TEMA 5º: TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

1. Caso de las funciones reales de variable real.

Recordemos algunos de los teoremas fundamentales dados en ANALISIS I para funciones reales de variable real derivables.

1.1. TEOREMA: (de Rolle)

Sea $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$ tal que $f(a)=f(b)$. Entonces existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

1.2. TEOREMA: (del valor medio para funciones reales de variable real).

Sean $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en $]a,b[$. Entonces existe $c\in]a,b[$ tal que

$$[f(b)-f(a)]\,g'(c)=[g(b)-g(a)]\,f'(c).$$

Para la demostración basta considerar la función auxiliar

$$F: x\in[a,b]\longmapsto F(x)=\det\begin{pmatrix}1 & f(x) & g(x)\\ 1 & f(a) & g(a)\\ 1 & f(b) & g(b)\end{pmatrix}$$

comprobar que verifica las hipótesis del teorema de Rolle.

Como consecuencia inmediata de este teorema ($g(x)=x$) obtenemos el siguiente teorema de Lagrange, llamado de los incrementos finitos para funciones reales de variable real.

1.3. TEOREMA: Si $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$, existe $c\in]a,b[$ tal que

$$[f(b)-f(a)]=f'(c)\,[b-a]$$

1.4. COROLARIO: Si $f,g:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ son continuas en $[a,b]$ y derivables en $]a,b[$ y se verifica que $\forall x\in]a,b[$, $|f'(x)|\leq g'(x)$ entonces

$$|f(b)-f(a)|\leq g(b)-g(a)$$

Demostr.: g es creciente pues $g'(x)\geq 0$, $\forall x\in]a,b[$.

Si fuese $g'(x)>0$, $\forall x\in]a,b[$, para el punto $c\in]a,b[$ cuya existencia garantiza el teorema 1.2., se verifica que

$$|f(b)-f(a)|=\frac{g(b)-g(a)}{|g'(c)|}\,|f'(c)|\leq g(b)-g(a)$$

Si para algún $x\in]a,b[$ fuese $g'(x)=0$ consideraremos, para cada $\varepsilon>0$, la función $g_\varepsilon: x\in[a,b]\longmapsto g_\varepsilon(x)=g(x)+\varepsilon x$, que es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$ siendo $\forall x\in]a,b[$, $g_\varepsilon'(x)=g'(x)+\varepsilon$. Entonces, $g_\varepsilon'(x)>0$, $\forall x\in]a,b[$, y se verifica que $|f(b)-f(a)|\leq g_\varepsilon(b)-g_\varepsilon(a)$.

Luego $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)+\varepsilon(b-a)$, y esto cualquiera que sea $\varepsilon>0$. Debe ser entonces $|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a)$. c.s.q.d.

1.5. COROLARIO: Sea $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$ tal que $\forall x \in]a,b[$, $|f'(x)| \leq M$. Entonces

$$|f(b)-f(a)| \leq M(b-a)$$

La demostración es consecuencia inmediata del corolario anterior para la función $g(x)=Mx$, $\forall x \in [a,b]$.

2. Teorema del valor medio para funciones definidas en un espacio normado y valoradas en $\mathbb{R}$.

En este apartado E será un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y $\mathcal{U}$ un abierto de E. Recordemos las definiciones

$L[a,b]=\{ta+(1-t)b \in E \,/\, t\in[0,1]\}$, $L(a,b)=\{ta+(1-t)b\in E \,/\, t\in]0,1[\}$.

2.1. TEOREMA: Sean $f,g: L[a,b] \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $L[a,b]$ y diferenciables en $L(a,b)$. Entonces existe $c\in L(a,b)$ tal que

$$[f(b)-f(a)]\,Dg(c)(b-a) = [g(b)-g(a)]\,Df(c)(b-a). \quad (*)$$

Demostr.: Consideremos la función

$$s: t\in[0,1]\subset\mathbb{R} \longmapsto s(t)=ta+(1-t)b=b+t(a-b)\in E$$

La función s es suma de las funciones $s_1: t\in[0,1]\mapsto b\in E$ y $s_2: t\in[0,1]\mapsto t(a-b)\in E$, la primera de las cuales es constante y la segunda lineal y continua. Luego s es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $]0,1[$. Además su diferencial en todo punto $t\in]0,1[$ es $Ds(t)=s_2$. Entonces, las funciones reales de variable real $f\circ s$ y $g\circ s$ verifican las hipótesis del teorema 1.2. Entonces, $\exists\, \tau\in]0,1[$ tal que $[(f\circ s)(1)-(f\circ s)(0)]\,(g\circ s)'(\tau)=[(g\circ s)(1)-(g\circ s)(0)]\cdot(f\circ s)'(\tau)$

Pero $(f\circ s)(1)=f(a)$, $(f\circ s)(0)=f(b)$, $(g\circ s)(1)=g(a)$, $(g\circ s)(0)=g(b)$.

