\frac{1}{\lambda} f(x)\| < 1] \Rightarrow [\forall x \in B(0,r), \frac{1}{|\lambda|}\|f(x)\| \overset{\lambda>0}{=} \frac{1}{\lambda}\|f(x)\| < 1] \Rightarrow$

$\Rightarrow [\forall x \in B(0,r), \|f(x)\| < \lambda] \Rightarrow [\forall x \in B(0,r), f(x) \in B(0,\lambda)]$.

Luego $f(B(0,r)) \subset B(0,\lambda)$.

c) $\Rightarrow$ d)| Se trata de probar que $\exists K > 0 / \|f(x) - f(y)\| \leq K \|x-y\|, \forall x,y \in E$, o lo que es equivalente, que $\exists K>0 / \|f(x-y)\| \leq K\|x-y\|, \forall x,y \in E$, o lo que es equivalente, que $\exists K>0 / \|f(z)\| \leq K\|z\|, \forall z \in E$.

Por hipótesis, f es bornológica. Luego:

$\exists K' > 0 / \ f(B(0,1)) \subset B(0,K')$ (I)

$\forall z \in E - \{0\}, \|z\| < 2\|z\|$, es decir, $\forall z \in E - \{0\}, z \in B(0, 2\|z\|)$: (II).

Del mismo modo que probamos anteriormente que si $f(B(0,\delta_1)) \subset B(0,1)$ entonces $f(B(0,\lambda\delta_1)) \subset B(0,\lambda \cdot 1)$ se prueba ahora a partir de (I) que $\forall z \in E - \{0\}, f(B(0,2\|z\|)) \subset B(0, 2K'\|z\|)$ (III)

De (II) y (III) deducimos que $\forall z \in E - \{0\}, f(z) \in B(0, 2K'\|z\|)$ o bien que $\forall z \in E - \{0\}, \|f(z)\| < 2K'\|z\|$. Luego $\forall z \in E, \|f(z)\| \leq 2K'\|z\|$.

Haciendo $K = 2K'$ queda probado que f es lipschitziana.

d) $\Rightarrow$ e)| Trivial, pues toda función lipschitziana entre dos espacios métricos es uniformemente continua.

e) $\Rightarrow$ a)| Trivial.

csqd.

Deducimos de aquí que una aplicación lineal $f: E \to F$ es continua (o bornológica) si y solo si $\exists K > 0 / \|f(x)\| \leq K\|x\|, \forall x \in E$ o lo que es equivalente, si es acotado el conjunto

$$\left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \in \mathbb{R} \ / \ x \in E - \{0\} \right\}$$

Según esta consideración podemos dotar a $\mathcal{L}(E,F)$ de una norma del si-

DEFINICION: Sea $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Llamamos norma de f en $\mathcal{L}(E,F)$ al ínfimo del conjunto de números reales no negativos K para los que se verifica que $\|f(x)\| \leq K\|x\|, \forall x \in E$.

Es decir $\|f\| = \inf\{K \geq 0 \,/\, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|\}$.

Evidentemente, a la vista de esta definición, tenemos que

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \in \mathbb{R} \,/\, x \in E - \{0\}\right\}$$

Veamos que, efectivamente, la aplicación $\|\ldots\|$ así definida es una norma en $\mathcal{L}(E,F)$:

i) $\|f\| = 0 \iff \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0 \iff \forall x \in E-\{0\}, \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0 \iff$

$\iff \forall x \in E, \|f(x)\| = 0 \iff \forall x \in E, f(x) = 0 \iff f = 0.$ (*)

ii) $\forall f, g \in \mathcal{L}(E,F)$, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

$$\|f+g\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)+g(x)\|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0}\left(\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|g(x)\|}{\|x\|}\right) \leq \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \sup_{x\neq 0}\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} =$$

$= \|f\| + \|g\|$.

iii) $\forall f \in \mathcal{L}(E,F), \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$

$$\|\lambda f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x\neq 0}\frac{|\lambda|\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x\neq 0}\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \cdot \|f\|. \quad (**)$$

6.2. TEOREMA: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Si F es completo (de Banach) entonces $\mathcal{L}(E,F)$, con la norma definida anteriormente, es completo.

Demostr.: Se trata de probar que toda sucesión $(f_n)_n$ de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$ es convergente en $\mathcal{L}(E,F)$.

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$, es decir, tal que

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \,/\, p, q > \nu \Rightarrow \|f_p - f_q\| < \varepsilon$ (I)

Probemos que $\forall x \in E - \{0\}$, $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en F.

Dado $x \in E-\{0\}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_x \in \mathbb{N} \,/\, p, q > \nu \Rightarrow \|f_p - f_q\| < \varepsilon/\|x\|$

Siendo $\|f_p - f_q\| = \sup_{z\neq 0} \frac{\|f_p(z) - f_q(z)\|}{\|z\|}$, si $\|f_p - f_q\| < \varepsilon/\|x\|$ se deduce

que $\frac{\|f_p(x) - f_q(x)\|}{\|x\|} < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$, y esto cualquiera

que sea $x \in E$ (si fuese $x = 0$, $f_p(x) = f_q(x) = 0$ y es trivial).

Luego $\forall x \in E$, $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en F.

Siendo F completo, toda sucesión de Cauchy en F es convergente

Por tanto, $\forall x \in E, \exists y_x \in F / (f_n(x))_n \xrightarrow{F} y_x$

Consideremos la aplicación:

$$f: E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto f(x) = y_x$$

• Probemos que $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

– f es lineal: $\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}, f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lim_n f_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) =$
$= \lim_n [\lambda_1 f_n(x_1) + \lambda_2 f_n(x_2)] = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$.

– f es continua: Probaremos que $\exists K \geq 0 / \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$.

De (I) y de la definición de la norma en $\mathcal{L}(E,F)$ deducimos que
$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p, q > \nu \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon \|x\|, \forall x \in E$. (II)

Fijado $q > \nu$, siendo la norma una aplicación continua, tenemos que:
$\lim_{p\to\infty} \|f_p(x) - f_q(x)\| = \|\lim_{p\to\infty} f_p(x) - f_q(x)\| = \|f(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \forall x \in E$.
esta última desigualdad, en virtud de (II).

Siendo $|\|f(x)\| - \|f_q(x)\|| \leq \|f(x) - f_q(x)\|$ se tiene que
$\|f(x)\| \leq \|f_q(x)\| + \|f(x) - f_q(x)\| \leq \|f_q(x)\| + \varepsilon\|x\|, \forall x \in E$. (III)

Por definición $\|f_q\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f_q(x)\|}{\|x\|}$, luego $\forall x \in E, \|f_q(x)\| \leq \|f_q\| \cdot \|x\|$.

Entonces, según (III): $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|f_q\| \cdot \|x\| + \varepsilon \cdot \|x\| = (\|f_q\| + \varepsilon) \cdot \|x\|$

Haciendo $K = \|f_q\| + \varepsilon$ queda probado que f es continua (*).

• Probemos, por último, que $f = \lim_n f_n$.

De (II) deducimos que, dado $q > \nu$, $\lim_{p\to\infty} \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \forall x \in E$

Por la continuidad de la norma en F, $\|\lim_{p\to\infty} f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \forall x \in E$

Luego $\|f(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \forall x \in E$, siempre que $q > \nu$. Luego:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / q > \nu \Rightarrow \|f - f_q\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x) - f_q(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$. c.s.q.d.

DEFINICIONES: DUALES ALGEBRAICO Y TOPOLOGICO DE UN ESPACIO NORMADO.

Sea E un espacio normado sobre $\mathbb{K}$.

a) Definimos el dual algebraico de E como el conjunto $E^* = \mathcal{H}(E, \mathbb{K})$ de las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{K}$. Los elementos de E^* se llaman funcionales lineales.

b) Definimos el dual topológico de E como el conjunto $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de las aplicaciones lineales continuas de E en $\mathbb{K}$.

Entonces $E' = E^* \cap \mathcal{C}(E, \mathbb{K})$, es decir, los elementos de E' son las funcionales lineales continuas. Del hecho de que $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es completo to, y en virtud del TEOREMA 6.2, deducimos el siguiente:

6.3. COROLARIO: El dual topológico de cualquier espacio normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es un espacio de Banach (espacio normado completo).

* NUEVA EXPRESION DE LA NORMA EN $\mathcal{L}(E,F)$.

Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$. La norma de una función f perteneciente a $\mathcal{L}(E,F)$ está definida por

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \,/\, x\neq 0\right\}$$

Veamos que $\left\{\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \,/\, x\neq 0\right\} = \left\{\|f(z)\| \,/\, \|z\|=1\right\}$

Por la homogeneidad de la norma y de f, tenemos que $\forall x\in E-\{0\}$, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \left\|\frac{1}{\|x\|}f(x)\right\| = \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\|$

Haciendo $z=\frac{x}{\|x\|}$, tenemos que $\|z\| = \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$.

Luego $\forall x\in E-\{0\}$, $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}\in\{\|f(z)\| \,/\, \|z\|=1\}$.

Análogamente, si $\|z\|=1$, $\|f(z)\| = \frac{\|f(z)\|}{\|z\|}$ y $z\neq 0$. Luego

$$\|f\| = \sup\{\|f(z)\|\in\mathbb{R} \,/\, \|z\|=1\}.$$

y también $\|f\| = \sup\{\|f(z)\|\in\mathbb{R} \,/\, \|z\|\leq 1\}$ (compruébese).

7. TEOREMA DE HAHN-BANACH

7.1. TEOREMA: (de Hahn-Banach).

Sea E un espacio normado real, y L un subespacio normado de E. Sea φ un funcional lineal continuo sobre L, es decir, $\varphi\in L'=\mathcal{L}(L;\mathbb{R})$. Entonces existe un funcional lineal continuo sobre E $\Phi\in E'=\mathcal{L}(E;\mathbb{R})$ tal que la restricción de Φ a L es φ y la norma de Φ en E' coincide con la norma de φ en L'.

Es decir, $\forall\varphi\in\mathcal{L}(L;\mathbb{R}), \exists\,\Phi\in\mathcal{L}(E;\mathbb{R}) \,/\, \Phi_{|L}=\varphi \;\wedge\; \|\Phi\|_{E'}=\|\varphi\|_{L'}$.

Demostr.: Supondremos que $L\neq E$; si fuese $L=E$ el teorema es trivial, pues bastaría hacer $\Phi=\varphi$.

a) Probemos primeramente que φ se puede prolongar al subespacio $L_1=L\oplus\langle y\rangle$, siendo $y\in E-L$, de modo que la norma del nuevo funcional lineal continuo obtenido en L_1 coincida con la norma de φ en L.

Siendo $L\neq E$, existe $y\in E-L$. Consideremos el subespacio de E siguiente: $L_1=L\oplus\langle y\rangle=\{x+\lambda y\in E \,/\, x\in L \wedge \lambda\in\mathbb{R}\}$

Toda prolongación φ_1 lineal de φ a L_1 es de la forma

$$\varphi_1(x+\lambda y) = \varphi_1(x) + \lambda\,\varphi_1(y) = \varphi(x) + \lambda\,\varphi_1(y)$$

Para cada elección de $\varphi_1(y) \in \mathbb{R}$ obtenemos una prolongación de φ a L_1 y solo una. Queremos que φ_1 tenga la misma norma que φ.
Veamos que podemos elegir $c = \varphi_1(y) \in \mathbb{R}$ de modo que $\|\varphi_1\| = \|\varphi\|$.
Por definición de la norma en L_1':

$$\|\varphi_1\| = \sup_{x\in L, \lambda\in\mathbb{R}, x+\lambda y\neq 0} \frac{|\varphi_1(x+\lambda y)|}{\|x+\lambda y\|} = \sup_{\substack{x\in L\\ \lambda\in\mathbb{R}, x+\lambda y\neq 0}} \frac{|\varphi(x)+\lambda c|}{\|x+\lambda y\|}$$

Siendo $\varphi = \varphi_1/_L$ se verifica, trivialmente, que $\|\varphi\| \leq \|\varphi_1\|$
Se trata de hallar $c\in\mathbb{R}$ tal que $\|\varphi_1\| = \|\varphi\|$, o bien, tal que $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\|$, pues de verificarse esto, como $\|\varphi\| \leq \|\varphi_1\|$, quedará probado que $\|\varphi_1\| = \|\varphi\|$.
Si ha de ser $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\|$ tendremos que:

$$\forall x\in L,\ \forall \lambda\in\mathbb{R},\ x+\lambda y\neq 0 \Rightarrow \frac{|\varphi(x)+\lambda c|}{\|x+\lambda y\|} \leq \|\varphi\|$$

Si $\lambda = 0$, $x+\lambda y = x \in L$ y, por definición de $\|\varphi\|$, $\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leq \|\varphi\|$.
Supongamos, entonces, que $\lambda \neq 0$. Se verifica en consecuencia que:

$$\|\varphi_1\| = \sup_{z+\lambda y\neq 0} \frac{|\varphi(z)+\lambda c|}{\|z+\lambda y\|} = \sup_{z+\lambda y\neq 0} \frac{|\varphi(\frac{z}{\lambda})+c|}{\|\frac{z}{\lambda}+y\|} = \sup_{x\in L} \frac{|\varphi(x)+c|}{\|x+y\|}, \quad x+y\neq 0, \text{ pues } y\notin L.$$

Exigiendo que $\|\varphi_1\| \leq \|\varphi\|$ tenemos que $\forall x\in L$, $\frac{|\varphi(x)+c|}{\|x+y\|} \leq \|\varphi\|$

o bien: $-\|\varphi\|\cdot\|x+y\| \leq \varphi(x)+c \leq \|\varphi\|\cdot\|x+y\|$, $\forall x\in L$, o lo que es equivalente

$$-\|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x) \leq c \leq \|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x), \ \forall x\in L. \quad (I)$$

Vamos a garantizar a continuación que existe $c\in\mathbb{R}$ que verifica la acotación anterior cualquiera que sea $x\in L$; es decir, habrá que ver que

$$\bigcap_{x\in L} [-\|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x),\ \|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x)] \neq \emptyset$$

o lo que es equivalente, que $\sup_{x\in L}(-\|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x)) \leq \inf_{x\in L}(\|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x))$

o lo que es equivalente, que $\forall x,x'\in L$, $-\|\varphi\|\cdot\|x+y\| - \varphi(x) \leq \|\varphi\|\cdot\|x'+y\| - \varphi(x')$.
o bien, que $\forall x,x'\in L$, $\varphi(x')-\varphi(x) \leq \|\varphi\|\cdot\|x'+y\| + \|\varphi\|\cdot\|x+y\|$
o bien, que $\forall x,x'\in L$, $\varphi(x'-x) \leq \|\varphi\|(\|x'+y\| + \|x+y\|)$.
Por definición de $\|\varphi\|$ se verifica que $\forall x,x'\in L$, $\varphi(x'-x) \leq \|\varphi\|\cdot\|x'-x\|$
Pero $\|x'-x\| = \|x'+y-y-x\| = \|(x'+y)-(x+y)\| \leq \|x'+y\| + \|x+y\|$.
Luego $\forall x,x'\in L$, $\varphi(x'-x) \leq \|\varphi\|\,\|x'-x\| \leq \|\varphi\|(\|x'+y\| + \|x+y\|)$
como queríamos probar. Luego existe $c\in\mathbb{R}$ verificando (I) y, por tanto, existe un funcional lineal continuo φ_1 sobre L_1 que prolonga a φ y tiene la misma norma que él.
Si E fuese de dimensión finita o numerable, el teorema se de-
mostraría por el método de inducción. Para demostrarlo en el caso

general utilizaremos el LEMA DE ZORN. (*)

b) Consideremos el conjunto $\mathcal{A}$ de los pares (Ψ, M) tales que M es un subespacio de E que contiene a L y Ψ es un elemento de $M' = \mathcal{L}(M;\mathbb{R})$ tal que $\Psi/_L = \varphi$ y $\|\Psi\|_{M'} = \|\varphi\|_{L'}$.

