2ª PARTE: CALCULO DIFERENCIAL

TEMA 3º: CALCULO DIFERENCIAL EN ESPACIOS NORMADOS.

Vamos a tratar en este capítulo de funciones $f: U \subset E \to F$ donde E y F son espacios normados sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y U es un abierto de E. En particular, las aplicaciones $f: U \subset \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ (calculo diferencial de varias variables, reales o complejas).

1. DEFINICION: Interpretación geométrica. PRIMERAS PROPIEDADES

DEFINICION: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$, U un abierto de E y $f: U \subset E \to F$ una aplicación. Se dice que f es diferenciable o derivable en el sentido de FRECHET en un punto $a \in U$ si existe una aplicación lineal y continua $Df(a)$ de E en F tal que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{\|x-a\|} = 0$$

Que este límite sea cero es equivalente a que

$$\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0 \quad \text{ó tambien} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

En el caso de que $E = \mathbb{K}^m$ y $F = \mathbb{K}^n$, si $f: U \subset \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ es diferenciable en el punto $a = (a_1, \dots, a_m) \in U$, $Df(a)$ es una matriz $\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$, pues $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \cong \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

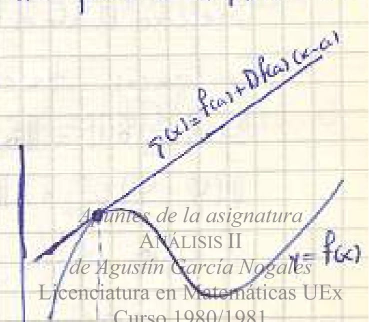
Dado $(x_1, \dots, x_m) \in U$, $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$; convenimos en llamar $f_1(x_1, \dots, x_m) = y_1, \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) = y_n$ y decimos que $f_1, \dots, f_n$ son las componentes de f. En este caso, la definición queda así: $f: U \subset \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ es diferenciable en el punto $(a_1, \dots, a_m) \in U$ si existe una matriz $\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$ tal que

$$\lim_{(x_1,\dots,x_m) \to (a_1,\dots,a_m)} \frac{[f_1(x_1,\dots,x_m), \dots, f_n(x_1,\dots,x_m)] - [f_1(a_1,\dots,a_m), \dots, f_n(a_1,\dots,a_m)] - (x_1-a_1, \dots, x_m-a_m)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}}{\|(x_1-a_1, \dots, x_m-a_m)\|}$$

$$= (0, \overset{n}{\dots}, 0)$$

En el caso $E = F = \mathbb{K}$, $Df(a)$, si existe, es un elemento de $\mathbb{K}$ pues $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$. La definición queda así:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - Df(a)(x-a)}{x-a} = 0 \iff Df(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

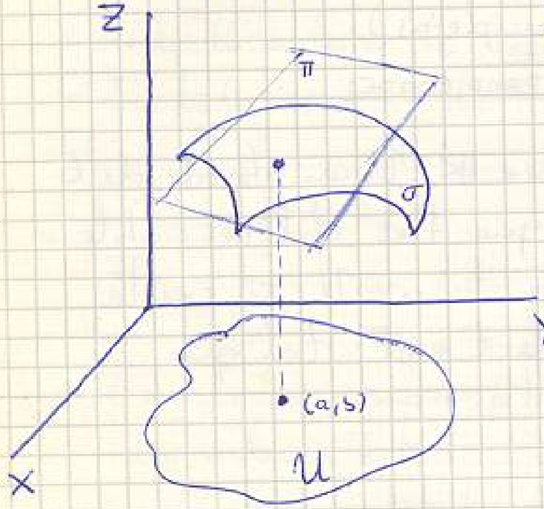


* INTERPRETACION GEOMETRICA: 1 CASO $E = F = \mathbb{R}$.

Si $f: U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $a \in U$ existe $Df(a) \in \mathbb{R}$ tal que $Df(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$

Entonces la función f dada y la función $g(x)=f(a)+Df(a)(x-a)$ tienen en el punto $(a,f(a))$ un contacto de orden 1. (*)
De la función g, cuya gráfica es una recta, decimos que es la tangente a la curva de ecuación $y=f(x)$ en el punto $(a,f(a))$.

