TEMA 4º: DERIVADAS SEGUN SUBESPACIOS Y DIRECCIONALES. DERIVADAS DE FUNCIONES DEFINIDAS Y VALORADAS EN ESPACIOS PRODUCTOS.

1. DERIVADAS SEGUN SUBESPACIOS Y DIRECCIONALES

Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), $\mathcal{U}$ un abierto de E y L un subespacio vectorial de E. Entonces

DEFINICION: Se dice que una función $f: \mathcal{U} \subset E \to F$ es diferenciable en $a \in \mathcal{U}$ segun el subespacio L si existe una aplicación $D_L f(a) \in \mathcal{L}(L, F)$ tal que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in L}} \frac{f(a+h) - f(a) - D_L f(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

Si existe dicha función $D_L f(a)$, diremos que es la diferencial de f en a segun el subespacio L.

1.1. PROPOSICION: Si f es diferenciable en el punto a, entonces f es diferenciable en a según todo subespacio L de E, y se verifica que

$$D_L f(a) = Df(a)|_L$$

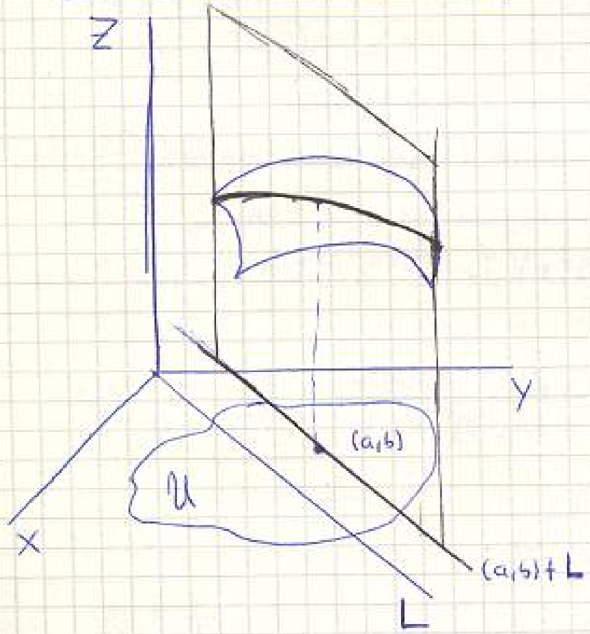
La demostración es trivial.

OBSERVACION 1: Sin embargo, una función f puede ser diferenciable en un punto a segun todo subespacio propio de E sin ser diferenciable en a.

INTERPRETACION GEOMETRICA: (Caso $E = \mathbb{R}^2$ y $F = \mathbb{R}$). Consideremos la función $f: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decir que f es diferenciable en (a,b) significa geométricamente, que la superficie $z = f(x,y)$ tiene plano tangente en el punto $(a,b,f(a,b))$ de ecuación

$$\Pi(x,y) = f(a,b) + Df(a,b)(x-a, y-b)$$

pues $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - \Pi(x,y)}{\|(x-a, y-b)\|} = 0$ significa que el plano y la superficie tienen en $(a,b,f(a,b))$ un contacto de orden 1.



Que f es diferenciable en (a,b) según un subespacio L de $\mathbb{R}^2$ significa que la curva $z = f(a+h, b+k)$, $(h,k) \in L$, de intersección del plano perpendicular a XY conteniendo $(a,b)+L$ con la superficie $z = f(x,y)$, tiene recta tangente en $(a,b,f(a,b))$.

Puede ocurrir que las curvas $f|_{(a,b)+L}$ tengan tangentes en (a,b) sin que f tenga plano tangente en dicho punto (observación 1).