Evidentemente, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pues $(\varphi, L) \in \mathcal{A}$.

Definimos en $\mathcal{A}$ un orden $\angle$ del siguiente modo:

$$(\Psi_1, M_1) \angle (\Psi_2, M_2) \overset{\text{def}}{\iff} (M_1 \subset M_2 \ \text{ y } \ \Psi_2/_{M_1} = \Psi_1 \ \text{y} \ \|\Psi_2\|_{M_2'} = \|\Psi_1\|_{M_1'})$$

Fácilmente se comprueba que, efectivamente, $\angle$ es un orden en $\mathcal{A}$.

Probemos que toda cadena Σ en $\mathcal{A}$ tiene cota superior.

Sea $\Sigma = \{(\Psi_i, M_i) / i \in I\}$ una cadena en $\mathcal{A}$.

Consideremos el par $(\Psi, M) \in \mathcal{A}$, siendo $M = \bigcup_{i\in I} M_i$ y Ψ un funcional lineal continuo sobre M definido por: $\forall x \in M$, $\Psi(x) = \Psi_i(x)$ si $x \in M_i$.

Veamos que (Ψ, M) está bien definido:

- M es un subespacio de E que contiene a L: Que $M \supset L$ es trivial pues $M = \bigcup_{i\in I} M_i$ y $M_i \supset L$, $\forall i \in I$. Además, dados $x, y \in M$, existen $i_x, i_y \in I$ tales que $x \in M_{i_x}$ e $y \in M_{i_y}$. Siendo Σ una cadena se tiene que $M_{i_x} \subset M_{i_y}$ ó $M_{i_y} \subset M_{i_x}$. Entonces, como M_{i_x} y M_{i_y} son subespacios de E, se tiene que $x+y \in M_{i_y}$ ó $x+y \in M_{i_x}$, respectivamente. En cualquier caso, $x+y \in M$. Análogamente, $\forall x \in M$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x \in M$.
- Del mismo modo se prueba que Ψ es, en efecto, un elemento de M', y que verifica que $\Psi/_L = \varphi$ y $\|\Psi\|_{M'} = \|\varphi\|_{L'}$ (*)

Entonces, en virtud del LEMA DE ZORN, existe en $\mathcal{A}$ un elemento maximal (Φ, F). Si fuese $F \neq E$, existiría en E un elemento y que no pertenece a F, y entonces, de acuerdo con lo probado en el apartado a), podríamos extender Φ a $F \oplus \langle y \rangle$ conservando la norma, con lo cual (Φ, F) no sería maximal en $\mathcal{A}$. Por tanto, debe ser $F = E$, y Φ es un funcional lineal continuo sobre E que verifica que $\Phi/_L = \varphi$ y $\|\Phi\|_{E'} = \|\varphi\|_{L'}$, pues $(\Phi, F) \in \mathcal{A}$. csqd

* De este teorema se deduce un teorema análogo en el caso de que E sea un espacio normado complejo.

* Vamos a obtener a continuación un corolario del teorema de Hahn-Banach muy importante.

(*) Fácilmente se prueba que Ψ es un funcional lineal sobre M. Veamos que es continuo. Ψ es continuo si y sólo si $\exists K \geq 0 / |\Psi(x)| \leq K\|x\|$, $\forall x \in M$. Sea $K = \|\varphi\|_{L'}$. Entonces, $\forall x \in M$, $\exists i \in I / x \in M_i$. Luego $|\Psi(x)| = |\Psi_i(x)| \leq \|\Psi_i\| \cdot \|x\| = \|\varphi\|_{L'} \|x\|$.

(*) LEMA DE ZORN: Sea A un conjunto no vacío ordenado. Si toda cadena (parte to-

7.2. COROLARIO: Sea E un espacio normado real y x_0 un punto de E distinto de 0. Entonces existe $\phi \in E' - \{0\}$ tal que

$$\phi(x_0) = \|\phi\| \cdot \|x_0\|$$

Demostr.: Consideremos la aplicación

$$\varphi : L = \langle x_0 \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda x_0 \longmapsto \lambda \cdot \|x_0\|$$

Trivialmente, $\varphi \in L' = \mathcal{L}(L;\mathbb{R})$ (*)

Entonces, dado $\varphi \in L'$, por el teorema de Hahn-Banach existe $\phi \in E'$ tal que $\phi|_{\langle x_0\rangle} = \varphi$ y $\|\phi\| = \|\varphi\|$ (I)

Por definición $\|\varphi\| = \sup\limits_{\substack{z \in \langle x_0\rangle \\ z \neq 0}} \dfrac{|\varphi(z)|}{\|z\|} = \sup\limits_{\lambda \neq 0} \dfrac{|\varphi(\lambda x_0)|}{\|\lambda x_0\|} = \sup\limits_{\lambda \neq 0} \dfrac{|\lambda \varphi(x_0)|}{|\lambda| \cdot \|x_0\|} =$

$$= \sup_{\lambda \neq 0} \frac{|\lambda| \cdot |\varphi(x_0)|}{|\lambda| \cdot \|x_0\|} = \frac{|\varphi(x_0)|}{\|x_0\|}$$

Luego $|\varphi(x_0)| = \|\varphi\| \cdot \|x_0\|$

Pero $\phi(x_0) = \varphi(x_0)$ y $\|\phi\| = \|\varphi\|$ según (I). Luego:

$$|\phi(x_0)| = \|\phi\| \cdot \|x_0\|$$

Si $\phi(x_0) \geq 0$ queda probado el corolario; si $\phi(x_0) \leq 0$ definimos $\phi_1(x) = -\phi(x)$, $\forall x \in E$. Entonces, trivialmente, $\phi_1 \in \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = E'$ y $\|\phi_1\| = \|\phi\|$ y se verificaría: $\phi_1(x_0) = \|\phi_1\| \cdot \|x_0\|$, con $\phi_1 \in E' - \{0\}$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: ① Siempre se verifica que $\forall \phi \in E'$, $\forall x \in E$, $\phi(x) \leq \|\phi\| \cdot \|x\|$. Este corolario nos asegura que dado un punto $x_0 \in E - \{0\}$, existe un funcional lineal continuo $\phi \in E' - \{0\}$, tal que ϕ "alcanza la norma" en x_0. Obsérvese que no siempre es cierto que dado un funcional lineal continuo ϕ sobre E, exista un punto x_0 en el que ϕ alcance la norma. Cuando esto ocurra podremos sustituir en la definición de $\|\phi\|$ la palabra supremo por la de máximo.

② INTERPRETACION GEOMETRICA: Recordemos que si E es un espacio vectorial real, $H \subset E$ es un hiperplano de E (variedad lineal maximal de E) si y solo si existen $\varphi \in E^* = \mathcal{H}(E;\mathbb{R})$ y $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$H = \{x \in E \,/\, \varphi(x) = a\}$$

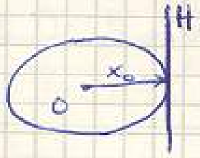
Recordemos también que un hiperplano homogéneo es un hiperplano pasando por 0 y corresponde a $a = 0$. Es decir, los hiperplanos homogéneos son los núcleos de funcionales lineales.

Un hiperplano H divide a E en dos semiespacios:

$$\{x \in E \,/\, \varphi(x) \geq a\} \quad \text{y} \quad \{x \in E \,/\, \varphi(x) \leq a\}.$$

En el caso de que E sea espacio normado se verifica que "[illegible] $H = \{x \in E \,/\, \varphi(x) = a\}$ es cerrado si y solo si φ es continuo":

Sea, entonces, $x_0 \in E - \{0\}$ y $\varphi \in E' - \{0\}$ tal que $\varphi(x_0) = \|\varphi\| \cdot \|x_0\|$.
Se prueba que la bola $B[0, \|x_0\|]$ está contenida en el semiespacio $\{x \in E / \varphi(x) \leq \|\varphi\| \cdot \|x_0\|\}$, trivialmente, pues si $x \in B[0, \|x_0\|]$, $\|x\| \leq \|x_0\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(x) \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_0\|$.



Se dice, por esto, que H soporta al conjunto $B[0, \|x_0\|]$, siendo $H = \{x \in E / \varphi(x) = \|\varphi\| \cdot \|x_0\|\}$, un hiperplano cerrado.
Entonces, el problema de encontrar un funcional lineal que alcance la norma en x_0 se reduce, geométricamente, a encontrar un hiperplano cerrado que soporta a la bola $B[0, \|x_0\|]$.

8. Funciones de variación acotada. INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES. (*)

① FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA. Sea $I = [a,b]$ un intervalo compacto en $\mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{P}([a,b])$ el conjunto de las particiones de $[a,b]$. Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $P \in \mathcal{P}([a,b])$ definimos la variación de f con respecto a P como el número real positivo

$$V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \qquad \text{siendo } P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}.$$

Decimos que $f \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ es una función de variación acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $V_f(P) \leq M$, $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$. Si f es una función de variación acotada en $[a,b]$ se define la variación total de f en $[a,b]$ como

$$V_a^b(f) = \sup\{V_f(P) / P \in \mathcal{P}([a,b])\}.$$

Recordemos que toda función monótona es de variación acotada. Del mismo modo, toda función continua en $[a,b]$ y con derivada acotada en $]a,b[$ es de variación acotada en $[a,b]$.

Sabemos que la suma de dos funciones de variación acotada en I es de variación acotada. Además, el producto de una función de variación acotada en I por un escalar es de variación acotada en I. Luego, el conjunto $BV(I)$ de las funciones de variación acotada en I tiene estructura de espacio vectorial, subespacio del espacio vectorial de las funciones acotadas en I (recordemos que toda función de variación acotada es acotada). Denotamos por $B_\infty(I)$ el espacio vectorial de las funciones acotadas en I con la norma del infinito.

② INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES. La integral de Riemann-Stieltjes es una generalización del concepto de integral de Riemann en el intervalo $[a,b]$.
Sean f y α dos funciones reales definidas y acotadas en $[a,b]$ y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Notaremos por $\Delta\alpha_k$ la

diferencia $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$. Sea, para cada $k \in \{1, \dots, n\}$ t_k un punto de $[x_{k-1}, x_k]$. Una suma de la forma

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\, \Delta\alpha_k$$

se llama una suma de Riemann-Stieltjes de f respecto de α. Diremos que f es Riemann-integrable respecto de α en $[a,b]$, y escribiremos "$f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$", si existe un número A que satisface la siguiente propiedad:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P_\varepsilon \in \mathcal{P}([a,b])$ / $P \supset P_\varepsilon \Rightarrow |S(P,f,\alpha) - A| < \varepsilon$, independientemente de la elección de los puntos $\{t_k\}_{k=1}^{n}$.

Cuando existe dicho número A, es único y se represente por $\int_a^b f\, d\alpha$ o $\int_a^b f(x)\, d\alpha(x)$. Las funciones f y α se llaman, respectivamente, integrando e integrador. En el caso particular de que $\alpha(x) = x$, $\forall x \in I$, escribiremos $S(P,f)$ en vez de $S(P,f,\alpha)$. La integral de Riemann-Stieltjes se reduce entonces a la integral de Riemann.

La integral opera de forma lineal tanto sobre el integrando como sobre el integrador, es decir:

a) Si $f, g \in R(\alpha)$ en $[a,b]$, para todo $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 f + c_2 g \in R(\alpha)$ y se tiene

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)\, d\alpha = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b g\, d\alpha$$

b) Si $f \in R(\alpha)$ y $f \in R(\beta)$ entonces, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $f \in R(c_1\alpha + c_2\beta)$ y se tiene que $\int_a^b f\, d(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 \int_a^b f\, d\alpha + c_2 \int_a^b f\, d\beta$.

La integral de Riemann-Stieltjes se reduce a una integral de Riemann si α admite derivada continua en $[a,b]$; en este caso existe $\int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx$ y se verifica que:

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx.$$

Una condición suficiente para la existencia de la integral de Riemann-Stieltjes es: "Si f es una función continua en $[a,b]$ y α una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces f es integrable respecto de α en $[a,b]$ en el sentido de Riemann-Stieltjes, es decir, $f \in R(\alpha)$."

9. Funcionales lineales continuos en $C_\infty(I)$: Teorema de Riesz.

Sea $I = [a,b]$ un intervalo compacto de la recta real y $C_\infty(I)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en I dotado con la norma infinito: $\forall f \in C_\infty(I)$, $\|f\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x)|$. Estudiamos como son los funcionales lineales continuos sobre $C_\infty(I)$, es decir, cómo son los elementos del dual topológico de $C_\infty(I)$. Veamos ahora un teorema, llamado de Riesz, de gran trascendencia que caracteriza los funcionales lineales contimos en $C_\infty(I)$.

9.1. TEOREMA: (DE RIESZ)

Una aplicación $\varphi: C_\infty(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, es decir, pertenece a $C_\infty(I)'$, si y solo si existe una función g de variación acotada en I tal que,

$$\forall f \in C(I), \quad \varphi(f) = \int_a^b f\, dg .$$

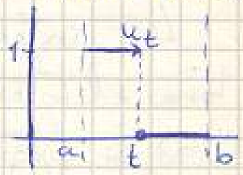
Además se verifica que $\|\varphi\| = V_a^b(g)$ (en la condición necesaria).

Demostración: • Condición necesaria: Hemos denotado por $B_\infty(I)$ el espacio normado de las funciones acotadas en I, donde la norma está definida por: $\|h\|_\infty = \sup_{x\in I} |h(x)|$. $C_\infty(I)$ es un subespacio normado de $B_\infty(I)$.

Sea φ un funcional lineal continuo en $C_\infty(I)$; entonces, φ se puede prolongar a un funcional lineal continuo ϕ sobre $B_\infty(I)$ de modo que $\phi|_{C_\infty(I)} = \varphi$ y $\|\phi\| = \|\varphi\|$, en virtud del teorema de Hahn-Banach.

Definimos, para cada $t \in [a,b]$ la función:

$$u_t : x \in I \longmapsto u_t(x) = \begin{cases} =1 & \text{si } a \le x < t \\ =0 & \text{si } t \le x \le b \end{cases} \quad (1)$$



Evidentemente, $\forall t \in [a,b]$, $u_t \in B_\infty(I)$ y ϕ está definida para u_t.

Construimos entonces la función

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto g(t) = \phi(u_t)$$

Veamos que g es la función que buscamos.

① g es de variación acotada: Sea $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$, y sea, para cada $i \in \{1,\dots,n\}$, $\delta_i = \operatorname{sgn}(g(t_i) - g(t_{i-1}))$ (*)

Entonces, la variación de g con respecto a P es:

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n [g(t_i) - g(t_{i-1})]\,\delta_i$$

Pero $g(t_i) = \phi(u_{t_i})$; luego:

$$\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n [\phi(u_{t_i}) - \phi(u_{t_{i-1}})]\delta_i = \phi\Big[\sum_{i=1}^n (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\delta_i\Big]$$

esta última igualdad en virtud de la linealidad de ϕ. Por definición de norma de ϕ en $B_\infty(I)$ tenemos que: $\phi\big[\sum_{i=1}^n (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\delta_i\big] \le \|\phi\| \cdot \|\sum_{i=1}^n (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\delta_i\|$

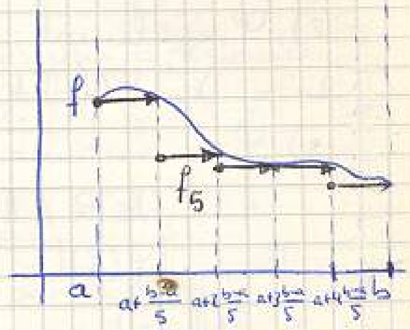
Pero la función $\sum_{i=1}^n (u_{t_i} - u_{t_{i-1}})\delta_i$ toma solamente los valores ± 1 y 0 según la definición de u_t; luego su norma es 1 (en $B_\infty(I)$).