② Caso $E=\mathbb{R}^2$, $F=\mathbb{R}$. Si $f: \mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ es diferenciable en el punto $(a,b)\in\mathcal{U}$, existe $Df(a,b)=\binom{p}{q}$ tal que



$$\lim_{(x,y)\to(a,b)}\frac{f(x,y)-f(a,b)-(x-a,y-b)\binom{p}{q}}{\|(x-a,y-b)\|}=0 \qquad (\mathrm{I})$$

$z=f(x,y)$ es la ecuación de una superficie σ de $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $(a,b,f(a,b))$
$z=f(a,b)+(x-a,y-b)\binom{p}{q}$ es la ecuación de un plano Π que pasa por el punto $(a,b,f(a,b))$. Entonces, la condición (I) implica que σ y Π tiene en $(a,b,f(a,b))$ un contacto de orden 1, es decir, que Π es tangente a σ en el punto $(a,b,f(a,b))$. Decir, entonces, que f tiene derivada en el punto (a,b) significa, geométricamente, que la gráfica de f tiene plano tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$.

<u>1.1. PROPOSICION</u>: Si $f:\mathcal{U}\subset E\to F$ es diferenciable en el punto $a\in\mathcal{U}$, entonces, su diferencial en el punto a es única.

Demostr.: Supongamos que φ y ψ son funciones lineales continuas de E en F tales que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\varphi(h)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-\psi(h)}{\|h\|}=0$$

Entonces $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(h)-\psi(h)}{\|h\|}=0 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{(\varphi-\psi)(h)}{\|h\|}=0 \qquad (\mathrm{II})$

Probemos que $\forall\varepsilon>0$, $\|\varphi-\psi\|\leq\varepsilon$, con lo cual quedará visto que $\varphi=\psi$.
Según (II), dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta_1>0 / \underset{a+h\in\mathcal{U}}{\|h\|\leq\delta_1} \Rightarrow \|(\varphi-\psi)(h)\|<\varepsilon\|h\|$

Siendo $\mathcal{U}$ abierto y $a\in\mathcal{U}$, $\exists r>0 / B(a,r)\subset\mathcal{U}$. Sea $\delta=\inf(\delta_1,\frac{r}{2})$.
Entonces $\forall x\in E-\{0\}$, $h=\frac{x}{\|x\|}\delta$ es tal que $a+h\in\mathcal{U}$, pues $\|a+h-a\|=\|h\|=$ $=\|\frac{x}{\|x\|}\delta\|=\|\delta\|\leq\frac{r}{2}<r$, y $\|h\|\leq\delta_1$. Luego:
$\|(\varphi-\psi)(\frac{x}{\|x\|}\delta)\|\leq\varepsilon\|\frac{x}{\|x\|}\delta\| \Rightarrow \frac{\delta}{\|x\|}\|(\varphi-\psi)(x)\|\leq\frac{\delta}{\|x\|}\varepsilon\|x\| \Rightarrow \|(\varphi-\psi)(x)\|\leq\varepsilon\|x\|$
y esto cualquiera que sea $x\in E$. Luego $\|\varphi-\psi\|\leq\varepsilon$. c.s.q.d.

Geométricamente, dos variedades lineales tangentes (si existe alguna) a una función de E en F en un punto coinciden.

1.2. PROPOSICION: Si $f: U \subset E \to F$ es diferenciable en $a \in U$ y la diferencial es $Df(a)$, y se cambian las normas de E y F por otras equivalentes (en realidad basta con que la nueva norma de E sea más fina que la primitiva y la nueva norma de F sea menos fina que la anterior) entonces f sigue siendo diferenciable en a y tiene la misma diferencial $Df(a)$.

Demostr.: Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ las normas primitivas de E y F y $\|\cdot\|_*$ y $\|\cdot\|'_*$ las nuevas normas sobre E y F.

Si $\|\cdot\|_*$ es más fina que $\|\cdot\|$, existe $p>0$ tal que $\|x\| \leq p\|x\|_*$, $\forall x \in E$

Si $\|\cdot\|'_*$ es menos fina que $\|\cdot\|'$, existe $q>0$ tal que $\|y\|'_* \leq q\|y\|'$, $\forall y \in F$.

Entonces, $\forall x \in E - \{a\}$

$$0 \leq \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|'_*}{\|x-a\|_*} \leq pq \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|'}{\|x-a\|}$$

El último término tiende a cero cuando $x \to a$. Luego

$$\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|'_*}{\|x-a\|_*} = 0$$

Por tanto, f sigue siendo diferenciable en a y la diferencial es la misma.