* Supongamos ahora que L es un subespacio unidimensional de E y sea e un generador de L, $L = \langle e \rangle$. En este caso $\mathcal{L}(L,F)$ es identificable a F, una vez fijado e, mediante el isomorfismo

$$\varphi \in \mathcal{L}(L,F) \longrightarrow \varphi(e) \in F$$

Entonces la definición de $D_L f(a)$ queda así:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \in \mathbb{K}}} \frac{f(a+\lambda e) - f(a) - \lambda D_L f(a)(e)}{|\lambda| \, \|e\|} = 0$$

Esto es equivalente a que

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda e) - f(a) - \lambda D_L f(a)(e)}{\lambda} = 0$$

y también a que $D_L f(a)(e) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda e) - f(a)}{\lambda}$

Luego si $L = \langle e \rangle$, decir que f es diferenciable en a según $\langle e \rangle$ es equivalente a decir que existe $\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(a+\lambda e) - f(a)}{\lambda}$. De este límite se dice que es la derivada de f en a según e.

Se suele escribir $D_L f(a)(e) = D_e f(a)$ que se llama derivada direccional de f en a según el vector e.

Observar que $D_{\langle e \rangle} f(a) \in \mathcal{L}(\langle e \rangle, F)$ y $D_e f(a) \in F$, pero los podemos considerar "iguales" mediante la identificación $\mathcal{L}(L,F) \simeq F$

- Contraejemplo a la observación 1: Consideremos la función

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ = 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Sabemos que esta función no es continua en $(0,0)$ (tema 1°, aptdo 5). Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$. Probemos que, sin embargo, f es diferenciable en $(0,0)$ según todo vector (r,s) de $\mathbb{R}^2$ (es decir, según todo subespacio propio de $\mathbb{R}^2$).

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(\lambda r, \lambda s) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\frac{\lambda^3 r^2 s}{\lambda^4 r^4 + \lambda^2 s^2}}{\lambda} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{r^2 s}{\lambda^2 r^4 + s^2} = \frac{r^2}{s} \quad \text{si } s \neq 0$$

y 0 si $s = 0$.

2. DERIVADAS PARCIALES

Sean $E_1, \dots, E_m, F$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y U un abierto de $E_1 \times \dots \times E_m$. Sea una aplicación $f : U \longrightarrow F$. Cuando el espacio original viene dado en forma de producto hay unos subespacios "naturales" "distinguidos": los subespacios de la forma

$$\hat{E}_i = \{0\} \times \dots \times \{0\} \times E_i \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Evidentemente, $\hat{E}_i \simeq E_i$ y, en consecuencia, $\mathcal{L}(\hat{E}_i, F) \simeq \mathcal{L}(E_i, F)$.
Si f es diferenciable en $a = (a_1, \dots, a_m)$ según el subespacio $\hat{E}_i$ (o bien, si f es derivable parcialmente en a respecto a la i-ésima coordenada), es decir, si existe una aplicación $D_{\hat{E}_i} f(a) \in \mathcal{L}(\hat{E}_i, F)$ tal que
$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \hat{E}_i}} \frac{f(a+h) - f(a) - D_{\hat{E}_i} f(a)(h)}{\|h\|} = 0$$
entonces, a la aplicación $D_i f(a) \in \mathcal{L}(E_i, F)$ definida por
$$D_i f(a)(h_i) = D_{\hat{E}_i} f(a)(0, \dots, h_i, \dots, 0), \ \forall h_i \in E_i$$
se llama derivada parcial con respecto al i-ésimo espacio factor o derivada i-ésima de f en a. También se denota por
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$
Entonces, de acuerdo con lo dicho anteriormente, pueden existir las derivadas parciales de $f: U \subset E_1 \times \dots \times E_m \to F$ en $a \in U$ sin que f sea diferenciable en a.

Naturalmente, si f es diferenciable en a, existen todas las derivadas parciales de f en a y se verifica, en este caso:
$$D f(a_1, \dots, a_m)(h_1, \dots, h_m) \overset{(*)}{=} D f(a_1, \dots, a_m)(h_1, 0, \dots, 0) + \dots + D f(a_1, \dots, a_m)(0, \dots, 0, h_m)$$
$$= D_{\hat{E}_1} f(a_1, \dots, a_m)(h_1, 0, \dots, 0) + \dots + D_{\hat{E}_m} f(a_1, \dots, a_m)(0, \dots, 0, h_m) =$$
$$= D_1 f(a_1, \dots, a_m)(h_1) + \dots + D_m f(a_1, \dots, a_m)(h_m)$$
Esto lo podemos representar como un producto simbólico de "matrices"
$$D f(a_1, \dots, a_m)(h_1, \dots, h_m) = (h_1, \dots, h_m) \begin{pmatrix} D_1 f(a_1, \dots, a_m) \\ \dots\dots \\ D_m f(a_1, \dots, a_m) \end{pmatrix} \quad (I)$$
con el convenio $h_i \cdot D_i f(a) \doteq D_i f(a)(h_i)$

A la matriz simbólica del segundo término de (I) se le llama matriz jacobiana (o vector gradiente) de f en $a = (a_1, \dots, a_m)$.