Además, $(g\circ s)'(\tau)=D(g\circ s)(\tau)=Dg(s(\tau))\circ Ds(\tau)$

Siendo $g\circ s$ una función real de variable real, $D(g\circ s)(\tau)\in\mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que es isomorfo a $\mathbb{R}$. Podemos hacer la identificación:

$D(g\circ s)(\tau)\cong D(g\circ s)(\tau)(1)=Dg(s(\tau))[Ds(\tau)(1)]=$

$=Dg(s(\tau))[s_2(1)]=Dg(c)(a-b)$

donde $c=s(\tau)\in L(a,b)$, pues $\tau\in]0,1[$.

Del mismo modo tenemos que $D(f\circ s)(\tau)=Df(c)(a-b)$

En definitiva queda $[f(b)-f(a)]\,Dg(c)(b-a)=[g(b)-g(a)]\cdot Df(c)(b-a)$. c.q.d.

2.2. COROLARIO: Sea $f: L[a,b] \subset U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $L[a,b]$ y diferenciable en $L(a,b)$. Entonces existe $c \in L(a,b)$ tal que
$$f(b) - f(a) = Df(c)(b-a).$$

Demostr.: La demostración es análoga a la del teorema anterior pero utilizando el teorema 1.3. Vamos a hacerla ~~por~~ de otro modo.

Sea $g: E \to \mathbb{R}$ una función lineal y continua tal que $g(b-a) \neq 0$. Este funcional lineal continuo sobre E existe en virtud del COROLARIO 7.2 (Tema 1°) del teorema de Hahn-Banach: dado $b-a \in E-\{0\}$, $\exists g \in E'-\{0\}$ tal que $g(b-a) = \|g\| \cdot \|b-a\| \neq 0$. Siendo g lineal y continuo es diferenciable en todo punto y se verifica que $Dg(x) = g$, $\forall x \in E$. En virtud del teorema anterior se verifica que $\exists c \in L(a,b)$ tal que
$$[f(b)-f(a)]\, Dg(c)(b-a) = [g(b)-g(a)]\, Df(c)(b-a) \qquad (I)$$
Siendo g lineal, $Dg(c)(b-a) = g(b-a) = g(b) - g(a)$.
Como $g(b) - g(a) \neq 0$ deducimos de (I) que
$$f(b) - f(a) = Df(c)(b-a). \qquad \text{csqd.}$$

2.3. COROLARIO: Sea $f: L[a,b] \subset U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $L[a,b]$ y diferenciable en $L(a,b)$. Si $\forall x \in L(a,b)$, $\|Df(x)\| \leq M$ entonces $|f(b) - f(a)| \leq M \|b-a\|$

Demostr.: En virtud del corolario anterior $|f(b)-f(a)| = |Df(c)(b-a)|$ para un cierto $c \in L(a,b)$. Luego
$$|f(b) - f(a)| \leq \|Df(c)\| \cdot \|b-a\| \leq M \|b-a\|. \qquad \text{csqd.}$$

3. Teorema de los incrementos finitos para funciones valoradas en un espacio normado y definidas en $\mathbb{R}$

En el caso de una función cuyo espacio imagen sea de dimensión mayor que uno no existen teoremas "análogos" a los del valor medio dados para funciones reales definidas en $\mathbb{R}$ o en un espacio normado, como se comprobará en el siguiente apartado con un contraejemplo.

3.1. TEOREMA: Sea F un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ y $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to F$ y $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y diferenciables en $]a,b[$. Si $\forall x \in]a,b[$, $\|Df(x)\| \leq g'(x)$, entonces $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Demostr.: Como consecuencia del teorema de Hahn-Banach siempre podemos encontrar un funcional lineal continuo φ sobre F, $\varphi \in \mathcal{L}(F, \mathbb{R})$, tal que $\|\varphi\| = 1$ y $\varphi(f(b) - f(a)) = \|f(b) - f(a)\|$.