Deducimos que si E y F son de dimensión finita, podemos utilizar en el cálculo diferencial cualquier norma sobre E y F, pues todas las normas en E y F son equivalentes.

1.3. PROPOSICION: Si $f: U \subset E \to F$ es diferenciable en $a \in U$, entonces f es continua en a.

Demostr.: Queremos ver que $\lim_{x\to a} \|f(x)-f(a)\| = 0$

Por hipótesis, $\lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} = 0$

Entonces, dado $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0 \,/\, \|x-a\| < \delta \underset{x\in U}{} \Rightarrow \|f(x)-f(a)-Df(a)(x-a)\| < \varepsilon\|x-a\|$.

Luego si $\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)\| < \|Df(a)(x-a)\| + \varepsilon\|x-a\| \leq \|Df(a)\|\|x-a\| + 1\cdot\|x-a\| = (\|Df(a)\|+1)\|x-a\|$

Este último término tiende a cero cuando $x \to a$, pues $\|Df(a)\|+1$ es constante. Luego $\lim_{x\to a}\|f(x)-f(a)\| = 0$. csqd.

1.4. PROPOSICION: Si $f: U \subset E \to F$ es "diferenciable" en a, pero sin exigir que $Df(a)$ sea continua, y f es continua en a, entonces $Df(a)$ es continua.

Demostr.: Sea $Df(a) \in \mathcal{H}(E,F)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} = 0 \qquad (I)$$

Se trata de ver que si f es continua en a, entonces $Df(a) \in \mathcal{L}(E,F)$, es decir $Df(a)$ es la diferencial de f en a.

Es suficiente probar que $Df(a)$ es continua en O (Teorema 6.1, Tema 1º).

Veamos entonces que dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0 / \|h\|<\delta \Rightarrow \|Df(a)(h)\|<\varepsilon$

Según (I), existe $\delta_1>0 / \|h\|<\delta_1 \Rightarrow \|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|<\|h\|$

Siendo f continua en a se tiene que

dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta_2>0 / \|h\|<\delta_2 \Rightarrow \|f(a+h)-f(a)\|<\frac{\varepsilon}{2}$

Sea $\delta = \inf\{\delta_1, \delta_2, \varepsilon/2\}$. Entonces,

$\|h\|<\delta \Rightarrow \|h\|<\delta_1 \Rightarrow \|Df(a)(h)\| < \|f(a+h)-f(a)\| + \|h\| \Rightarrow$

$\xRightarrow{\|h\|<\varepsilon/2} \|Df(a)(h)\| < \|f(a+h)-f(a)\| + \varepsilon/2 \xRightarrow{\|h\|<\delta_2} \|Df(a)(h)\| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. csqd.

<u>EJEMPLOS</u>: ① "Si $f: E \to F$ es una aplicación constante, entonces es diferenciable en todo punto y su diferencial en todo punto es la aplicación lineal nula".

Sea $a \in E$; entonces, $\forall h \in E$, $f(a+h)=f(a)$. Evidentemente, $O \in \mathcal{L}(E,F)$.

Veamos que si hacemos $Df(a)=O$, entonces $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = 0$.

Siendo $\forall h \in E$, $f(a+h)=f(a)$ y $Df(a)(h)=O$, tenemos que

$\forall h \in E$, $\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = 0$ y, por tanto, $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = 0$,

como queríamos ver.

En particular, si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es constante, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y)=c$, la gráfica de la función (el plano $z=c$) tiene plano tangente en $(a,b,f(a,b))$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, que es el plano de ecuación $z = f(a,b) + Df(a,b)(x-a, y-b) = f(a,b) = c$ pues $Df(a,b)=O$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$.

② "Si $f: E \to F$ es una aplicación lineal y continua entonces es diferenciable en todo punto de E y su diferencial en todo punto es la misma función, es decir, $\forall a \in E$, $Df(a)=f$."