De todo lo dicho deducimos que puede existir la matriz jacobiana de f en un punto a sin que f sea diferenciable en dicho punto, pero de ser f diferenciable en a, la diferencial de f en a viene dada por la matriz jacobiana. Es decir, la matriz jacobiana es la única "posible" diferencial de f en a.

Cuando $E_1 = \dots = E_m = F = \mathbb{K}$, la matriz jacobiana deja de ser "simbólica" y se convierte en una matriz numérica propiamente dicha, pues las derivadas parciales son elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ que es isomorfo a $\mathbb{K}$.

Si $\dim E_i = 1$, del apartado 1 deducimos que, si f es diferenciable en a según E_i, entonces

$$D_i f(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{K}}} \frac{f(a_1,\dots,te_i+a_i,\dots,a_n) - f(a_1,\dots,a_i,\dots,a_n)}{t} \quad \text{donde } \langle e_i\rangle = E_i$$

3. CASO EN QUE EL ESPACIO IMAGEN ES UN PRODUCTO

Sean $E, F_1, \dots, F_n$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, U un abierto de E y consideremos la aplicación $f: U\subset E \longrightarrow F_1\times\dots\times F_n$, que a cada elemento $x\in U$ asocia un elemento $(y_{1x},\dots,y_{nx})\in F_1\times\dots\times F_n$.

Definimos, entonces, $f_i : x\in U \longmapsto f_i(x) = y_{ix}\in F_i$. Es decir, para cada $x\in U$, $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$. De f_i decimos que es la función coordenada i-ésima de f.

3.1. PROPOSICION: $f: U\subset E\to F_1\times\dots\times F_n$ es diferenciable en $a\in U$ si, y solo si, son diferenciables en a las aplicaciones coordenadas f_i, $i=1,\dots,n$, y se verifica $\forall h\in E$, $Df(a)(h) = (Df_1(a)(h),\dots,Df_n(a)(h))$ y escribiremos, simbólicamente, $Df(a) = (Df_1(a),\dots,Df_n(a))$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Supongamos que f es diferenciable en $a\in U$. Las aplicaciones proyección

$$p_i : (y_1,\dots,y_n)\in F_1\times\dots\times F_n \longmapsto y_i\in F_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

son, trivialmente, lineales y continuas. Entonces, según Tema 4, ejemplo ②, p_i es diferenciable en todo punto y la diferencial es la misma función. Siendo $f_i = p_i\circ f$, se deduce que f_i es diferenciable en el punto a y se tiene que

$$Df_i(a) = D(p_i\circ f)(a) = Dp_i(f(a))\circ Df(a) = p_i\circ Df(a).$$

en virtud de la regla de la cadena.

$\Leftarrow$] Por hipótesis, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $\exists Df_i(a)\in\mathcal{L}(E,F_i)$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_i(a+h) - f_i(a) - Df_i(a)(h)}{\|h\|} = 0$$

La aplicación $h\in E\longmapsto (Df_1(a)(h),\dots,Df_n(a)(h))\in F_1\times\dots\times F_n$ es, trivialmente, lineal, por la linealidad de las diferenciales. Además es continua, pues $\|(Df_1(a)(h),\dots,Df_n(a)(h))\| = \max_{1\le i\le n}\|Df_i(a)(h)\| \le$

$$\le \max_{1\le i\le n}\{\|Df_i(a)\|\cdot\|h\|\} = (\max_{1\le i\le n}\|Df_i(a)\|)\cdot\|h\|,\ \forall h\in E.$$

Veamos que esta aplicación es, precisamente, la diferencial de f en a.