Por tanto $\sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \le \|\phi\| = \|\varphi\|$. Como esto se verifica

cualquiera que sea $P \in \mathcal{P}([a,b])$ se tiene que $V_a^b(g) \leq \|\varphi\|$. (1')
Por tanto, $g \in BV(I)$, es decir, g es de variación acotada en I.

② $\forall f \in C(I)$, $\varphi(f) = \int_a^b f\,dg$.

Sea f una función continua cualquiera en I.
Para cada natural n consideramos la función:



$$f_n = \sum_{r=1}^{n} f\left(a + r\frac{b-a}{n}\right)\left[u_{a+r\frac{b-a}{n}} - u_{a+(r-1)\frac{b-a}{n}}\right] \quad (2)$$

donde u_t está definida como en (1); f_n es una función escalonada definida en $[a,b]$, intervalo que hemos dividido en n partes iguales, $[a,b] = \bigcup_{r=1}^{n}\left[a+(r-1)\frac{b-a}{n}, a+r\frac{b-a}{n}\right]$, y f_n vale $f\left(a+r\frac{b-a}{n}\right)$ en el intervalo $\left[a+(r-1)\frac{b-a}{n}, a+r\frac{b-a}{n}\right]$ ya que si x pertenece a dicho intervalo, $u_{a+r\frac{b-a}{n}}(x) = 1$ y $u_{a+(r-1)\frac{b-a}{n}}(x) = 0$, y si x no pertenece a dicho intervalo, $u_{a+r\frac{b-a}{n}}(x)$ y $u_{a+(r-1)\frac{b-a}{n}}(x)$ valen lo mismo (1 ó 0) y, por tanto, se anula el correspondiente sumando en (2).

Se prueba fácilmente que $(f_n)_n$ converge hacia f en $B_\infty(I)$.
Siendo ϕ una aplicación continua de $B_\infty(I)$ en $\mathbb{R}$ se verifica que

$$(\phi(f_n))_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \phi(f) \qquad (3)$$

Pero $\phi(f_n) = \phi\left(\sum_{r=1}^{n} f\left(a+r\frac{b-a}{n}\right)\left[u_{a+r\frac{b-a}{n}} - u_{a+(r-1)\frac{b-a}{n}}\right]\right) =$

$$= \sum_{r=1}^{n} f\left(a+r\frac{b-a}{n}\right)\left[g\left(a+r\frac{b-a}{n}\right) - g\left(a+(r-1)\frac{b-a}{n}\right)\right] \qquad (4)$$

en virtud de la linealidad de ϕ y de la definición de g. Siendo (4) la suma de Riemann-Stieltjes de f relativa a g respecto de la partición $P_n = \{a, a+\frac{b-a}{n}, \dots, a+r\frac{b-a}{n}, \dots, a+(n-1)\frac{b-a}{n}, b\}$ y esta suma converge hacia $\int_a^b f\,dg$ (*) cuando n tiende a infinito, se deduce de (3) y (4) que $|\phi(f) - \int_a^b f\,dg|$ se puede hacer tan pequeño como se desee con solo tomar n suficientemente grande.

Luego $\phi(f) = \int_a^b f\,dg$. Como $f \in C_\infty(I)$ y $\phi_{|C_\infty(I)} = \varphi$ se deduce que $\phi(f) = \varphi(f)$, y, por tanto, $\varphi(f) = \int_a^b f\,dg$.

Además, $|\varphi(f)| = \left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \int_a^b |f|\cdot|dg| \leq \|f\|_\infty \int_a^b |dg| = \|f\|_\infty \cdot V_a^b(g)$.

Como $\|\varphi\|$ es el menor número real K que verifica que $|\varphi(f)| \leq K\cdot\|f\|_\infty$ se verifica que $\|\varphi\| \leq V_a^b(g)$. (2')

De (1') y (2') deducimos que $\|\varphi\| = V_a^b(g)$.

- <u>Condición suficiente</u>: Sea g una función de variación acotada en I. Se trata de ver que la aplicación $\varphi: f \in C_\infty(I) \longmapsto \varphi(f) = \int_a^b f\,dg \in \mathbb{R}$

es un funcional lineal continuo en $C_\infty(I)$.

1) φ está bien definida, pues si f es continua y $g \in BV(I)$, existe $\int_a^b f\,dg$

2) φ es lineal: $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,dg =$
$= \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2)$, por la linealidad de la integral de Riemann-Stieltjes.

3) φ es continua: φ es continua si y solo si es acotado el conjunto $\{|\varphi(f)| \in \mathbb{R} \;/\; \|f\|_\infty = 1\}$.

Pero $|\varphi(f)| = \left|\int_a^b f\,dg\right| \leq \int_a^b |f|\,|dg| \leq \int_a^b \|f\|_\infty\,|dg| = \int_a^b |dg| = V_a^b(g)$ si $\|f\|_\infty = 1$.

Luego φ es continua y se verifica, además que, $\|\varphi\| \leq V_a^b(g)$, pues $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(f)| \in \mathbb{R} \;/\; \|f\|_\infty = 1\}$ y $V_a^b(g)$ es una cota superior de dicho conjunto, como queríamos probar. ∎

Observación: En la condición suficiente del teorema anterior hemos probado que, siendo g una función de variación acotada cualquiera en el intervalo $I=[a,b]$, la aplicación

$$\varphi: f \in C(I) \longmapsto \int_a^b f\,dg \in \mathbb{R}$$

es un funcional lineal continuo en $C_\infty(I)$. Se prueba, además, que si dos funciones g_1 y g_2 coinciden en todos los puntos del intervalo I, excepto, quizás, en los puntos de un conjunto numerable, entonces determinan una misma funcional lineal; recíprocamente, si g_1 y g_2 determinan una misma funcional lineal en $C_\infty(I)$, esto es, si

$$\int_a^b f\,dg_1 = \int_a^b f\,dg_2, \quad \forall f \in C(I)$$

entonces, g_1 y g_2 coinciden en todos los puntos excepto, posiblemente, los de un conjunto finito o numerable.

Existe, entonces, una biyección entre los funcionales lineales de $C_\infty(I)$ y las clases de funciones de variación acotada que verifican la condición $g(a)=0$, perteneciendo dos funciones a una misma clase cuando coinciden en sus puntos de continuidad (es decir, todos excepto posiblemente los de un conjunto finito o numerable).

Para una función g cualquiera de la clase correspondiente a $\varphi \in C_\infty(I)'$ se cumple, según hemos visto, la desigualdad:

$$\|\varphi\| \leq V_a^b(g)$$

La igualdad puede no tener lugar; pero, como se desprende de la demostración del teorema, en cada una de estas clases existe al menos una función para la cual esta igualdad se alcanza.

10. Isomorfismos entre espacios normados

Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Consideremos el espacio $\mathcal{L}(E;F)$ dotado de la norma $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Decimos que f es un isomorfismo de E en F, y escribiremos $f \in \mathcal{I}(E,F)$, si f es una aplicación lineal de E en F biyectiva y bicontinua, es decir, tal que f y f^{-1} son continuas, es decir:

$$\mathcal{I}(E;F) = \{ f \in \mathcal{L}(E,F) \,/\, f \text{ biyectiva y bicontinua} \}.$$

o también, los isomorfismos entre espacios normados son los isomorfismos algebraicos bicontinuos.

El conjunto $\mathcal{I}(E;F)$ puede se vacío; basta que E y F sean de dimensión finita y $\dim E \neq \dim F$.

$\mathcal{I}(E;F)$ no es subespacio vectorial de $\mathcal{L}(E;F)$, pues el 0 no es un isomorfismo de E en F, salvo que E y F sean iguales a $\{0\}$.

Recordemos de TOPOLOGIA I el teorema del punto fijo de Banach:

10.1. Lema: (Teorema del punto fijo de Banach).

> Sea M un espacio métrico completo y $f: M \to M$ una aplicación contractiva.
> Entonces existe un único punto $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) = x_0$. Además $x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$, siendo (x_n) una sucesión tal que $x_1 \in M$ y $f(x_{n-1}) = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$

Veamos otro lema antes de enunciar y probar un teorema muy importante.

10.2. Lema: Sean E y F espacios normados sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.

> a) Si $f \in \mathcal{I}(E;F)$ se verifican las desigualdades siguientes:
> $$\forall x \in E, \quad \|f^{-1}\|^{-1} \|x\| \overset{(1)}{\leq} \|f(x)\| \overset{(2)}{\leq} \|f\| \cdot \|x\|$$
> y los números $\|f^{-1}\|^{-1}$ y $\|f\|$ son "inmejorables" en el sentido de que $\|f^{-1}\|^{-1}$ es el mayor número real que verifica la desigualdad (1) y $\|f\|$ el menor número real que verifica la desigualdad (2).
>
> b) Si $f \in \mathcal{I}(E;F)$ y $h \in \mathcal{L}(E;F)$ se verifican las desigualdades
> $$[\, \|f^{-1}\|^{-1} - \|h\| \,] \cdot \|x\| \leq \|(f+h)(x)\| \leq [\, \|f\| + \|h\| \,] \|x\|, \quad \forall x \in E.$$
>
> c) Si $g \in \mathcal{H}(E;F)$ y existe $a > 0$ tal que $\forall x \in E$, $a\|x\| \leq \|g(x)\|$, entonces g es inyectiva y $g^{-1}: g(E) \to E$ es continua.

Demostr.: a) Que $\|f(x)\| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in E$ y que $\|f\|$ es el menor número real que lo verifica es consecuencia inmediata de la definición de $\|f\|$.
Además $\forall x \in E$, $\|x\| = \|f^{-1}(f(x))\| \leq \|f^{-1}\| \cdot \|f(x)\|$ y $\|f^{-1}\|$ es el menor número que verifica esto. Luego, como $\|f^{-1}\| \neq 0$ pues $f^{-1} \in \mathcal{I}(F,E)$ y $0 \notin \mathcal{I}(E,F)$

se tiene que $\forall x \in E$, $\|f^{-1}\|^{-1} \cdot \|x\| \leq \|f(x)\|$, siendo $\|f^{-1}\|^{-1}$ el mayor número real que verifica esto; (si existiese $K > \|f^{-1}\|^{-1}$ tal que $K\|x\| \leq \|f(x)\| \Rightarrow$ $\Rightarrow \|x\| \leq K^{-1}\|f(x)\|$ con $K^{-1} < \|f^{-1}\|$, en contra de que $\|f^{-1}\|$ era el menor número real c que verificaba que $\|x\| \leq c\,\|f(x)\|$).

b) De un lado, según a), $\forall x \in E$, $\|f^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|f(x)\|$. De otro, por definición de $\|h\|$, $\forall x \in E$, $\|h(x)\| \leq \|h\| \cdot \|x\|$ o bien, $\forall x \in E$, $-\|h\| \cdot \|x\| \leq -\|h(x)\|$

Luego: $\|f^{-1}\|^{-1}\|x\| - \|h\| \cdot \|x\| \leq \|f(x)\| - \|h(x)\|$, $\forall x \in E$.

Pero $\|f(x)\| - \|h(x)\| \leq \|(f+h)(x)\|$, $\forall x \in E$. Luego:

$\forall x \in E$, $[\|f^{-1}\|^{-1} - \|h\|] \cdot \|x\| \leq \|(f+h)(x)\|$

Además $\forall x \in E$, $\|(f+h)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|h(x)\| \leq [\|f\| + \|h\|]\,\|x\|$.

c) - g es inyectiva: Probemos que $\operatorname{Ker} g = \{0\}$

$\forall x \in \operatorname{Ker} g$, $g(x) = 0$; siendo $\|g(x)\| \geq a\|x\|$, se tiene que $a\|x\| = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 0$. Luego $\operatorname{Ker} g = \{0\}$.

- g^{-1} es continua: Siendo g inyectiva $g^{-1}: g(E) \longrightarrow E$ es biyectiva.

Además g^{-1} es isomorfismo algebraico, pues $\forall y_1, y_2 \in g(E)$, $\exists x_1, x_2 \in E$ tales que $g(x_1) = y_1$ y $g(x_2) = y_2$.

Entonces, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, $g^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = g^{-1}(\lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2)) =$
$= g^{-1}(g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 g^{-1}(y_1) + \lambda_2 g^{-1}(y_2)$.

Se trata de probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{y_1, y_2 \in g(E)}{\|y_1 - y_2\| < \delta} \Rightarrow \|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| < \varepsilon.$$

Como $\|g^{-1}(y_1) - g^{-1}(y_2)\| = \|g^{-1}(y_1 - y_2)\|$, es suficiente ver que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{y \in g(E)}{\|y\| < \delta} \Rightarrow \|g^{-1}(y)\| < \varepsilon$$

Si $y \in g(E)$, $\exists x \in E \,/\, y = g(x)$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon \cdot a$. Entonces:

$\|y\| < \delta \Rightarrow \|g(x)\| < \delta \Rightarrow a\|x\| < \delta \Rightarrow \|x\| < \frac{\delta}{a} = \varepsilon \Rightarrow \|g^{-1}(y)\| < \varepsilon$.

Luego g^{-1} es continua. csqd.

10.3. TEOREMA: Si E y F son espacios de Banach (normados y completos), entonces $\mathcal{I}(E;F)$ es un abierto de $\mathcal{L}(E,F)$. Además, la aplicación $\Phi: f \in \mathcal{I}(E,F) \longmapsto f^{-1} \in \mathcal{I}(E,F)$ es continua. (*)

Demostr.: • Probemos que $\forall f \in \mathcal{I}(E;F)$, $B(f, \|f^{-1}\|^{-1}) \subset \mathcal{I}(E,F)$, es decir que si $g \in \mathcal{L}(E;F)$ verifica que $\|f - g\| < \|f^{-1}\|^{-1}$, entonces $g \in \mathcal{I}(E,F)$.

O lo que es equivalente, que si $\|h\| < \|f^{-1}\|^{-1}$ con $h \in \mathcal{L}(E,F)$, entonces $f + h \in \mathcal{I}(E,F)$ (pues $B(f, \|f^{-1}\|^{-1}) = f + B(0, \|f^{-1}\|^{-1})$).

Como $f, h \in \mathcal{L}(E,F)$, $f+h \in \mathcal{L}(E,F)$. Queda ver que $f+h$ es biyectiva y $(f+h)^{-1}$ es continua.

Si $\|h\| < \|f^{-1}\|^{-1} \Rightarrow a = \|f^{-1}\|^{-1} - \|h\| > 0$. Como $f \in \mathcal{I}(E,F)$ y $h \in \mathcal{L}(E,F)$ según Lema 10.2, $[\|f^{-1}\|^{-1} - \|h\|]\,\|x\| \leq \|(f+h)(x)\|$, $\forall x \in E$, es decir $\forall x \in E$, $a\|x\| \leq \|(f+h)(x)\|$, con $a>0$; entonces, según el mismo lema, aptdo c), $f+h$ es inyectiva y $(f+h)^{-1}$ es continua.

Veamos que $f+h$ es sobre y quedará visto que $B(f, \|f^{-1}\|^{-1}) \subset \mathcal{I}(E,F)$ y, por tanto, que $\mathcal{I}(E,F)$ es abierto. Hay que ver que

$$\forall y_0 \in F, \exists x_0 \in E \,/\, (f+h)(x_0) = y_0.$$

Sea $y_0 \in F$; consideremos la aplicación $\varphi: x \in E \longmapsto f^{-1}[y_0 - h(x)] \in E$.

φ está bien definida pues $\forall x \in E$, $y_0 - h(x) \in F \Rightarrow f^{-1}[y_0 - h(x)] \in E$ pues f^{-1} es una aplicación de F en E ya que f es biyectiva.