$Df(a) = f \in \mathcal{L}(E,F)$ por hipótesis. Veamos que "funciona" como diferencial.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h-a)-f(h)}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(h)}{\|h\|} = 0.$$

En particular, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, su gráfica $z=f(x,y)$ es un plano que pasa por el origen y no contiene al eje Z. Entonces, en todo punto $z=f(x,y)$ admite plano tangente y es el mismo plano: dado el punto $(a,b,f(a,b))$, el plano tangente a $z=f(x,y)$ en dicho punto tiene de

③ "Sean $E_1, \ldots, E_n, F$ espacios normados y $f: E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ una aplicación n-lineal ($n \geq 2$) y continua. Entonces f es diferenciable en todo punto $(a_1, \ldots, a_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$ y su diferencial en dicho punto es la aplicación

$$Df(a_1,\ldots,a_n): (h_1,\ldots,h_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \longmapsto f(h_1, a_2, \ldots, a_n) + f(a_1, h_2, a_3, \ldots, a_n) + \ldots + f(a_1, \ldots, a_{n-1}, h_n) \in F$$

Haremos la demostración para $n=2$ (en general, es análogo).

Sea $f: E \times F \to G$ una aplicación bilineal y continua. Entonces $\forall (a,b) \in E \times F$, la aplicación $(h,k) \in E \times F \longmapsto f(h,b) + f(a,k)$ es lineal y continua (comprobar que $(h,k) \in E \times F \mapsto f(h,b) \in F$ y $(h,k) \in E \times F \mapsto f(a,k) \in F$ son lineales y continuas). Además:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\| f(a+h, b+k) - f(a,b) - f(h,b) - f(a,k) \|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|f(h,k)\|}{\|(h,k)\|}$$

Siendo $\dfrac{\|f(h,k)\|}{\|(h,k)\|} \leq \dfrac{\|f\| \cdot \|h\| \cdot \|k\|}{\max\{\|h\|, \|k\|\}} = \|f\| \cdot \min\{\|h\|, \|k\|\}$

y como este último término converge a cero cuando $(h,k) \to (0,0)$ se deduce que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\|f(h,k)\|}{\|(h,k)\|} = 0$

Luego la aplicación $Df(a,b): (h,k) \in E \times F \longmapsto f(h,b) + f(a,k) \in G$ es la diferencial de f en (a,b). c.s.q.d.

DEFINICION: Se dice que $f: U \subset E \to F$ es diferenciable en U, o simplemente, diferenciable si es diferenciable en todo punto de U.

Cabe en este caso hablar de la aplicación diferencial

$$Df: x \in U \longmapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E,F).$$

DEFINICION: Se dice que f es diferenciable continuamente en U, o que es de clase 1 en U, si la aplicación Df es continua en U.

Decir que f es de clase 1 en U, o bien, $f \in C^1(U)$, significa que "puntos próximos de U tienen diferenciales próximas" y, en el caso de que $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que puntos "próximos" de U tienen "planos tangentes próximos".

2. Aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales y $\mathbb{C}$-lineales.

Supongamos que E y F son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ (por tanto, también lo son sobre $\mathbb{R}$). Se dice que una aplicación $\varphi: E \to F$ es $\mathbb{C}$-lineal si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E$, $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$.

Se dice que φ es $\mathbb{R}$-lineal si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$, $\varphi(\lambda x + \mu y) = \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y)$

Se dice que φ es $\mathbb{C}$-antilineal si $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall x, y \in E$, $\varphi(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda} \varphi(x) + \bar{\mu} \varphi(y)$.

Denotamos por $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,F)$ el conjunto de las aplicaciones $\mathbb{C}$-lineales de E en F y por $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(E,F)$ el conjunto de las aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales de E en F.

Es evidente que $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(E,F)$ es subespacio vectorial de $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(E,F)$ (ambos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y, por tanto, sobre $\mathbb{R}$).

Ejemplos: $\mathbb{C}$ es espacio vectorial sobre sí mismo de dimensión 1. $\mathbb{C}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 2. Si E es de dimensión n sobre $\mathbb{C}$, es de $2n$-dimensión sobre $\mathbb{R}$.

Toda aplicación $\mathbb{C}$-lineal de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es de la forma $z\in\mathbb{C} \longmapsto az\in\mathbb{C}$, donde a es un elemento fijo de $\mathbb{C}$.