Consideremos la función $\varphi\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$, que es continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$.
Siendo φ lineal y continua se verifica que $\forall y\in F$, $D\varphi(y)=\varphi$.
Luego $D(\varphi\circ f)(x)=D\varphi(f(x))\circ Df(x)=\varphi\circ Df(x)$ y, por tanto
$\forall x\in]a,b[$, $\|D(\varphi\circ f)(x)\|=\|\varphi\circ Df(x)\|\le\|\varphi\|\cdot\|Df(x)\|=\|Df(x)\|\le g'(x)$.
Aplicando el corolario 1.4 a las funciones g y $\varphi\circ f$ tenemos que
$|(\varphi\circ f)(b)-(\varphi\circ f)(a)|\le g(b)-g(a)\ \Rightarrow$
$\Rightarrow |\varphi[f(b)-f(a)]|\le g(b)-g(a)$
Siendo $\varphi[f(b)-f(a)]=\|f(b)-f(a)\|$ queda probado que
$\|f(b)-f(a)\|\le g(b)-g(a)$. c.s.q.d.
Como consecuencia inmediata de este teorema, para $g(x)=Mx$, tenemos

3.2. COROLARIO: Si $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to F$ es continua en $[a,b]$, diferenciable en $]a,b[$ y tal que $\|Df(x)\|\le M$, $\forall x\in]a,b[$, entonces
$\|f(b)-f(a)\|\le M(b-a)$.

4. Teorema de los incrementos finitos para funciones definidas y valoradas en espacios normados

Sean E y F espacios normados y U un abierto de E

4.1. TEOREMA: Sea $f:U\subset E\to F$ una función continua en $L[a,b]\subset U$ y diferenciable en $L(a,b)$. Si se verifica que $\forall x\in L(a,b)$, $\|Df(x)\|\le M$ entonces $\|f(b)-f(a)\|\le M\|b-a\|$.

Demostr.: Consideremos la función $s: t\in[0,1]\mapsto ta+(1-t)b\in E$
Esta función es continua y derivable en $[0,1]$ siendo
$\forall t\in]0,1[$, $Ds(t)=s_2$ donde $s_2: t\in]0,1[\mapsto t(a-b)\in E$.
Entonces la función $f\circ s: t\in[0,1]\mapsto f(ta+(1-t)b)\in F$ es continua en $[0,1]$ y diferenciable en $]0,1[$
Veamos que $\exists M'\in\mathbb{R}$ / $\|D(f\circ s)(t)\|\le M'$, $\forall t\in]0,1[$, con lo cual $f\circ s$ verificará las hipótesis del corolario 3.2.
$\|D(f\circ s)(t)\|=\|Df(s(t))\circ Ds(t)\|\le\|Df(s(t))\|\cdot\|Ds(t)\|=$
$=\|Df(s(t))\|\cdot\|t(a-b)\|\le\|Df(s(t))\|\cdot|t|\cdot\|a-b\|\le$
$\le M|t|\cdot\|a-b\|$, pues $\|Df(x)\|\le M$, $\forall x\in L(a,b)$ y $s(t)\in L(a,b)$, pues $t\in]0,1[$. Siendo $|t|\le 1$ se deduce que
$\|D(f\circ s)(t)\|\le M\|a-b\|=M'$
Se verifican para la función $f\circ s$ las hipótesis del corolario 3.2 en el intervalo $[0,1]$. Luego
$\|(f\circ s)(1)-(f\circ s)(0)\|\le M'(1-0)$ o lo que es equivalente ...

$s(1)=b$ y $s(0)=a$, $\|f(b)-f(a)\| \leq M' = M\|b-a\|$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: ① En el enunciado del teorema anterior es frecuente encontrar, en lugar de M, $\sup_{x\in L(a,b)} \|Df(x)\|$, si es que existe.

② Decíamos en el apartado anterior que dada una función $f:[a,b]\subset\mathbb{R} \to F$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en $]a,b[$ no es cierto en general que exista $c\in]a,b[$ tal que

$$f(b)-f(a) = Df(c)(b-a).$$

Veamos un contraejemplo: Sea $f: x\in[0,1] \mapsto (x^2,x^3)\in\mathbb{R}^2$. f es continua en $[0,1]$ y diferenciable en todo punto $x\in]0,1[$ verificando que $Df(x)=(2x,3x^2)$.

$f(b)-f(a) = (1,1)-(0,0) = (1,1)$

Si existiese $c\in]0,1[$ tal que $Df(c)(b-a)=(1,1)$ tendríamos que existiría $c\in]0,1[$ tal que $2c=1$ y $3c^2=1$, lo cual es absurdo.

5. Consecuencias del teorema de los incrementos finitos.

5.1. TEOREMA: Si $f: U\subset E \to F$ es diferenciable en U y C es un conjunto convexo contenido en U tal que el conjunto $A=\{\|Df(x)\| / x\in C\}$ está acotado. Entonces la restricción de f a C es lipschitziana.