Veamos que φ es contractiva, es decir, que $\exists K \in [0,1[\,/\, \|\varphi(x) - \varphi(x')\| \leq K\|x - x'\|, \forall x, x' \in E$.

$$\|\varphi(x) - \varphi(x')\| = \|f^{-1}[y_0 - h(x)] - f^{-1}[y_0 - h(x')]\| =$$
$$= \|f^{-1}[(y_0 - h(x)) - (y_0 - h(x'))]\| = \|f^{-1}(h(x') - h(x))\| = \|f^{-1}(h(x' - x))\| \leq$$
$$\leq \|f^{-1}\|\,\|h(x'-x)\| \leq \|f^{-1}\| \cdot \|h\| \cdot \|x' - x\|$$

Sea $K = \|f^{-1}\| \cdot \|h\|$; entonces, siendo $\|h\| < \|f^{-1}\|^{-1}$ se tiene que $K = \|f^{-1}\| \cdot \|h\| < 1$. Por tanto, φ es contractiva.

Entonces, según el teorema del punto fijo de Banach, existe un único $x_0 \in E$ tal que $\varphi(x_0) = x_0$.

Pero $\varphi(x_0) = f^{-1}[y_0 - h(x_0)]$. Luego $\exists x_0 \in E \,/\, f^{-1}[y_0 - h(x_0)] = x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow y_0 - h(x_0) = f(x_0) \Rightarrow y_0 = (f+h)(x_0)$, que prueba que $f+h$ es sobre.

En definitiva, y como se indicó anteriormente, $\mathcal{I}(E,F)$ es abierto en $\mathcal{L}(E,F)$.

• Veamos ahora que Φ es continua, es decir, que

$$\forall f \in \mathcal{I}(E,F), \quad \lim_{g \to f,\, g \in \mathcal{I}(E,F)} \Phi(g) = \Phi(f), \quad \text{o bien que } \forall f \in \mathcal{I}(E,F), \lim_{g \to f} g^{-1} = f^{-1}.$$

Se trata de verificar $\forall f \in \mathcal{I}(E,F), \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{g \in \mathcal{I}(E,F)}{\|g - f\| < \delta} \Rightarrow \|g^{-1} - f^{-1}\| < \varepsilon$.

$$\text{Pero } \|f^{-1} - g^{-1}\| = \|f^{-1} \circ g \circ g^{-1} - f^{-1} \circ f \circ g^{-1}\| = \|f^{-1} \circ (g - f) \circ g^{-1}\| \overset{(*)}{\leq}$$
$$\leq \|f^{-1}\| \cdot \|g^{-1}\| \cdot \|g - f\|.$$

Tratemos de acotar $\|g^{-1}\|$.

Según lema 10.2, para $h = g - f$, $[\|f^{-1}\|^{-1} - \|g - f\|]\,\|x\| \leq \|g(x)\|$.

Siendo g isomorfismo y teniendo en cuenta, Lema 10.2. aptdo a), el carácter inmejorable de $\|g^{-1}\|^{-1}$ en la desigualdad $\|g^{-1}\|^{-1}\|x\| \leq \|g(x)\|$ se verifica que:

$\|f^{-1}\|^{-1} - \|g - f\| \leq \|g^{-1}\|^{-1}$, y, en consecuencia:

$$\|g^{-1}\| \leq \frac{1}{\|f^{-1}\|^{-1} - \|g - f\|}$$

Entonces $\|f^{-1}-g^{-1}\| \leq \dfrac{\|f^{-1}\|}{\|f^{-1}\|^{-1}-\|g-f\|}\,\|g-f\|$ (I)

Se trata de encontrar $\delta=\delta(f,\varepsilon)$ tal que si $\|g-f\|<\delta \Rightarrow \|f^{-1}-g^{-1}\|<\varepsilon$.

Sea $\delta = \inf\left\{\frac{1}{2}\|f^{-1}\|^{-1}, \frac{\varepsilon}{2\|f^{-1}\|^2}\right\}$

Entonces, si $\|g-f\|<\delta \Rightarrow \|g-f\|<\|f^{-1}\|^{-1}$ y tiene sentido el denominador que figura en el segundo término de (I). Además:

$$\|g-f\|<\delta \Rightarrow \|f^{-1}\|^{-1}-\|g-f\| > \|f^{-1}\|^{-1}-\frac{1}{2}\|f^{-1}\|^{-1}=\frac{1}{2}\|f^{-1}\|^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\|f^{-1}\|}{\|f^{-1}\|^{-1}-\|g-f\|} < \frac{\|f^{-1}\|}{\frac{1}{2}\|f^{-1}\|^{-1}} = 2\|f^{-1}\|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f^{-1}-g^{-1}\| \leq \frac{\|f^{-1}\|}{\|f^{-1}\|^{-1}-\|g-f\|}\|g-f\| < 2\|f^{-1}\|^2\|g-f\| < 2\|f^{-1}\|^2\frac{\varepsilon}{2\|f^{-1}\|^2}=\varepsilon$$

Luego la aplicación $\Phi: f\in\mathcal{I}(E,F) \longmapsto f^{-1}\in\mathcal{I}(E,F)$ es continua. csqd.

11. Equivalencia de normas. Norma producto.

* Recordemos algo sobre la equivalencia de distancias en un conjunto A.

Sean d y d' dos métricas en un conjunto A y $M=(A,d)$ y $M'=(A,d')$ los respectivos espacios métricos. Sea $i: x\in M \longmapsto x\in M'$ la aplicación identidad.

DEFINICIONES: a) d y d' se dicen topológicamente equivalentes si la identidad es un homeomorfismo, es decir

$$[d \text{ y } d' \text{ son } t\text{-equivalentes}] \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x\in A, \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(x,\varepsilon)>0 \,/\, d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(x,y)<\varepsilon & (i \text{ continua}) \\ \forall x\in A, \forall\varepsilon>0, \exists\delta'(x,\varepsilon)>0 \,/\, d'(x,y)<\delta' \Rightarrow d(x,y)<\varepsilon & (i^{-1} \text{ continua}) \end{cases}$$

b) d y d' se dicen uniformemente equivalentes si la identidad es un homeomorfismo uniforme, es decir

$$[d \text{ y } d' \text{ son } u\text{-equivalentes}] \Leftrightarrow \begin{cases} \forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0 \,/\, d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(x,y)<\varepsilon & (i \text{ uniformemente continua}) \\ \forall\varepsilon>0, \exists\delta'(\varepsilon)>0 \,/\, d'(x,y)<\delta' \Rightarrow d(x,y)<\varepsilon & (i^{-1} \text{ uniformemente continua}) \end{cases}$$

c) d y d' se dicen lipschitzianamente equivalentes si la identidad es un homeomorfismo lipschitziano, es decir

$$[d \text{ y } d' \text{ son } l\text{-equivalentes}] \Leftrightarrow \begin{cases} \exists K>0 \,/\, \forall x,y\in A,\ d'(x,y)\leq K d(x,y) \\ \exists K'>0 \,/\, \forall x,y\in A,\ d(x,y)\leq K' d'(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow [\exists a,b>0 \,/\, \forall x,y\in A,\ a\,d(x,y)\leq d'(x,y)\leq$$
$$\leq b\,d(x,y)].$$

d) d y d' se dicen semejantes si la identidad es una semejanza (s-homeomorfismo), es decir

$$[d \text{ y } d' \text{ son } s\text{-equivalentes}] \Leftrightarrow \exists K>0 \,/\, \forall x,y\in A,\ d'(x,y)=K\,d(x,y).$$

Dos distancias d y d' serán métricamente equivalentes cuando i sea una isometría, es decir, cuando d y d' sean iguales.

Si d y d' son t-equivalentes, los espacios métricos (A,d) y (A,d') tienen las mismas propiedades topológicas (propiedades que se conservan por homeomorfismos).

(Δ,d) y (Δ,d') poseen las mismas propiedades uniformes (propiedades que se conservan por u-homeomorfismos como el carácter de Cauchy de una sucesión, o la completitud del espacio, ..).

* NORMAS EQUIVALENTES: Sea V un espacio vectorial, $\|..\|$ y $\|..\|'$ dos normas en V y $E=(V,\|..\|)$ y $E'=(V,\|..\|')$ los espacios normados respectivos. Sea i la aplicación identidad de E en E'. Definimos entonces:

a) $\|..\|$ y $\|..\|'$ son t-equivalentes si y solo si la identidad es un homeomorfismo.

b) $\|..\|$ y $\|..\|'$ son u-equivalentes si y solo si la identidad es un u-homeomorfismo.

c) $\|..\|$ y $\|..\|'$ son l-equivalentes sii la identidad es un l-homeomorfismo.

d) $\|..\|$ y $\|..\|'$ son semejantes sii la identidad es una semejanza.

e) $\|..\|$ y $\|..\|'$ son métricamente equivalentes sii i es una isometría (sii $\|..\|=\|..\|'$).

Trivialmente, las métricas inducidas en un espacio vectorial por normas t-equivalentes (resp. u-equivalentes, l-equiv., s-equiv) son t-equivalentes (resp, u-equivalentes, l-equivalentes, s-equiv.).

11.1. PROPOSICION: Sea V un espacio vectorial y $\|..\|$ y $\|..\|'$ dos normas en V. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son t-equivalentes.

b) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son u-equivalentes.

c) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son l-equivalentes.

Demostr.: Siendo la identidad una aplicación lineal, del teorema 6.1 deducimos que i es homeomorfismo sii i es homeomorfismo uniforme sii i es homeomorfismo lipschitziano. csqd.

Esta proposición nos permite hablar de normas equivalentes, simplemente, dejando a un lado las normas semejantes. Podemos decir, en consecuencia, que dos normas, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$, en un espacio vectorial V son equivalentes si y sólo si existen $a,b>0$ tales que $\forall x\in V$, $a\|x\|\leq\|x\|'\leq b\|x\|$.

Consecuencia inmediata del teorema 6.1 es la siguiente

11.2. PROPOSICION: Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en un espacio vectorial V. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes.

b) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ inducen en V la misma topología, es decir, definen los mismos abiertos.

c) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ inducen en V la misma bornología, es decir, definen los mismos acotados.

d) $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ definen en V los mismos entornos de 0.

*** NORMA PRODUCTO**

- Producto de espacios métricos: Sean $M_1=(A_1,d_1),\dots,M_n=(A_n,d_n)$ una colección finita de espacios métricos. Sea A el conjunto producto $A_1\times\dots\times A_n$. Entonces la aplicación

$$d: A\times A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \longmapsto \max_{1\le i\le n} d_i(x_i,y_i)$$

es una métrica en A llamada métrica producto de las $\{d_i\}_{i=1}^n$. Al espacio métrico (A,d) se le llama espacio producto de los M_i. Una métrica l-equivalente a la anterior es la definida por:

$$d'((x_i)_{i=1}^n,(y_i)_{i=1}^n) = \sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)$$

pues, trivialmente, $d(\bar{x},\bar{y})\le d'(\bar{x},\bar{y})\le n\, d(\bar{x},\bar{y})$, $\forall \bar{x},\bar{y}\in A$.

Las bolas en el espacio producto respecto de d son de la forma:

$$B((x_1,\dots,x_n),r) = B(x_1,r)\times\dots\times B(x_n,r).$$

Consecuencia de esto es que el producto de abiertos (cerrados) es abierto (cerrado).

- PRODUCTO DE ESPACIOS NORMADOS: Sean $E_1=(V_1,\|\cdot\|_1),\dots,E_n=(V_n,\|\cdot\|_n)$ una colección finita de espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. El conjunto producto $V=V_1\times\dots\times V_n$ dotado con las leyes de composición: $+: ((x_i)_{i=1}^n,(y_i)_{i=1}^n)\in V\times V \longmapsto (x_i)_{i=1}^n+(y_i)_{i=1}^n=(x_i+y_i)_{i=1}^n\in V$ y $\cdot: (\lambda,(x_i)_{i=1}^n)\in\mathbb{K}\times V\longmapsto \lambda(x_i)_{i=1}^n=(\lambda x_i)_{i=1}^n\in V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Se prueba fácilmente que la aplicación

$$\|\cdot\|: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1,\dots,x_n)\longmapsto \|(x_1,\dots,x_n)\| = \max_{1\le i\le n}\|x_i\|_i$$

es una norma en V llamada norma producto. Llamamos $E_1\times\dots\times E_n=(V_1\times\dots\times V_n,\|\cdot\|)$ y decimos que $E_1\times\dots\times E_n$ es el espacio normado producto de los dados.

También son normas en $V_1\times\dots\times V_n$, y equivalentes a la norma producto las siguientes

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p=\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_i^p\right)^{1/p} \quad \text{cuando } p\in[1,+\infty[$$

La demostración de que $\|\cdot\|_p$ es una norma se basa, para la desigualdad triangular, en la desigualdad de Minkowski:

$\forall p\in[1,+\infty[$, $\forall (a_i)_{i=1}^n,(b_i)_{i=1}^n\in\mathbb{R}_+^n$, $\left[\sum_{i=1}^n(a_i+b_i)^p\right]^{1/p}\le\left[\sum_{i=1}^n a_i^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{i=1}^n b_i^p\right]^{1/p}$

Se verifica también que $\forall (x_i)_{i=1}^n\in V_1\times\dots\times V_n$, $\lim_{p\to\infty}\|(x_1,\dots,x_n)\|_p=\|(x_1,\dots,x_n)\|=\max_{1\le i\le n}\|x_i\|$

Debido a ello, a la norma producto en $V_1 \times \dots \times V_n$ se le suele denotar por $\|\cdot\|_\infty$. Que las normas "p" sean equivalentes a $\|\cdot\|$ es trivial, en virtud de las desigualdades:

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty \leq \|(x_1,\dots,x_n)\|_p \leq n^{1/p} \|(x_1,\dots,x_n)\|_\infty$$

12. APLICACIONES MULTILINEALES CONTINUAS ENTRE ESPACIOS NORMADOS.

* APLICACIONES MULTILINEALES O n-LINEALES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES

DEF.: Sean $E_1,\dots,E_n, F$ $n+1$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $f: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow F$ se llama multilineal o n-lineal si se verifican las propiedades:

1) $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n), (x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ se tiene
$$f(x_1,\dots,x_{i-1}, x_i+y_i, x_{i+1},\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n) + f(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n).$$
2) $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) \in E_1 \times \dots \times E_i \times \dots \times E_n$, $f(x_1,\dots,x_{i-1},\lambda x_i,x_{i+1},\dots,x_n) = \lambda f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$.

Podemos decir que f es n-lineal si f es "lineal separadamente en cada una de las coordenadas". Las dos propiedades anteriores equivalen a la siguiente: $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\forall (x_1,\dots,x_i,\dots,x_n), (x_1,\dots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\dots,x_n)$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$ se verifica que:
$$f(x_1,\dots,x_{i-1}, \lambda x_i + \mu y_i, x_{i+1},\dots,x_n) = \lambda f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) + \mu f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n).$$

DEFINICION: Una aplicación multilineal $f: E_1 \times \dots \times E_n \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice un funcional multilineal.

EJEMPLOS DE APLICACIONES MULTILINEALES: (*)

1) La aplicación definida por
$$f: \mathbb{K} \times \overset{n}{\dots} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x_1,\dots,x_n) \longmapsto f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$$
es n-lineal; es más, es un funcional n-lineal sobre $\mathbb{K}^n$.

2) La aplicación $\Phi: (f_1,\dots,f_n) \in [C(I)]^n \longmapsto f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n \in C(I)$ es una aplicación n-lineal. Recordemos que $\forall x \in I$, $(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$.

3) La aplicación $(f_1,\dots,f_n) \in [C(I)]^n \longmapsto \int_I (f_1 \cdot \dots \cdot f_n) \in \mathbb{R}$ es un funcional n-lineal sobre $[C(I)]^n$.

4) La aplicación $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ es 2-lineal o bilineal.