Son $\mathbb{R}$-lineales (no $\mathbb{C}$-lineales) las aplicaciones

$$z = x+iy \longmapsto \bar{z} = x-iy \qquad (\nexists a\in\mathbb{C} \,/\, a(x+iy) = x-iy,\ \forall x+yi\in\mathbb{C}).$$

$$z = x+iy \longmapsto Re(z) = x$$

La primera aplicación es $\mathbb{C}$-antilineal; la segunda no es ni $\mathbb{C}$-lineal ni $\mathbb{C}$-antilineal. Una aplicación $\mathbb{R}$-lineal no tiene porque ser $\mathbb{C}$-lineal o $\mathbb{C}$-antilineal. Sin embargo, como probaremos después, toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal es suma de una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y otra $\mathbb{C}$-antilineal.

2.1 TEOREMA: Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y φ una aplicación $\mathbb{R}$-lineal de E en F. Entonces:

a) La aplicación $\psi(x) = \varphi(x) - i\varphi(ix)$ es $\mathbb{C}$-lineal.

b) La aplicación $\phi(x) = \varphi(x) + i\varphi(ix)$ es $\mathbb{C}$-antilineal.

Demostr.: Que ψ y ϕ son aditivas es trivial.

a) $\psi((\lambda+\mu i)x) = \varphi((\lambda+\mu i)x) - i\varphi(i(\lambda+\mu i)x) =$
$= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(ix) - i\varphi((-\mu+\lambda i)x) =$
$= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(ix) + i\mu\varphi(x) - i\lambda\varphi(ix) =$
$= (\lambda+\mu i)\varphi(x) + (\mu - i\lambda)\varphi(ix) =$
$= (\lambda+\mu i)\varphi(x) - i(\lambda+\mu i)\varphi(ix) = (\lambda+\mu i)\psi(x)$

b) $\phi((\lambda+\mu i)x) = \varphi((\lambda+\mu i)x) + i\varphi(i(\lambda+\mu i)x) =$
$= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(ix) + i\varphi((\lambda i-\mu)x) =$
$= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(ix) + i\lambda\varphi(ix) - i\mu\varphi(x) =$
$= (\lambda-\mu i)\varphi(x) + (\mu+\lambda i)\varphi(ix) =$
$= (\lambda-\mu i)\varphi(x) + i(\lambda-\mu i)\varphi(ix) = \overline{(\lambda+\mu i)}\cdot\phi(x)$

2.2. COROLARIO: Toda aplicación $\mathbb{R}$-lineal de E en F es suma de una aplicación $\mathbb{C}$-lineal y otra antilineal.

Con las notaciones del teorema anterior, $\varphi = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\phi$.

2.3. COROLARIO: Es condición necesaria y suficiente para que una aplicación $\mathbb{R}$-lineal φ sea $\mathbb{C}$-lineal que $\forall x\in E$, $\varphi(x) = -i\,\varphi(ix)$.

Demostr.: $\Rightarrow$| Si φ es $\mathbb{C}$-lineal, $\forall x\in E$, $-i\,\varphi(ix) = -i^2\varphi(x) = \varphi(x)$.

$\Leftarrow$| Si $\forall x\in E$, $\varphi(x) = -i\,\varphi(ix) \Rightarrow \frac{1}{2}\phi(x) = 0$, $\forall x\in E$.

Luego $\varphi(x) = \frac{1}{2}\psi(x)$ y, por tanto, φ es $\mathbb{C}$-lineal. csqd.

* Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{C}$ y U un abierto de E.
Se dice que $f: U\subset E \to F$ es $\mathbb{K}$-diferenciable (en el sentido de Fréchet) en el punto $a\in U$ si existe $Df(a)\in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} = 0.$$

2.4. PROPOSICION: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{C}$ y U un abierto de E.

a) Si $f: U\subset E\to F$ es $\mathbb{C}$-diferenciable en $a\in U$ con diferencial $Df(a)$, entonces f es $\mathbb{R}$-diferenciable en a y su diferencial es $Df(a)$.

b) Si $f: U\subset E\to F$ es $\mathbb{R}$-diferenciable en $a\in U$ con diferencial $Df(a)$, entonces, f es $\mathbb{C}$-diferenciable en a si y solo si

$$\forall h\in E,\ Df(a)(h) = -i\,Df(a)(ih)$$

o bien, si y solo si, $\forall h\in E$, $Df(a)(ih) = i\,Df(a)(h)$ (*)

La demostración es consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

3. REGLAS FORMALES DE DERIVACION

En las proposiciones siguientes E y F serán espacios normados sobre $\mathbb{K}$, U y V son abiertos de E y $f: U\subset E\to F$ y $g: V\subset E\to F$ aplicaciones.