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f_1(a+h),\dots,f_n(a+h)) - (f_1(a),\dots,f_n(a)) - (Df_1(a)(h),\dots,Df_n(a)(h))}{\|h\|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(a+h)-f_1(a)-Df_1(a)(h), \ldots\ldots, f_n(a+h)-f_n(a)-Df_n(a)(h))}{\|h\|} \overset{(*)}{=}$$

$$=\left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h)-f_1(a)-Df_1(a)(h)}{\|h\|}, \ldots\ldots, \lim_{h\to 0}\frac{f_n(a+h)-f_n(a)-Df_n(a)(h)}{\|h\|}\right) =$$

$= (0, \ldots, 0)$ c.s.q.d.

4. Derivadas de funciones definidas y valoradas en espacios productos

Sea $f: U \subset E_1\times\ldots\times E_m \longrightarrow F_1\times\ldots\times F_n$ una función, donde $\{E_i\}_{i=1}^m$ y $\{F_j\}_{j=1}^n$ son espacios normados y U un abierto de $E_1\times\ldots\times E_m$.

Entonces $f(x_1,\ldots,x_m) = (f_1(x_1,\ldots,x_m), \ldots, f_n(x_1,\ldots,x_m))$.

Según lo dicho anteriormente f es diferenciable en $a\in U$ si, y solo si, lo son las funciones coordenadas f_i, verificándose, si f es diferenciable en a, que $Df(a)(h) = (Df_1(a)(h), \ldots, Df_n(a)(h))$, $\forall h \in E_1\times\ldots\times E_m$.

Simbólicamente, podemos escribir $Df(a)(h) = (h)(Df_1(a), \ldots, Df_n(a))$, donde h es de la forma $h = (h_1, \ldots, h_m)$, $h_i\in E_i$.

Por otra parte, si f_i es diferenciable en a

$$Df_i(a)(h_1,\ldots,h_m) = (h_1,\ldots,h_m)\begin{pmatrix} D_1 f_i(a)\\ \vdots \\ D_m f_i(a)\end{pmatrix}$$

En definitiva, podemos escribir la igualdad simbólica

$$Df(a)(h_1,\ldots,h_m) = (h_1,\ldots,h_m)\begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \ldots & D_1 f_n(a)\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_m f_1(a) & \ldots & D_m f_n(a)\end{pmatrix}$$

donde $h_j \cdot D_j f_i(a) = D_j f_i(a)(h_j)$

A esta matriz se le llama matriz jacobiana de f en el punto a.

Si la matriz jacobiana tiene una sola fila ($m=1$) su existencia equivale a la diferenciabilidad de f en a (PROPOSICION 3.1).

Si $m>1$, la existencia de la matriz jacobiana es condición necesaria para que f sea diferenciable en a, pero no suficiente.

Si $n=1$, la matriz jacobiana se llama vector gradiente de f en a.

* Supongamos que $f: U\subset E_1\times\ldots\times E_m \longrightarrow F_1\times\ldots\times F_n$ es diferenciable en $a\in U$ y $g: V\subset F_1\times\ldots\times F_n \longrightarrow G_1\times\ldots\times G_p$ tal que $U\cap f^{-1}(V)\neq\emptyset$ y es diferenciable en $f(a)$. Entonces, $g\circ f$ es diferenciable en a y $D(g\circ f)(a) = Dg(f(a))\circ Df(a)$. Luego

$$\begin{pmatrix} D_1(g\circ f)_1(a) & \ldots & D_1(g\circ f)_p(a)\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_m(g\circ f)_1(a) & \ldots & D_m(g\circ f)_p(a)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \ldots & D_1 f_n(a)\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_m f_1(a) & \ldots & D_m f_n(a)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} D_1 g_1(f(a)) & \ldots & D_1 g_p(f(a))\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ D_n g_1(f(a)) & \ldots & D_n g_p(f(a))\end{pmatrix}$$

donde $D_i f_j(a) \cdot D_j g_k(f(a)) = D_j g_k(f(a)) \circ D_i f_j(a)$.