12.1. PROPOSICIONES: a) La imagen por una aplicación n-lineal de una n-tupla que tenga una coordenada nula es cero.

b) Toda aplicación bilineal de $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}$ es de la forma
$$f: [(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)] \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longmapsto (x_1,\dots,x_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}$$

Demostr.: a) Sea $(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) \in E_1 \times \dots \times E_i \times \dots \times E_n$. Si f es una aplicación n-lineal de $E_1 \times \dots \times E_n$ en F entonces, $f(x_1,\dots,0,\dots,x_n) = 0 f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = 0$.

b) Sea $f: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional bilineal en $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$. El conjunto de vectores $\{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. Entonces:

$$f[(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)] = f[x_1(1,0,\dots,0)+\dots+x_n(0,\dots,0,1),\ y_1(1,0,\dots,0)+\dots+y_n(0,\dots,0,1)] =$$

$$= x_1 f[(1,0,\dots,0),\ y_1(1,0,\dots,0)+\dots+y_n(0,\dots,0,1)] + x_2 f[(0,1,\dots,0),\ y_1(1,0,\dots,0)+\dots+y_n(0,\dots,0,1)] +$$

$$+\dots+ x_n f[(0,\dots,0,1),\ y_1(1,0,\dots,0)+\dots+y_n(0,\dots,0,1)] =$$

$$= x_1 f[(1,0,\dots,0),(1,0,\dots,0)]y_1 + \dots + x_1 f[(1,0,\dots,0),(0,\dots,0,1)]y_n +$$

$$+ x_2 f[(0,1,\dots,0),(1,0,\dots,0)]y_1 + \dots + x_2 f[(0,1,\dots,0),(0,\dots,0,1)]y_n + \dots +$$

$$+ x_n f[(0,0,\dots,1),(1,0,\dots,0)]y_1 + \dots + x_n f[(0,\dots,0,1),(0,\dots,0,1)]y_n$$

Si llamamos $a_{ij} = f[(0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0),(0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)]$ podemos escribir

$$f[(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)] = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} \quad \text{csqd.}$$

** APLICACIONES n-lineales CONTINUAS ENTRE ESPACIOS NORMADOS

Si $E_1,\dots,E_n,F$ son espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$, son, en particular, espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y podemos hablar de aplicaciones multilineales de $E_1\times\dots\times E_n$ en F; además tenemos en $E_1\times\dots\times E_n$ y en F una métrica inducida por las normas y, en consecuencia, una topología sobre los mismos y podemos hablar de aplicaciones continuas de $E_1\times\dots\times E_n$ en F. Tiene, por tanto, perfecto sentido hablar de aplicaciones n-lineales continuas de $E_1\times\dots\times E_n$ en F. Veamos algunas caracterizaciones de dichas aplicaciones.

12.2. TEOREMA: Sean $E_1,\dots,E_n,F$ espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $f: E_1\times\dots\times E_n \longrightarrow F$ una aplicación n-lineal. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

1) f es continua.
2) f es continua en un punto de $E_1\times\dots\times E_n$.
3) f es bornológica, es decir, transforma acotados en acotados.
4) f es lipschitziana en las partes acotadas de $E_1\times\dots\times E_n$, es decir, la restricción de f a toda parte acotada de $E_1\times\dots\times E_n$ es lipschitziana. (*)

Aunque el teorema es cierto para cualquier $n\in\mathbb{N}$, lo probaremos únicamente para aplicaciones bilineales ($n=2$); pero antes veamos dos lemas.

Lema 1: En las hipótesis del teorema (para $n=2$), si f es continua en un punto $(a,b)\in E_1\times E_2$ entoces:

1') f es continua en $(0,0)$

Demostr.: Decir que f es continua en (a,b) equivale a decir que es equivalente, que $\|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| \to 0$ cuando $\|(x,y)\| \to 0$ (basta hacer $x'=a+x$, $y'=b+y$). Se trata de probar que $\|f(x,y)\| \to 0$ cuando $\|(x,y)\| \to 0$. Veámoslo:

$\|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| = \|f(a,b)+f(a,y)+f(x,b)+f(x,y)-f(a,b)\| =$
$= \|f(a,y)+f(x,b)+f(x,y)\| \geq \|f(x,y)\| - \|f(a,y)+f(x,b)\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f(x,y)\| \leq \|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| + \|f(a,y)+f(x,b)\| =$
$= \|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| + \|f(a,b)+f(a,y)-f(a,b)+f(a,b)+f(x,b)-f(a,b)\| =$
$= \|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| + \|f(a,b+y)-f(a,b)+f(a+x,b)-f(a,b)\| \leq$
$\leq \|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| + \|f(a,b+y)-f(a,b)\| + \|f(a+x,b)-f(a,b)\|$ (I)

Por hipótesis, cuando $\|(x,y)\| \to 0$, $\|f(a+x,b+y)-f(a,b)\| \to 0$.
Además si $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \to 0$ trivialmente $\|(0,y)\| \to 0$ y $\|(x,0)\| \to 0$, y de aquí deducimos, respectivamente, que $\|f(a,b+y)-f(a,b)\| \to 0$ y $\|f(a+x,b)-f(a,b)\| \to 0$. Luego, en virtud de la acotación (I), se deduce que si $\|(x,y)\| \to 0$, entonces $\|f(x,y)\| \to 0$. csqd.

Lema 2: Si $f: E_1 \times E_2 \to F$ es una aplicación bilineal, son equivalentes las condiciones siguientes:
3) f es bornológica
3') $\exists K \geq 0 \,/\, \forall (x,y) \in E_1 \times E_2$, $\|f(x,y)\| \leq K\|x\|\cdot\|y\|$.

Demostr.: 3) ⇒ 3') Si f es bornológica, $f[B[(0,0),1]]$ es acotado, es decir, $\exists K \geq 0 \,/\, \|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \leq 1 \Rightarrow \|f(x,y)\| \leq K$.
Dados $\underset{x\neq 0, y\neq 0}{(x,y)} \in E_1 \times E_2$, $\left\|\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| = 1$. Luego:

$$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}\right)\right\| \leq K \Rightarrow \left\|\frac{1}{\|x\|\cdot\|y\|} f(x,y)\right\| \leq K \Rightarrow \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leq K \Rightarrow \|f(x,y)\| \leq K\|x\|\cdot\|y\|$$

Si $x=0 \vee y=0$, $f(x,y)=0$ y se da la igualdad.

3') ⇒ 3) Es suficiente ver que la imagen de una bola de centro cero es acotada. Sea $r>0$. Entonces, $\forall (x,y) \in B[(0,0),r]$, $\|(x,y)\| = \max\{\|x\|,\|y\|\} \leq r$.
Entonces, $\|f(x,y)\| \leq K\|x\|\cdot\|y\| \leq Kr^2 \Rightarrow f(B[(0,0),r]) \subset B(0,Kr^2)$.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA: 1) ⇒ 2) Trivial

2) ⇒ 3) Hemos visto que 2) ⇒ 2') (lema 1). Si probamos que 2') ⇒ 3) quedará visto que 2) ⇒ 3). Siendo 3) y 3') equivalentes, es suficiente que probemos que 2') ⇒ 3').
Siendo f continua en $(0,0)$, dado $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0 \,/\, \|(x,y)\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x,y)\| \leq 1$.
Sea $(x,y) \in E_1 \times E_2$ tal que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (si alguno de ellos fuera cero sería $f(x,y)=0$ y, por tanto, $\forall r \in \mathbb{R}$, $\|f(x,y)\| = r\|x\|\cdot\|y\|$).
Entonces $\left\|\left(\frac{\delta x}{\|x\|},\frac{\delta y}{\|y\|}\right)\right\| = \max\left\{\left\|\frac{\delta x}{\|x\|}\right\|,\left\|\frac{\delta y}{\|y\|}\right\|\right\} = \max\left\{\delta\frac{\|x\|}{\|x\|},\delta\frac{\|y\|}{\|y\|}\right\} = \delta$

Luego $\exists K = \frac{1}{\delta^2} \geq 0 \,/\, \forall (x,y) \in E_1 \times E_2,\ \|f(x,y)\| \leq K \|x\| \cdot \|y\|$, y, por tanto, f es bornológica.

3) ⟹ 4) Es suficiente que probemos que 3') ⟹ 4) ya que 3) ⟺ 3').
Por hipótesis, $\exists K \geq 0 \,/\, \forall (x,y) \in E_1 \times E_2,\ \| f(x,y)\| \leq K \cdot \|x\| \cdot \|y\|$
Sean $(x,y), (x',y') \in E_1 \times E_2$. Entonces:

$$\|f(x,y) - f(x',y')\| = \|f(x,y) - f(x',y) + f(x',y) - f(x',y')\| =$$
$$= \|f(x-x',y) + f(x', y-y')\| \leq \|f(x-x',y)\| + \|f(x',y-y')\| \leq$$
$$\leq K\|x-x'\| \cdot \|y\| + K\|x'\| \cdot \|y-y'\| \leq$$
$$\leq K(\max\{\|x-x'\|, \|y-y'\|\}) \cdot \|y\| + K\|x'\| \cdot (\max\{\|x-x'\|, \|y-y'\|\}) =$$
$$= K[\|y\| + \|x'\|] \cdot (\max\{\|x-x'\|, \|y-y'\|\}) = K[\|y\| + \|x'\|] \cdot \|(x,y)-(x',y')\| \quad (I)$$

Sea A un conjunto acotado ~~novacío~~ en $E_1 \times E_2$ y $(a,b) \in A$. Entonces,

$$\exists c > 0 \,/\, \forall (x,y) \in A,\ \|(x,y)-(a,b)\| = \|(x-a, y-b)\| < c \implies$$
$$\implies \max\{\|x-a\|, \|y-b\|\} < c \implies \begin{cases} \|x\| - \|a\| \leq \|x-a\| < c \\ \|y\| - \|b\| \leq \|y-b\| < c \end{cases} \implies \begin{cases} \|x\| < c + \|a\| \\ \|y\| < c + \|b\| \end{cases}$$

Sea $C_A = \max\{c + \|a\|, c + \|b\|\}$.
Entonces, $\forall (x,y), (x',y') \in A,\ \|f(x,y) - f(x',y')\| \overset{(I)}{\leq}$
$\leq K[\|y\| + \|x'\|] \cdot \|(x,y)-(x',y')\| \leq 2KC_A \|(x,y)-(x',y')\|$. Siendo $2KC_A$ una constante, para cada acotado A, se verifica que $f_{/A}$ es lipschitziana, como queríamos ver.

4) ⟹ 1) f es continua en todo punto $(x,y) \in E_1 \times E_2$ ya que dicho punto admite un entorno acotado, en el cual, por hipótesis, f es Lipschitziana y, por tanto, continua. c.s.q.d.

12.3. TEOREMA: Sean $E_1, \dots, E_n, F$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$. El conjunto $\mathcal{H}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ de las aplicaciones n-lineales de $E_1 \times \dots \times E_n$ en F tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración: Trivial.

Si $\mathcal{C}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ es el conjunto de las aplicaciones continuas de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ en F, $\mathcal{C}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ es un espacio vectorial. Entonces, el conjunto $\mathcal{L}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F) = \mathcal{H}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F) \cap \mathcal{C}(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ de las aplicaciones n-lineales continuas de $E_1 \times \dots \times E_n$ en F tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

De modo análogo que para las aplicaciones lineales continuas, la aplicación:
$$\|\cdot\| : f \in \mathcal{L}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F) \longmapsto \|f\| = \sup_{x_i \neq 0} \frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \cdots \|x_n\|} = \sup\{\|f(x_1, \dots, x_n)\| \,/\, \|x_i\| = 1\} \in \mathbb{R}$$

es una norma en $\mathcal{L}^n(E_1\times\ldots\times E_n, F)$.

OBSERVACION: No deben confundirse los espacios normados $\mathcal{L}^n(E_1\times\ldots\times E_n,F)$ y $\mathcal{L}(E_1\times\ldots\times E_n,F)$. El primero es, como se ha dicho, el conjunto de las aplicaciones n-lineales continuas de $E_1\times\ldots\times E_n$ en F; el segundo es el conjunto de las aplicaciones lineales continuas del espacio normado producto $E_1\times\ldots\times E_n$ en F. La norma en este segundo conjunto es, como ya sabemos, la aplicación:

$$\|\cdot\| : f\in\mathcal{L}(E_1\times\ldots\times E_n,F)\longmapsto \|f\| = \sup_{(x_1,\ldots,x_n)\neq(0,\ldots,0)} \frac{\|f(x_1,\ldots,x_n)\|}{\|(x_1,\ldots,x_n)\|}$$

Se prueba, además, que si $n>1$, $\mathcal{L}^n(E_1\times\ldots\times E_n,F)\cap\mathcal{L}(E_1\times\ldots\times E_n,F)$ se reduce a la aplicación nula sobre $E_1\times\ldots\times E_n$.

Consecuencia inmediata de la definición de norma en $\mathcal{L}^n(E_1\times\ldots\times E_n,F)$ es que, si f es n-lineal continua, $\|f\|$ es el menor de los números $K\geq 0$ para los cuales se verifica $\|f(x_1,\ldots,x_n)\|\leq K\|x_1\|\cdots\|x_n\|$, $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E_1\times\ldots\times E_n$.

12.4. TEOREMA: Sean E, F y G espacios normados sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. La aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{L}^2(E\times F, G) &\longrightarrow \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G)) \\ f &\longmapsto \varphi(f) \end{aligned}$$

de modo que $[\varphi(f)(x)](y) = f(x,y)\in G$, $\forall x\in E$, $\forall y\in F$ es un isomorfismo entre los espacios normados $\mathcal{L}^2(E\times F,G)$ y $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$. (*).

Demostr.: • Veamos primeramente que φ está bien definida:

- $\forall f\in\mathcal{L}^2(E\times F,G)$, $\forall x\in E$, $\varphi(f)(x)\in\mathcal{L}(F,G)$: $\forall y_1,y_2\in F$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$, $[\varphi(f)(x)](\lambda_1y_1+\lambda_2y_2) =$
$= f(x,\lambda_1y_1+\lambda_2y_2) = f(x,\lambda_1y_1)+f(x,\lambda_2y_2) = \lambda_1f(x,y_1)+\lambda_2f(x,y_2) =$
$= \lambda_1[\varphi(f)(x)](y_1)+\lambda_2[\varphi(f)(x)](y_2)$.
- $\forall f\in\mathcal{L}^2(E\times F,G)$, $\varphi(f)\in\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$: $\forall x_1,x_2\in E$, $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{K}$, $[\varphi(f)(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)](y) =$
$= f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y) = \lambda_1f(x_1,y)+\lambda_2f(x_2,y) = \lambda_1[\varphi(f)(x_1)](y)+\lambda_2[\varphi(f)(x_2)](y) =$
$= [\lambda_1\varphi(f)(x_1)+\lambda_2\varphi(f)(x_2)](y)$, y esto cualquiera que sea $y\in F$. Luego
$\varphi(f)(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2) = \lambda_1\varphi(f)(x_1)+\lambda_2\varphi(f)(x_2)$.

Esto prueba que, continuidad aparte, φ está bien definida. Se prueba además que $\forall x\in E$, $\varphi(f)(x)\in\mathcal{L}(F,G)$ y $\forall f$, $\varphi(f)\in\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(F,G))$

• Probemos que φ es un isomorfismo entre las estructuras vectoriales subyacentes.

- φ es inyectiva: Sean $f,g\in\mathcal{L}^2(E\times F,G)$. Si $\varphi(f)=\varphi(g)$ se tiene que $\forall x\in E$, $\varphi(f)(x)=\varphi(g)(x)$ y esto significa, en virtud de la definición de

(*) La aplicación φ asocia a cada aplicación bilineal continua f una aplicación lineal continua $\varphi(f)$ de E en el espacio normado $\mathcal{L}(F,G)$. La aplicación $\varphi(f)$ asocia a cada elemento $x\in E$ una aplicación lineal continua $\varphi(f)(x)$ de F en G y ésta, asocia a cada $y\in F$ un elemento de G, $[\varphi(f)(x)](y)$ que está definido por $f(x,y)$. Para cada $x\in E$ la aplicaigualdad de aplicaciones, que $\forall y \in F$, $[\varphi(f)(x)](y) = [\varphi(g)(x)](y)$, o lo que es equivalente que, $\forall x \in E, \forall y \in F$, $f(x,y) = g(x,y)$; luego $f = g$. Por tanto, φ es inyectiva.