3.1. PROPOSICION: Si f y g son diferenciables en $a\in U\cap V$ (**), entonces también lo es $f+g$ y se verifica

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a).$$

Demostr.: Como $Df(a), Dg(a)\in\mathcal{L}(E,F)$, $Df(a)+Dg(a)\in\mathcal{L}(E,F)$.
Además

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(a+h)-(f+g)(a)-[Df(a)+Dg(a)](h)}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|} + \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)-Dg(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

Luego $f+g$ es diferenciable y $D(f+g)(a) = Df(a)+Dg(a)$. csqd.

3.2. PROPOSICION: Si f es diferenciable en $a\in U$, entonces también es diferenciable la función $\lambda\cdot f$, $\forall \lambda\in\mathbb{K}$, y se verifica que $D(\lambda f)(a) = \lambda\, Df(a)$.

La demostración es análoga a la anterior.

* En el caso en que $F = \mathbb{K}$, cabe hablar de la función $f \cdot g$ y de la función $\frac{1}{g}$ si g no se anula en ningun punto de V. (*)

En este caso

3.3. PROPOSICION: Si f y g son diferenciables en $a \in U \cap V$, entonces tambien lo es $f \cdot g$ y se verifica

$$D(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a).$$

Demostr.: Dado que $g(a), f(a) \in \mathbb{K}$, $g(a) \cdot Df(a) + f(a) Dg(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Además $\lim_{h \to 0} \frac{(fg)(a+h) - (f \cdot g)(a) - g(a) \cdot Df(a)(h) - f(a) \cdot Dg(a)(h)}{\|h\|} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)[g(a+h) - g(a) - Dg(a)(h)]}{\|h\|} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a)[f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)]}{\|h\|} +$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{[f(a+h) - f(a)] \cdot Dg(a)(h)}{\|h\|}$$

El primer sumando tiende a cero, por definición de $Dg(a)$, y $f(a+h)$ está en un entorno acotado de $f(a)$ dado con solo tomar h en un entorno suficientemente "pequeño" de cero, por ser f continua en a.

El segundo sumando tambien tiende a cero, pues $g(a)$ es constante. El tercer término tiende tambien a cero puesto que f es continua en a ($\Rightarrow \lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$) y $\frac{Dg(a)(h)}{\|h\|}$ está acotado ya que, $\frac{\|Dg(a)(h)\|}{\|h\|} \leq \|Dg(a)\|$.

Luego existe $D(f \cdot g)(a)$ y coincide con $g(a) \cdot Df(a) + f(a) \cdot Dg(a)$. c.q.d.

3.4. PROPOSICION: Si $g: V \subset E \to \mathbb{K}$ es diferenciable en $a \in V$ y $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{1}{g}$ es diferenciable en a y se verifica

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(a) = \frac{-1}{[g(a)]^2} Dg(a)$$

Demostr.: Si $g(a) \neq 0$, siendo g continua en a, existe un entorno de a en el cual g no se anula y en el que podemos considerar definida $1/g$.

Evidentemente, $\frac{-1}{[g(a)]^2} Dg(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Veamos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a) + \frac{1}{[g(a)]^2} Dg(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

con lo cual quedará probada la proposición.

$$\frac{\frac{1}{g(a+h)}-\frac{1}{g(a)}+\frac{1}{[g(a)]^2}Dg(a)(h)}{\|h\|}=\frac{[g(a)]^2-g(a)g(a+h)+g(a+h)\cdot Dg(a)(h)}{\|h\|\cdot g(a+h)\cdot [g(a)]^2}=$$

$$=\frac{-1}{g(a+h)\,g(a)}\cdot\frac{g(a+h)-g(a)-Dg(a)(h)}{\|h\|}+\frac{g(a+h)-g(a)}{g(a+h)\,[g(a)]^2}\cdot\frac{Dg(a)(h)}{\|h\|}$$

y esta suma tiende a cero cuando $h\to 0$, puesto que g es diferenciable en a, y, además, como consecuencia de esto, g es continua en a. c.s.q.d.

3.5. COROLARIO: Si $f: U\subset E\to \mathbb{K}$ y $g: V\subset E\to\mathbb{K}$ son diferenciables en $a\in U\cap V$ y $g(a)\neq 0$, entonces, $\frac{f}{g}$ es diferenciable en a y

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a)=\frac{g(a)\,Df(a)-f(a)\cdot Dg(a)}{[g(a)]^2}$$

* DERIVACION DE FUNCIONES COMPUESTAS (REGLA DE LA CADENA).

3.6. TEOREMA: Sean E, F, G espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y U y V abiertos respectivos de E y F. Si $f: U\subset E\to F$ es diferenciable en $a\in U\cap f^{-1}(V)$ y $g: V\subset F\to G$ es diferenciable en $f(a)$, entonces, $g\circ f: U\cap f^{-1}(V)\subset E\to G$ (*) es derivable en a y se verifica que

$$D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\circ Df(a)$$

Demostr.: $Df(a)\in\mathcal{L}(E,F)$ y $Dg(f(a))\in\mathcal{L}(F,G)\Rightarrow Dg(f(a))\circ Df(a)\in\mathcal{L}(E,G)$.

$$\frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)-[Dg(f(a))\circ Df(a)](h)}{\|h\|}=$$

$$=\frac{g[f(a+h)]-g[f(a)]-Dg(f(a))[f(a+h)-f(a)]}{\|h\|}+Dg(f(a))\left(\frac{f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)}{\|h\|}\right)\qquad (\mathrm{I})$$

pues $Dg(f(a))$ es una aplicación lineal.

La norma del segundo sumando es menor o igual que

$$\|Dg(f(a))\|\cdot\frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|}$$ que tiende a cero cuando $h\to 0$

pues $\|Dg(f(a))\|$ es constante.

Siendo g diferenciable en $f(a)$, tenemos que

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \|K\|<\delta\Rightarrow\|g[f(a)+K]-g[f(a)]-Dg[f(a)](K)\|<\varepsilon\|K\|$

Siendo f continua en a, dado $\delta>0$, $\exists\rho>0 / \|h\|<\rho\Rightarrow\|f(a+h)-f(a)\|<\delta$.

Entonces, si $\|h\|<\rho$ se tiene que

$$\frac{\|g[f(a+h)]-g[f(a)]-Dg(f(a))[f(a+h)-f(a)]\|}{\|h\|}\leq\frac{\varepsilon\|f(a+h)-f(a)\|}{\|h\|}\leq$$

$$\leq \varepsilon \frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} + \varepsilon \left\| Df(a)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\| \leq$$

$$\leq \varepsilon \left[\frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} + \|Df(a)\| \right]$$

Para h suficientemente pequeño podemos hacer $\frac{\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|}{\|h\|} \leq 1$.

Luego $\forall \varepsilon > 0$, $\frac{\|g[f(a+h)]-g[f(a)]-Dg(f(a))[f(a+h)-f(a)]\|}{\|h\|} \leq \varepsilon(1+\|Df(a)\|)$

Por tanto, el primer sumando del segundo miembro de la igualdad (I) tiende a cero. Como el segundo sumando también tiende a cero cuando $h \to 0$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(g\circ f)(a+h)-(g\circ f)(a)-[Dg(f(a))\circ Df(a)](h)}{\|h\|} = 0$$

lo cual prueba que $D(g\circ f)(a)$ existe y coincide con $Dg(f(a))\circ Df(a)$. c.q.d.

* En el caso $E = \mathbb{K}^m$, $F = \mathbb{K}^n$, $G = \mathbb{K}^p$, si $f: U \subset \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es diferenciable en $a = (a_1, \ldots, a_m) \in U \cap f^{-1}(V)$ y $g: V \subset \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^p$ es diferenciable en $f(a)$ existen dos matrices tales que

$$Df(a) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ - & - & - \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Dg[f(a)] = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1p} \\ - & - & - \\ d_{n1} & \cdots & d_{np} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Esto significa que

$$Df(a) : (h_1, \ldots, h_m) \in \mathbb{K}^m \longmapsto (h_1, \ldots, h_m) \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ - & - & - \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Entonces, $D(g\circ f)(a) = Dg[f(a)] \circ Df(a) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ - & - & - \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1p} \\ - & - & - \\ d_{n1} & \cdots & d_{np} \end{pmatrix}$