- φ es sobre: Sea $\xi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F,G))$. Queremos ver que $\exists f \in \mathcal{L}^2(E \times F, G)$ tal que $\varphi(f) = \xi$. Si $\xi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F,G))$ se verifica que para todo $x \in E$, $\xi(x)$ es una aplicación lineal continua de F en G; entonces $\forall y \in F$, $[\xi(x)](y) \in G$. Consideremos la aplicación

$$f : (x,y) \in E \times F \longmapsto f(x,y) = [\xi(x)](y) \in G.$$

f está bien definida por lo dicho anteriormente. Además f es bilineal, pues: (1) $f(x_1 + x_2, y) = [\xi(x_1 + x_2)](y) = [\xi(x_1) + \xi(x_2)](y)$ pues $\xi \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F,G))$ y esto último coincide con $[\xi(x_1)](y) + [\xi(x_2)](y) = f(x_1, y) + f(x_2, y)$.

(2) $f(x, y_1 + y_2) = [\xi(x)](y_1 + y_2) = [\xi(x)](y_1) + [\xi(x)](y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2)$, pues $\forall x \in E$, $\xi(x) \in \mathcal{L}(F,G)$. (3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x, y) = [\xi(\lambda x)](y) =$
$= [\lambda \xi(x)](y) = \lambda [\xi(x)](y) = \lambda f(x,y)$; $f(x, \lambda y) = [\xi(x)](\lambda y) = \lambda [\xi(x)](y) =$
$= \lambda [\xi(x)](y)$.

Luego $f \in \mathcal{L}^2(E \times F, G)$. Además, por definición de f, $\varphi(f) = \xi$, pues $\forall x \in E$, $\varphi(f)(x) = \xi(x)$ ya que $\forall y \in F$, $[\varphi(f)(x)](y) = f(x,y) = [\xi(x)](y)$.

- φ es lineal: $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall f, g \in \mathcal{L}^2(E \times F, G)$, $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda \varphi(f) + \mu \varphi(g)$, pues $\forall x \in E, \forall y \in F$, $[\varphi(\lambda f + \mu g)(x)](y) =$
$= (\lambda f + \mu g)(x, y) = \lambda f(x,y) + \mu g(x,y) = \lambda [\varphi(f)(x)](y) + \mu [\varphi(g)(x)](y)$.

Por tanto, φ es un isomorfismo algebraico.

- Veamos, por último, que φ es una isometría: Se trata de ver que $\forall f \in \mathcal{L}^2(E \times F, G)$, $\|\varphi(f)\| = \|f\|$.

Siendo $\|\varphi(f)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\varphi(f)(x)\|}{\|x\|}$ y $\varphi(f)(x) \in \mathcal{L}(F,G)$ se deduce

que $$\|\varphi(f)\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_{y \neq 0} \frac{\|[\varphi(f)(x)](y)\|}{\|y\|}}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|y\|}}{\|x\|}.$$

Pero $$\sup_{x \neq 0} \frac{\sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|y\|}}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|},$$ pues

$$\forall x \neq 0, \quad \sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|y\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|x\|}{\|x\|} \frac{\|f(x,y)\|}{\|y\|} = \|x\| \sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall x \neq 0, \quad \frac{\sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|y\|}}{\|x\|} = \sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \Longrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\sup_{y \neq 0} \frac{\|f(x,y)\|}{\|y\|}}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

Luego $$\|\varphi(f)\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{\|f(x,y)\|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \|f\|. \qquad \text{c.s.q.d.}$$

Este resultado se generaliza fácilmente para aplicaciones n-lineales continuas. Podemos, entonces, enunciar el siguiente:

12.5. TEOREMA: Sean $E_1, \dots, E_n, F$ espacios normados sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. La aplicación:

$$\Psi : \mathcal{L}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \mathcal{L}(E_3, \dots, \mathcal{L}(E_n, F)) \dots))$$
$$f \longmapsto \Psi(f)$$

donde $\Psi(f)$ está definida por: $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, $[\dots[[[\Psi(f)(x_1)](x_2)](x_3)]\dots](x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$, es un isomorfismo entre los espacios normados implicados.

12.6. COROLARIO: Sean $E_1, \dots, E_n, F$ espacios normados. Si F es completo, entonces $\mathcal{L}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ es completo.

Demostr.: Según teorema 6.2, si F es completo, $\mathcal{L}(E_n, F)$ es completo y, por tanto, $\mathcal{L}(E_{n-1}, \mathcal{L}(E_n, F))$ es completo. Procediendo de este modo probamos que $\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, \mathcal{L}(E_{n-1}, \mathcal{L}(E_n, F)) \dots))$ es completo y, por tanto, $\mathcal{L}^n(E_1 \times \dots \times E_n, F)$ que es un espacio isométrico al anterior, es completo. csqd.

13. ESPACIOS NORMADOS DE DIMENSION FINITA.

DEFINICION: Un espacio normado de dimensión finita es un par $(V, \|\dots\|)$ donde V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\|\dots\|$ una norma sobre V.

A lo largo de este apartado $\{e_1, \dots, e_n\}$ será una base del espacio normado E de dimensión finita n.

13.1. TEOREMA: Sea E un espacio normado de dimensión finita. El isomorfismo algebraico:

$$\Psi : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \in E \quad (*)$$

es bicontinuo

Demostr.: — Ψ es continuo: Consideramos en $\mathbb{K}^n$ la norma producto que, como sabemos, está definida por $\|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| = \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i|$. Siendo Ψ lineal, Ψ es continua si y solo si es lipschitziana según Teorema 6.1. Veamos, entonces, que $\exists K > 0 \,/\, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| \le K \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|$.

Dado $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| = \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\| \le$
$\le |\lambda_1| \cdot \|e_1\| + \dots + |\lambda_n| \cdot \|e_n\| \le [\|e_1\| + \dots + \|e_n\|] \cdot \max_{1 \le i \le n} |\lambda_i| = [\|e_1\| + \dots + \|e_n\|] \cdot \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\|$

Luego haciendo $K = \|e_1\| + \dots + \|e_n\|$ queda visto que Ψ es continuo.

— Ψ^{-1} es continuo: Ψ^{-1} es una aplicación lineal, pues Ψ es isomorfismo. Entonces Ψ^{-1} es continuo si y solo si transforma acotados en acotados. Como todo conjunto acotado A de E está contenido en una bola homotética de $B[0,1]$ ($A \subset B[0,r] = r\,B[0,1]$) podemos escribir que Ψ^{-1} es continuo si y solo si $\Psi^{-1}(B[0,1])$ es acotado.

Probemos, entonces, que $\Psi^{-1}(B[0,1])$ es acotado. Supongamos que no fuese acotado. Entonces existiría una sucesión $(\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n)_{K\in\mathbb{N}}$ en $B[0,1]$, tal que $\|\Psi^{-1}(\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n)\|$ se hace mayor que un número fijado de antemano con solo tomar K suficientemente avanzado. En consecuencia, podemos encontrar una sucesion $(\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n)_{K\in\mathbb{N}}$ en E tal que $\|\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n\| \le 1$ y $\|\Psi^{-1}(\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n)\| = \|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\| \ge K$, $\forall K$.

Es más, podemos tomar esta sucesión de modo que:
$\|\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n\| \le 1$ y $\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\| = K$, $\forall K\in\mathbb{N}$, pues si fuera $\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\| > K$ tomaríamos otra sucesión $(\mu_{1K}e_1+\dots+\mu_{nK}e_K)_{K\in\mathbb{N}}$ de modo que $\mu_{iK} = \dfrac{K\lambda_{iK}}{\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\|}$ y tendríamos que

$$\|(\mu_{1K},\dots,\mu_{nK})\| = \left\|\left(\frac{K\lambda_{1K}}{\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\|},\dots,\frac{K\lambda_{nK}}{\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\|}\right)\right\| = \frac{K}{\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\|}\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\| = K$$

Entonces la sucesión $\left(\frac{1}{K}[\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n]\right)_{K\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en E, pues $\|\frac{1}{K}(\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n)\| \le \frac{1}{K}$, $\forall K\in\mathbb{N}$ y $(\frac{1}{K})_{K\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en $\mathbb{R}$.

Además, la sucesión contraimagen de ésta $\left(\frac{1}{K}(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\right)_{K\in\mathbb{N}}$ está en la esfera unidad de $\mathbb{K}^n$: $E[(0,\dots,0),1] = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n / \|(x_1,\dots,x_n)\| = 1\}$ pues
$\forall K\in\mathbb{N}$, $\|\frac{1}{K}(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\| = 1$, ya que $\forall K\in\mathbb{N}$, $\|(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\| = K$.

La esfera unidad de $\mathbb{K}^n$ es compacta, pues es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{K}^n$ que es localmente compacto. Como toda sucesión en un compacto admite una subsucesión convergente en el compacto, la sucesión $\left(\frac{1}{K}(\lambda_{1K},\dots,\lambda_{nK})\right)_{K\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(\frac{1}{K_p}(\lambda_{1K_p},\dots,\lambda_{nK_p})\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergente hacia un punto $(x_1,\dots,x_n)$ de la esfera unidad. Siendo Ψ continua, la sucesión $\left(\Psi\left(\frac{1}{K_p}(\lambda_{1K_p},\dots,\lambda_{nK_p})\right)\right)_{p\in\mathbb{N}} =$

$= \left(\frac{1}{K_p}[\lambda_{1K_p}e_1+\dots+\lambda_{nK_p}e_n]\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergerá a $\Psi(x_1,\dots,x_n)$. Por otro lado $\left(\frac{1}{K_p}[\lambda_{1K_p}e_1+\dots+\lambda_{nK_p}e_n]\right)_{p\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $\left(\frac{1}{K}[\lambda_{1K}e_1+\dots+\lambda_{nK}e_n]\right)_K$ que converge a cero, luego debe converger también a cero. Como el límite de una sucesión en un espacio métrico es único, debe ser $\Psi(x_1,\dots,x_n)=0$. Como Ψ es isomorfismo, es inyectiva y, por tanto $\Psi(x_1,\dots,x_n) = 0 \Leftrightarrow (x_1,\dots,x_n) = (0,\dots,0)$, lo cual es una contradicción pues $(x_1,\dots,x_n)$ es un punto de la esfera unidad y $(0,\dots,0)$ no pertenece a la esfera unidad. Por tanto, $\Psi^{-1}(B[0,1])$ debe ser acotado y, como se indicó anteriormente, Ψ^{-1} es continuo. c.s.q.d.

13.2. COROLARIO: Sea E un espacio normado de dimensión finita. Entonces

a) E es localmente compacto.
b) E es completo.

Demostr.: Según el teorema anterior E es homeomorfo a $\mathbb{K}^n$ (t-homeomorfo). Según teorema 6.1, si Ψ es un isomorfismo bicontinuo de $\mathbb{K}^n$ en E (es un t-homeomorfismo), entonces Ψ y Ψ^{-1} son uniformemente continuas y, aún más, lipschitzianas. Luego E y $\mathbb{K}^n$ son u-homeomorfos y l-homeomorfos.

a) Siendo la compacidad local una propiedad topológica, se conserva por t-homeomorfismos. Como $\Psi: \mathbb{K}^n \to E$ es t-homeomorfismo y $\mathbb{K}^n$ es localmente compacto, E es localmente compacto. (*)

b) Siendo la completitud de un espacio una propiedad uniforme, se conserva por u-homeomorfismos (ver TOPOLOGÍA I: TEMA 11). Como Ψ es un u-homeomorfismo y $\mathbb{K}^n$ es completo, E es completo. c.s.q.d.

13.3. COROLARIO: Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita n son equivalentes.

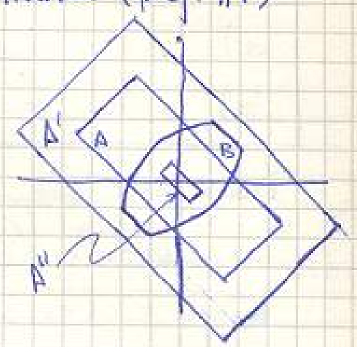
Demostr.: Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en V. Sean $E=(V,\|\cdot\|)$ y $E'=(V,\|\cdot\|')$ los espacios normados correspondientes. Sea $\Psi: \mathbb{K}^n \to (V,\|\cdot\|')$ el isomorfismo bicontinuo que existe entre $\mathbb{K}^n$ y E' y $\varphi^{-1}: (V,\|\cdot\|) \longrightarrow (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ el isomorfismo bicontinuo que existe entre $(V,\|\cdot\|)$ y $\mathbb{K}^n$. Entonces la aplicación $\Psi\circ\varphi^{-1}$ es un isomorfismo bicontinuo de E en E'. Como: $\Psi\circ\varphi^{-1}(\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n) = \Psi(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n$, $\Psi\circ\varphi^{-1}$ es la identidad en V. Luego: $i:(V,\|\cdot\|) \longrightarrow (V,\|\cdot\|')$ es un t-homeomorfismo (isomorfismo algebraico bicontinuo), que prueba que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ son equivalentes. c.s.q.d.

13.4. COROLARIO: En un espacio vectorial de dimensión finita sólo hay una topología que se derive de una norma.

Demostr.: Es consecuencia inmediata de la equivalencia de las normas en un espacio vectorial de dimensión finita.

– Deducimos de aquí que si el problema a tratar en un espacio normado de dimensión finita E es, a lo sumo, lipschitziano, podemos considerar cualquier norma en E.

INTERPRETACION GEOMETRICA: En un espacio normado E de dimensión finita (p.ej. $\mathbb{R}^2$) un conjunto es una bola de centro 0 para una cierta norma si y solo si es un conjunto convexo, simetrico respecto a 0, no contiene ninguna recta (es acotado), y es equilibrado (si contiene a un punto contiene al segmento que lo une con 0). El significado geométrico del corolario 13.4, es que si dos conjuntos A y B de E son bolas para una cierta norma en E, entonces, existe un homotético A' de A de ellos que contiene al otro y otro homotético A'' de A contenido en B.



13.5. TEOREMA: Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado cualquiera es cerrado.

Demostr.: Sea E un espacio normado cualquiera y L un subespacio de E de dimensión finita. Entonces L, como espacio normado de dimensión finita, es completo. Si L no fuese cerrado, existiría un punto de acumulación de L que no pertenecería a L (recordemos que L es cerrado si y solo si contiene a sus puntos de acumulación). Para este punto de acumulación x de L existe una sucesión de puntos de L que converge hacia x en E. Por tanto, dicha sucesión de puntos de L es de Cauchy en E y, por tanto, en L. Siendo L completo, dicha sucesión de Cauchy converge en L. Siendo el límite de una sucesión convergente en un espacio métrico único, llegamos a una contradicción, pues, de un lado, la sucesión anterior converge hacia $x \in E-L$ y, por otro, converge en L. Entonces, L debe ser cerrado. c.q.d.

13.6. TEOREMA: Sea E un espacio de dimensión finita y F un espacio normado cualquiera, ambos sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Entonces, toda aplicación lineal de E en F es continua, es decir, $\mathcal{H}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$.

Demostr.: Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de E y $f \in \mathcal{H}(E,F)$. Entonces:
$f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n) \in F$.
Veamos que f es lipschitziana:
$\|f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| \leq |\lambda_1| \cdot \|f(e_1)\| + \dots + |\lambda_n| \cdot \|f(e_n)\| \leq [\|f(e_1)\| + \dots + \|f(e_n)\|] \cdot \max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\}$.
Sea $\Psi : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$ el isomorfismo que existe entre dichos espacios (Teorema 13.1).
Siendo $\max\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} = \|(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\| \leq \|\Psi^{-1}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| \leq$
$\leq \|\Psi^{-1}\| \cdot \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\|$. Luego:
$\|f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n)\| \leq [\|f(e_1)\| + \dots + \|f(e_n)\|] \cdot \|\Psi^{-1}\| \cdot \|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n\|$
Haciendo $K = [\|f(e_1)\| + \dots + \|f(e_n)\|] \cdot \|\Psi^{-1}\|$ queda probado que f es lipschit-

ziana y, en consecuencia, continua. Luego $\mathcal{H}(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$. c.s.q.d.

13.7. TEOREMA: (de F. Riesz)

Si E es un espacio normado localmente compacto, entonces E es de de dimensión finita.

Demostr.: Siendo E localmente compacto, un conjunto de E es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. (*) La esfera unidad en E $S = \{x \in E \,/\, \|x\| = 1\}$ es un conjunto cerrado y acotado en E y, por tanto, compacto. Entonces del recubrimiento abierto de S, $(B(x,\frac{1}{2}))_{x\in S}$ podemos extraer un recubrimiento finito: $S \subset B(e_1,\frac{1}{2}) \cup \dots \cup B(e_n,\frac{1}{2})$ con $\{e_k\}_{k=1}^n \subset S$. Probemos que $\{e_1,\dots,e_n\}$ es un sistema de generadores de E, con lo cual quedará visto que E es de dimensión finita.

Sea $L = \langle e_1,\dots,e_n \rangle$. Supongamos que $L \neq E$. Sea, entonces, $x \in E \setminus L$. Siendo L de dimensión finita, es cerrado. Además $\{x\}$ es compacto. Luego
$\delta = d(x,L) = \inf\{\|x-y\| / y \in L\} > 0$ (ver TOPOLOGÍA I, Tema 12, aptdo 5).

Por definición de δ, $\exists y \in L / \delta \leq \|x-y\| \leq \frac{3}{2}\delta$.

Sea $z = \dfrac{x-y}{\|x-y\|}$. Entonces $\|z\| = 1$; luego $z \in S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(e_i,\frac{1}{2})$;

por tanto, $\exists k \in \{1,\dots,n\} / z \in B(e_k,\frac{1}{2})$, es decir tal que $\|z - e_k\| < \frac{1}{2}$.

De la definición de z deducimos que $x = y + \|x-y\| z$.

Entonces $x = y + \|x-y\| z = y + \|x-y\| e_k + \|x-y\|(z-e_k)$.

Como $y, e_k \in L$, $y + \|x-y\| e_k \in L$. Entonces, por definición de δ: $\|x - (y + \|x-y\| e_k)\| \geq \delta$. Siendo $x - (y + \|x-y\| e_k) = \|x-y\|(z-e_k)$ se verifica que $\| \|x-y\| (z-e_k) \| = \|x-y\| \cdot \|z-e_k\| \geq \delta$.

Siendo $\|z-e_k\| < \frac{1}{2}$ se tiene que $\|x-y\| \|z-e_k\| < \frac{1}{2}\|x-y\|$.

Sería entonces $\delta < \frac{1}{2}\|x-y\|$ y siendo $\|x-y\| \leq \frac{3}{2}\delta$, se tendría $\delta < \frac{3}{4}\delta$, lo cual es absurdo. Debe ser entonces $L = E$. Luego E es de dimensión finita. c.s.q.d.

El corolario 13.2 a) y este teorema de Riesz los reunimos en el siguiente

13.8. TEOREMA: Un espacio normado E es de dimensión finita si y sólo si es localmente compacto.

- A partir de este resultado se prueba que en espacios normados de dimensión infinita hay subespacios no cerrados y aplicaciones lineales no continuas.

(*) Todo compacto ... es cerrado y acotado. Si el espacio métrico es

14. TEOREMA DE WEIERSTRASS.

Antes de probar el teorema de Weierstrass que dice que el conjunto de las funciones polinómicas en $I=[a,b]$ es denso en $C_\infty(I)$, probaremos un lema preliminar llamado lema de KOROVKIN.

DEFINICION: Se dice que L es un operador lineal monótono creciente en $C(I)$ si es una aplicación lineal $L: C(I) \longrightarrow C(I)$ que conserva el orden natural en $C(I)$; dadas $f,g \in C(I)$ decimos que $f \leq g$ si $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$ (evidentemente este orden no es total). (*)

14.1. LEMA: (de los operadores monótonos de KOROVKIN).

> Sea $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales monótonos de $C_\infty(I)$ en $C_\infty(I)$. Entonces, para que se verifique que
> $$\forall f \in C_\infty(I), \ (L_n f)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{C_\infty(I)} f$$
> es necesario y suficiente que $(L_n f_i)_n \xrightarrow{C_\infty(I)} f_i$ para $i=0,1,2$ siendo $f_i : x \in I \longrightarrow x^i \in \mathbb{R}$

Podemos dar también el siguiente enunciado: Dada una sucesión $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores lineales monótonos crecientes (de ser decrecientes se demuestra análogamente) las siguientes proposiciones son equivalentes:

1) $\forall f \in C_\infty(I)$, $(L_n f)_n \longrightarrow f$ en $C_\infty(I)$.

2) $(L_n f_i)_n \xrightarrow{C_\infty(I)} f_i$, $i=0,1,2$, siendo $f_i(x)=x^i$

3) $(L_n f_0)_n \xrightarrow{C_\infty(I)} f_0$ y $\lim_{n\to\infty} (L_n \phi_t)(t) = 0$, $\forall t \in I$ y este límite es uniforme, siendo $\phi_t(x) = (t-x)^2$, es decir, $(L_n f_0)_n \longrightarrow f_0$ en $C_\infty(I)$ y $\forall \varepsilon>0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n>\nu \Rightarrow |(L_n\phi_t)(t)| < \varepsilon$.

Demostración: 1) ⇒ 2)| Trivial, pues $f_i \in C_\infty(I)$, $i=0,1,2$.

2) ⇒ 3)| Dado $t\in I$, $\forall x \in I$, $\phi_t(x) = (t-x)^2 = t^2 - 2tx + x^2 = t^2 f_0(x) - 2t f_1(x) + f_2(x)$. Luego $\phi_t = t^2 f_0 - 2t f_1 + f_2$.

Siendo L_n un operador lineal, $L_n\phi_t = L_n(t^2 f_0 - 2t f_1 + f_2) = t^2 L_n f_0 - 2t L_n f_1 + L_n f_2$

Luego $(L_n\phi_t)(t) = t^2 (L_n f_0)(t) - 2t(L_n f_1)(t) + (L_n f_2)(t) =$
$= t^2(L_n f_0)(t) - t^2 f_0(t) - 2t(L_n f_1)(t) + 2t f_1(t) + (L_n f_2)(t) - f_2(t)$

pues $t^2 f_0(t) = t^2$, $2t f_1(t) = 2t t = 2t^2$, $f_2(t) = t^2$.

Luego $(L_n\phi_t)(t) = t^2[L_n f_0 - f_0](t) - 2t[L_n f_1 - f_1](t) + [L_n f_2 - f_2](t)$

Veamos que $\forall \varepsilon>0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow |(L_n\phi_t)(t)| < \varepsilon$.

Siendo I compacto, es acotado; sea M una cota superior de I.
Como $(L_n f_0)_n \longrightarrow f_0$ uniformemente (en $C_\infty(I)$), dado $\varepsilon>0$, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu_0$ entonces $\|L_n f_0 - f_0\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |(L_n f_0)(x) - f_0(x)| < \frac{\varepsilon}{3M^2}$; en particular $|(L_n f_0)(t) - f_0(t)| < \frac{\varepsilon}{3M^2}$ si $n \geq \nu_0$.
Como $(L_n f_1)_n \longrightarrow f_1$ en $C_\infty(I)$, dado $\varepsilon>0$, existe $\nu_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq \nu_1$ entonces $\|L_n f_1 - f_1\| < \frac{\varepsilon}{3|2M|}$; en particular, $|(L_n f_1)(t) - f_1(t)| < \frac{\varepsilon}{3|2M|}$, si $n \geq \nu_1$.
Además, como $(L_n f_2)_n \to f_2$ en $C_\infty(I)$ dado $\varepsilon>0$, existe $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|L_n f_2 - f_2\| < \frac{\varepsilon}{3}$, si $n \geq \nu_2$. Entonces,
dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \nu = \max(\nu_0, \nu_1, \nu_2) \in \mathbb{N} \,/\, n \geq \nu \Rightarrow |(L_n \phi_t)(t)| =$

$$= |t^2 [L_n f_0 - f_0](t) - 2t[L_n f_1 - f_1](t) + [L_n f_2 - f_2](t)| \leq$$
$$\leq |t^2|\, |(L_n f_0)(t) - f_0(t)| + |2t| \cdot |(L_n f_1)(t) - f_1(t)| + |(L_n f_2)(t) - f_2(t)| \leq$$
$$\leq M^2\, |(L_n f_0)(t) - f_0(t)| + |2M| \cdot |(L_n f_1)(t) - f_1(t)| + |(L_n f_2)(t) - f_2(t)| \leq$$
$$\leq M^2 \frac{\varepsilon}{3M^2} + |2M| \frac{\varepsilon}{3|2M|} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$ y esto cualquiera que sea $t \in I$. (*)

$\underline{3) \Rightarrow 1)}|$ Sea $f \in C_\infty(I)$. Queremos ver que $(L_n f)_n \longrightarrow f$ en $C_\infty(I)$.
Siendo f continua en I e I compacto (*), f es uniformemente continua en I. Luego:

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, \underset{t,x\in I}{|t-x|} < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$$

Además, si $t, x \in I$ y $|t-x| \geq \delta \Rightarrow \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \geq 1$. Luego:

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\frac{\|f\|}{\delta^2}(t-x)^2$$

Luego $\forall t, x \in I$, $-\varepsilon - 2\frac{\|f\|}{\delta^2}(t-x)^2 \leq f(t) - f(x) \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|}{\delta^2}(t-x)^2$

Siendo $f_0(x) = 1$ y $\phi_t(x) = (t-x)^2$, $\forall t, x \in I$, tenemos que dado $t \in I$, $\forall x \in I$, $-\varepsilon f_0(x) - 2\frac{\|f\|}{\delta^2}\phi_t(x) \leq f(t) f_0(x) - f(x) \leq$
$\leq \varepsilon f_0(x) + 2\frac{\|f\|}{\delta^2}\phi_t(x)$ y, por definición del orden natural en $C_\infty(I)$,

$$\forall t \in I, \quad -\varepsilon f_0 - 2\frac{\|f\|}{\delta^2}\phi_t \leq f(t)\cdot f_0 - f \leq \varepsilon f_0 + 2\frac{\|f\|}{\delta^2}\phi_t$$

· Por hipótesis, L_n es un operador lineal monótono creciente, para todo n.
Luego:

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t \in I, -\varepsilon L_n f_0 - 2\frac{\|f\|}{\delta^2} L_n \phi_t \leq f(t) L_n f_0 - L_n f \leq \varepsilon L_n f_0 + 2\frac{\|f\|}{\delta^2} L_n \phi_t$$

Por tanto, $\forall t \in I$, $-\varepsilon (L_n f_0)(t) - 2\frac{\|f\|}{\delta^2}(L_n \phi_t)(t) \leq f(t)\cdot(L_n f_0)(t) - (L_n f)(t) \leq$
$\leq \varepsilon (L_n f_0)(t) + 2\frac{\|f\|}{\delta^2}(L_n \phi_t)(t)$ y, en consecuencia:

$$|f(t)(L_n f_0)(t) - (L_n f)(t)| \leq |\varepsilon (L_n f_0)(t) + 2\frac{\|f\|}{\delta^2}(L_n \phi_t)(t)| \leq$$

$\leq \varepsilon |(L_n f_0)(t)| + 2 \frac{\|f\|}{\delta^2} |(L_n \phi_t)(t)|$ y esto cualesquiera que sean $t \in I$ y $n \in \mathbb{N}$. Entonces tomando límites para $n \to \infty$, la desigualdad se mantiene; como, además, se verifica:

$$\lim_{n\to\infty} |f(t)\,(L_n f_0)(t) - (L_n f)(t)| = |f(t) \lim_{n\to\infty}(L_n f_0)(t) - \lim_{n\to\infty}(L_n f)(t)| =$$

$$= |f(t)\cdot f_0(t) - \lim_{n\to\infty}(L_n f)(t)| = |f(t) - \lim_{n\to\infty}(L_n f)(t)|$$, pues $(L_n f_0)_n \to f_0$ y $f_0(t) = 1$. Por tanto, tenemos:

$$|f(t) - \lim_{n\to\infty}(L_n f)(t)| \leq \varepsilon |\lim_{n\to\infty}(L_n f_0)(t)| + 2\frac{\|f\|}{\delta^2} |\lim_{n\to\infty}(L_n \phi_t)(t)| =$$

$= \varepsilon$, pues $\lim_{n\to\infty}(L_n f_0)(t) = f_0(t) = 1$ y $\lim_{n\to\infty}(L_n \phi_t)(t) = 0$ por hipótesis. Luego $|f(t) - \lim_{n\to\infty}(L_n f)(t)| \leq \varepsilon$, $\forall t \in I$, $\forall \varepsilon > 0$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} L_n f = f$ en $C_\infty(I)$. csqd.

14.2. TEOREMA: (de Weierstrass).

El conjunto de las funciones polinómicas sobre un compacto I es una parte densa de $C_\infty(I)$. Es decir, toda función continua de I en $\mathbb{R}$ es límite uniforme (en $C_\infty(I)$) de una sucesión de polinomios.

Demostr.: Probaremos el teorema para $I = [0,1]$, para simplificar las notaciones. Para cada natural n definimos el operador:

$$B_n : f \in C_\infty(I) \longmapsto B_n f \in C_\infty(I)$$

siendo $(B_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$, $\forall x \in [0,1]$

Fácilmente se comprueba que B_n es un operador lineal ($B_n(f+g) = B_n f + B_n g$ y $B_n(\lambda f) = \lambda B_n f$) y monótono creciente (si $f \leq g \Rightarrow B_n f \leq B_n g$). Además, $\forall f \in C_\infty(I)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n f$ es una función polinómica. Probemos que $\forall f \in C_\infty(I)$, $(B_n f)_n \longrightarrow f$ en $C_\infty(I)$, con lo cual quedará probado el teorema. $(B_n f)_n$ es la sucesión de polinomios de Bernstein de f ~~de~~ Según el lema de Korovkin, para ver que $(B_n f)_n \to f$ en $C_\infty(I)$ es suficiente que probemos que: $(B_n f_0)_n \to f_0$, $(B_n f_1)_n \to f_1$ y $(B_n f_2)_n \to f$, siendo $f_i : x \in I \to x^i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 2$.

- $(B_n f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f_0\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$

Luego $(B_n f_0)(x) = f_0(x)$, $\forall x \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n f_0 = f_0$ y, en consecuencia, $(B_n f_0)_n \longrightarrow f_0$ en $C_\infty(I)$.

– $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I,\ (B_n f_1)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f_1\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\overset{(*)}{=}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=$

$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}=x\sum_{k'=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k'![(n-1)-k']!}x^{k'}(1-x)^{(n-1)-k'}=$

$=x(x+1-x)^{n-1}=x=f_1(x).$

Luego $\forall n\in\mathbb{N}$, $B_n f_1=f_1$ y, por tanto, $(B_n f_1)_n\to f_1$ en $C_\infty(I)$.

– $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I,\ (B_n f_2)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}=$

$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{1+k-1}{n}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{x}{n}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\frac{k-1}{n}x^k(1-x)^{n-k}=$

$\overset{(*)}{=}\frac{1}{n}x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2}x^2x^{k-2}(1-x)^{n-k}=$

$=\frac{1}{n}x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}=$

$=\frac{1}{n}x\sum_{k'=0}^{n-1}\binom{n-1}{k'}x^{k'}(1-x)^{(n-1)-k'}+\frac{n-1}{n}x^2\sum_{k''=0}^{n-2}\binom{n-2}{k''}x^{k''}(1-x)^{(n-2)-k''}=$

$=\frac{1}{n}x\,(x+1-x)^{n-1}+\frac{n-1}{n}x^2(x+1-x)^{n-2}=\frac{1}{n}x+\frac{n-1}{n}x^2$

Luego, $\forall x\in I$, $\lim_{n\to\infty}(B_n f_2)(x)=\lim_n\frac{1}{n}x+\lim_n\frac{n-1}{n}x^2=x^2$, pues I es acotado.

Luego $(B_n f_2)_n\to f_2$ en $C_\infty(I)$.

Luego, en virtud del lema de Korovkin, toda función continua f es límite uniforme de $(B_n f)_n$ que es una sucesión de funciones polinómicas definidas en I. csqd.

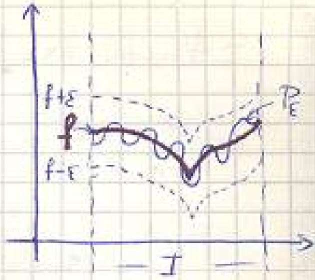
OBSERVACIONES: ① Si $I=[a,b]$, existe un homeomorfismo $\alpha: t\in[a,b]\longrightarrow\frac{t-a}{b-a}\in[0,1]$ que induce un homeomorfismo

$$\varphi: C([0,1])\longrightarrow C([a,b])$$
$$f\longmapsto\varphi(f)=f\circ\alpha$$

Trivialmente, φ lleva polinomios en polinomios; además como homeomorfismo, conserva la densidad de un conjunto. Luego, si las funciones polinómicas de $C([0,1])$ es denso en dicho espacio, las funciones polinómicas de $C([a,b])$ son un subespacio denso del espacio topológico $C([a,b])$.

② Es esencial en el teorema la compacidad de I.

③ El significado geométrico del teorema es que cualquiera que sea $f \in C_\infty(I)$ y cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe un polinomio P_ε cuya gráfica está en la ε-banda de f, es decir, tal que $P_\varepsilon \in B(f, \varepsilon)$. Luego, las funciones continuas se pueden aproximar tanto como se desee por polinomios.



④ El lema de Korovkin es también cierto si consideramos las funciones $f_0 : x \in I \longrightarrow 1$, $f_1 : x \in I \longrightarrow \cos x$, $f_2 : x \in I \longrightarrow \operatorname{sen} x$, y se utiliza para la demostración de que los polinomios trigonométricos son densos en $C_\infty(I)$.

Daremos a continuación, sin demostración, una generalización debida a Stone del teorema de Weierstrass. La demostración de este teorema puede verse en "Principios de Analisis Matemático" de Rudin o "Analisis Matemático II" de F. Castillo.

<u>14.3. TEOREMA</u>: (de Stone-Weierstrass).

Sea M un espacio métrico compacto y $C_\infty(M)$ el álgebra de las funciones continuas definidas en M y con valores en $\mathbb{R}$ dotado de la norma $\|f\| = \max_{x \in M} |f(x)|$. Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C_\infty(M)$. Entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C_\infty(M)$ si y solo si $\mathcal{A}$ separa puntos y no desaparece en ningún punto.

<u>Observaciones</u>: ① Recordemos que un álgebra sobre $\mathbb{K}$ es un conjunto A dotado de dos leyes de composición interna $+$ y $\times$ y una ley externa $\cdot$ de modo que respecto de las dos primeras el conjunto es un anillo, respecto de la primera y la tercera es un espacio vectorial y verificando además la propiedad siguiente: $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall a, b \in A$, $\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b$.

Un álgebra dotada de una norma se dice un álgebra normada; para que una aplicación $\|\cdot\| : A \to \mathbb{R}$ sea una norma, a parte de verificar las propiedades de las normas en espacios vectoriales, debe satisfacer la propiedad siguiente: $\forall a, b \in A$, $\|ab\| \le \|a\| \cdot \|b\|$.

② Decir que $\mathcal{A}$, subalgebra de $C_\infty(M)$, separa puntos equivale a decir que dados $x \text{ y } y \in M$, $x \ne y$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \ne f(y)$.

③ Decir que $\mathcal{A}$ no desaparece en ningún punto equivale a decir que $\forall x \in M$, $\exists f \in \mathcal{A} \,/\, f(x) \ne 0$.

④ Este teorema generaliza al de Weierstrass, pues $C_\infty(I)$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ y el conjunto de las funciones polinómicas definidas no desaparece en ningún punto. Este teorema nos dice que no es necesario que I sea un intervalo de $\mathbb{R}$; basta con que sea compacto. Y el teorema de Weierstrass es cierto para los compactos de $\mathbb{R}^n$, en los cuales los polinomios tendrán n variables.

⑤ Tambien se puede probar que el conjunto de polinomios trigonométricos, es decir, polinomios de la forma $P(x) = a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + b_{n-1}\operatorname{sen}(n-1)x + \dots + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_0$, es una subalgebra de $C_\infty(I)$ que separa puntos y no desaparece en ningun punto.

15. Compacidad en $C_\infty(I)$: Teorema de Ascoli-Arzela.

$C_\infty(I)$ es un espacio normado de dimensión infinita y, por tanto no es localmente compacto. Por ello no es cierto que los compactos de $C_\infty(I)$ sean los cerrados y acotados y solo ellos. Sí es cierto, como en todo espacio métrico, que todo compacto de $C_\infty(I)$ es cerrado y acotado, pero hay partes de $C_\infty(I)$ cerradas, acotadas y no compactas. El siguiente teorema, de Ascoli-Arzela, da una caracterización de los compactos en $C_\infty(I)$. Veamos antes una definición y unas consecuencias inmediatas:

DEFINICION: Un conjunto A de $C_\infty(I)$ se dice que es equicontinuo si y solo si se verifica que:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \,/\, x,y\in I,\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon,\ \forall f\in A. \quad (*)$$

15.1. PROPOSICION: a) Si A es un conjunto finito de $C_\infty(I)$, A es equicontinuo.

b) Si A es un conjunto de $C_\infty(I)$ equicontinuo, entonces, su adherencia $\bar{A}$ es equicontinua.

Demostr.: a) Sea $A=\{f_1,\dots,f_n\}\subset C_\infty(I)$. Siendo I compacto, las funciones $f_1,\dots,f_n$ son uniformemente continuas en I. Luego Dado $k\in\{1,\dots,n\}$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_k>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta_k \Rightarrow |f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon$.

Sea $\delta = \min\limits_{1\le k\le n} \delta_k$, que es positivo pues $\{\delta_k\}_{k=1}^n$ es finito. Entonces

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta \Rightarrow |f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon,\ \forall f_k\in A.$$

b) Se trata de probar que $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon, \forall f\in\bar{A}$

Sea $f\in\bar{A}$; entonces, $\forall r>0$, $B(f,r)\cap A\neq\emptyset$. En particular, dado $\varepsilon>0$, $\exists g_f\in A \,/\, g_f\in B(f,\frac{\varepsilon}{3})$, o bien tal que $\|f-g_f\|<\frac{\varepsilon}{3}$

Por hipótesis A es equicontinuo; Luego:

dado $\varepsilon>0$, $\exists\delta'>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta' \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon/3, \forall g\in A$

Por tanto, dado $\varepsilon>0$, $\exists\, \delta=\delta'>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq$

$\leq |f(x)-g_f(x)| + |g_f(x)-g_f(y)| + |g_f(y)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\ \forall f\in \bar{A}$.

15.2. TEOREMA: (de Ascoli-Arzela).

Un conjunto A de $C_\infty(I)$ es compacto si y solo si es cerrado, acotado y equicontinuo.

Demostr.: $\Rightarrow$| Si A es compacto en $C_\infty(I)$, como $C_\infty(I)$ es un espacio métrico, A es cerrado y acotado. Veamos que es equicontinuo. Evidentemente, $\forall\varepsilon>0$, $A\subset \bigcup_{f\in A} B(f,\varepsilon/3)$. Tenemos un recubrimiento abierto de A del cual, por ser A compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito. Es decir, existen $f_1,\dots,f_n\in A$ tal que

$$A\subset B(f_1,\varepsilon/3)\cup\dots\cup B(f_n,\varepsilon/3) \qquad (I)$$

El conjunto finito $C=\{f_1,\dots,f_n\}$ es equicontinuo, por la proposición anterior. Luego, dado $\varepsilon>0$,

$$\exists\,\delta>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta \Rightarrow |f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon/3,\ 1\leq k\leq n. \quad (II)$$

Entonces, dado $f\in A$, $\exists\, k\in\{1,\dots,n\} \,/\, f\in B(f_k,\varepsilon/3)$ según (I).

Luego dados $x,y\in I$, si $|x-y|<\delta$ se verifica que

$|f(x)-f(y)|\leq |f(x)-f_k(x)|+|f_k(x)-f_k(y)|+|f_k(y)-f(y)|<$

$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$, pues $|f_k(x)-f_k(y)|<\varepsilon/3$ por (II) y

$|f(x)-f_k(x)|<\varepsilon/3,\ \forall x\in I$, pues $f\in B(f_k,\varepsilon/3)\Rightarrow \|f-f_k\|<\varepsilon/3$ o bien $\sup_{x\in I}|f(x)-f_k(x)|<\varepsilon/3$. En definitiva:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0 \,/\, \underset{x,y\in I}{|x-y|}<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon,\ \forall f\in A.$$

Luego A es equicontinuo.

$\Leftarrow$| Sea A un conjunto cerrado, acotado y equicontinuo de $C_\infty(I)$. Queremos ver que A es compacto, o lo que es equivalente, que toda sucesión $(f_n)_n$ de elementos de A tiene un valor de adherencia en A (o una subsucesión convergente en A).

Sea $\{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\}$ una parte densa y numerable en I, que existe (por ejemplo: $I\cap\mathbb{Q}$).

Por hipótesis, A es acotado, es decir, $\exists\, K>0 \,/\, A\subset B(0,K)$, o lo que es equivalente, $\exists\, K>0 \,/\, \forall f\in A,\ \|f\|<K$, o bien, $\exists\, K>0 \,/\, \forall x\in I, \forall f\in A,\ |f(x)|<K$.

Entonces, dada la sucesión $(f_n)_n$ en A y $x_1\in I$, la sucesión de números reales $(f_n(x_1))_n$ es acotada y, por tanto, admite una subsucesión convergente(*) que denotamos por $(f_{n_1}(x_1))_{n_1}$. Entonces

$(f_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(f_n)_n$ y, por tanto, una sucesión de puntos de Δ. Con esta sucesión funcional y el punto $x_2 \in I$ construimos la sucesión de números reales $(f_{1n}(x_2))_n$ que es acotada y, por tanto, admite una subsucesión convergente $(f_{2n}(x_2))_n$. Procediendo de este modo, obtenemos las sucesiones $(f_{1n})_n$, $(f_{2n})_n, \dots, (f_{Kn})_n, \dots$ cada una de las cuales es subsucesión de la anterior y todas ellas subsucesiones de $(f_n)_n$. Estas sucesiones están representadas en el cuadro siguiente:

$$
\begin{array}{l}
(f_{1n})_n = (f_{11}, f_{12}, f_{13}, \dots\dots, f_{1K}, \dots\dots) \\
(f_{2n})_n = (f_{21}, f_{22}, f_{23}, \dots\dots, f_{2K}, \dots\dots) \\
(f_{3n})_n = (f_{31}, f_{32}, f_{33}, \dots\dots, f_{3K}, \dots\dots) \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -} \\
(f_{Kn})_n = (f_{K1}, f_{K2}, f_{K3}, \dots\dots, f_{KK}, \dots\dots) \\
\text{- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -}
\end{array}
$$

Cada sucesión $(f_{Kn})_n$ es convergente en x_K. Consideremos la sucesión diagonal $(f_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $K\in\mathbb{N}$, los términos de la sucesión $(f_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$ son términos de $(f_{Kn})_{n\in\mathbb{N}}$, salvo, quizás, los $K-1$ primeros términos. Por tanto, la sucesión diagonal $(f_{nn})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en todos los puntos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probaremos que $(f_{nn})_n$ es convergente en $C_\infty(I)$, para lo cual es suficiente que veamos que $(f_{nn})_n$ es uniformemente de Cauchy (en $C_\infty(I)$), con lo cual será convergente, pues $C_\infty(I)$ es completo. Es decir, queremos probar que: $\forall \varepsilon>0, \exists \nu\in\mathbb{N} \,/\, p,q \geq \nu \Rightarrow |f_{pp}(x)-f_{qq}(x)|<\varepsilon, \forall x\in I$

Siendo Δ equicontinuo, dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que si $x,y\in I$ y $|x-y|<\delta$ entonces $|f_{nn}(x)-f_{nn}(y)|<\varepsilon/3$, $\forall n\in\mathbb{N}$. (III)

Como I es compacto y $\{x_n \,/\, n\in\mathbb{N}\}$ es denso en I, $\{B(x_n,\delta)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de I, del cual podemos extraer un subrecubrimiento finito, es decir, existen $i_1,\dots,i_K\in\mathbb{N}$ tales que:

$$I \in B(x_{i_1},\delta)\cup\dots\cup B(x_{i_K},\delta).$$

Las sucesiones de números reales $(f_{nn}(x_j))_n$, $j\in\{i_1,\dots,i_K\}$, son convergentes y, por tanto, de Cauchy en $\mathbb{R}$. Luego, dado $j\in\{i_1,\dots,i_K\}$ y dado $\varepsilon>0$, $\exists \nu_j\in\mathbb{N} \,/\, p,q>\nu_j \Rightarrow |f_{pp}(x_j)-f_{qq}(x_j)|<\varepsilon/3$.

Sea $\nu=\max\{\nu_j \,/\, j\in\{i_1,\dots,i_K\}\}$. Luego

dado $\varepsilon>0$, $\exists \nu\in\mathbb{N} \,/\, p,q>\nu \Rightarrow |f_{pp}(x_j)-f_{qq}(x_j)|<\varepsilon/3$, $\forall j\in\{i_1,\dots,i_K\}$.

Veamos que este ν es el que buscamos.

Dado $x\in I$, $\exists j\in\{i_1,\dots,i_K\} \,/\, x\in B(x_j,\delta)$, es decir, tal que $|x-x_j|<\delta$.

Entonces, si $p, q > \nu \Rightarrow |f_{pp}(x) - f_{qq}(x)| \leq |f_{pp}(x) - f_{pp}(x_j)| +$
$+ |f_{pp}(x_j) - f_{qq}(x_j)| + |f_{qq}(x_j) - f_{qq}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, en virtud de (III) y lo dicho anteriormente, y esto cualquiera que sea $x \in I$. Luego $(f_{nn})_n$ es uniformemente de Cauchy, es decir, es de Cauchy en $C_\infty(I)$ y, por tanto, convergente en $C_\infty(I)$. Como $(f_{nn})_n$ es una subsucesión de $(f_n)_n$, hemos probado que toda sucesión en A admite una subsucesión convergente en $C_\infty(I)$. Siendo A cerrado, el límite de esta subsucesión pertenece a A. Luego, toda sucesión de A admite una subsucesión convergente hacia un punto de A (una función de A) y, por tanto, A es compacto. c.q.d.

<u>OBSERVACION</u> ① En realidad, en la condición suficiente de este teorema, no se ha utilizado la acotación de A sino, más bien, la acotación puntual, es decir, que $\forall x \in I$, $\{|f(x)| / f \in A\}$ es acotado. Si A es acotado es puntualmente acotado, pero el recíproco no es cierto.

② La condición suficiente del teorema de Ascoli-Arzela puede enunciarse en estos términos: "Un conjunto A puntualmente acotado y equicontinuo de $C_\infty(I)$ es relativamente compacto, es decir, de adherencia compacta", pues si A no fuera cerrado, como $(f_{nn})_n$ converge en $C_\infty(I)$, $\lim_n f_{nn}$ es un punto adherente a A