Demostr.: Sea M una cota superior de A. Probemos que $\forall x,y\in C$, $\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$ con lo cual quedará terminada la demostración. Siendo C convexo, dados $x,y\in C$, $L[x,y]\subset C$. Se verifica, entonces, que $\forall z\in L(x,y)$, $\|Df(z)\|\leq M$. Como consecuencia inmediata del teorema 4.1 tenemos que $\|f(x)-f(y)\|\leq M\|x-y\|$. c.s.q.d.

5.2. COROLARIO: Si $f: U\subset E\to F$ es diferenciable en U y $Df: U\to \mathcal{L}(E,F)$ es localmente acotada, es decir, es acotada en un cierto entorno de cada punto de U, entonces f es localmente lipschitziana.

Demostr.: Dado $x\in U$, existe un entorno V^x de x tal que Df es acotada en V^x, es decir, $\exists M_x\in\mathbb{R}^+ / \|Df(z)\|\leq M_x$, $\forall z\in V^x$. Como todo espacio normado es localmente convexo (consecuencia inmediata de Proposición 4.1, Tema 1°), existe un entorno convexo C^x de x contenido en V^x.

Por tanto, C^x es convexo y $A^x=\{\|Df(z)\| / z\in C^x\}$ está acotado. Luego según el teorema anterior, la restricción de f a C^x es lipschitziana y, en definitiva, f es localmente lipschitziana. c.s.q.d.

5.3. TEOREMA: Sea U un conjunto abierto y conexo de E y $f: U \subset E \to F$ una función. Entonces f es constante si, y solo si, $\forall x \in U$, $Df(x) = 0$.

Demostr.: $\Rightarrow$| Si f es constante, independientemente de que U sea conexo o no, se verifica que f es diferenciable en U y que $\forall x \in U$, $Df(x) = 0$, como ya se ha probado anteriormente.

$\Leftarrow$| Sea $a \in U$. Si probamos que $\forall x \in U$, $f(x) - f(a) = 0$ quedará terminada la demostración.

Siendo U conexo y abierto, es conexo por poligonales (Th. 4.4., Tema 1º). Luego, dado $x \in U$, existen $x_1, \dots, x_n \in U$ tales que $L[a, x_1] \cup \dots \cup L[x_n, x] \subset U$.

Como 0 es una cota superior de $\|Df(z)\|$, cuando z varía en U se verifica, como consecuencia del teorema 4.1 que

$\|f(a) - f(x_1)\| \leq 0 \, \|a - x_1\| = 0, \dots, \|f(x_n) - f(x)\| \leq 0 \, \|x_n - x\| = 0$.

Luego $\|f(a) - f(x)\| \leq \|f(a) - f(x_1)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| + \dots + \|f(x_n) - f(x)\| = 0$

lo cual prueba que $\|f(a) - f(x)\| = 0$, $\forall x \in U$ y, por tanto, que $f(a) = f(x)$, $\forall x \in U$. csqd.

5.4. COROLARIO: Si $f: U \subset E \to F$ es tal que $\forall x \in U$, $Df(x) = 0$, entonces la restricción de f a cada componente conexa de U es constante.

La demostración es trivial consecuencia del teorema anterior si tenemos en cuenta que las componentes conexas (conjuntos conexos maximales) de los conjuntos abiertos son abiertas.

* Recordemos que una función $f: U \subset E \to F$ se dice de clase 1 o diferenciable continuamente en U si es diferenciable en U y la aplicación $Df: x \in U \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$ es continua. Se escribe: $f \in C^1(U)$.

5.5. TEOREMA: Sean E_1, E_2, F espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y U un abierto de $E_1 \times E_2$. Una aplicación $f: U \subset E_1 \times E_2 \to F$ es diferenciable continuamente en U si, y sólo si, existen y son continuas en U las derivadas parciales de f.

Demostr.: $\Rightarrow$| Siendo f diferenciable en U existen en todo punto $(a_1, a_2) \in U$ las derivadas parciales $D_1 f(a_1, a_2)$, $D_2 f(a_1, a_2)$. Queremos ver que $D_1 f: (a_1, a_2) \in U \mapsto D_1 f(a_1, a_2) \in \mathcal{L}(E_1, F)$ y

$D_2 f: (a_1, a_2) \in U \mapsto D_2 f(a_1, a_2) \in \mathcal{L}(E_2, F)$ son continuas.

Veamos que $D_1 f$ es continua, es decir que

$\forall x \in U, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|D_1 f(x) - D_1 f(y)\| < \varepsilon$.

Por hipótesis, Df es continua. Luego dado $x \in \mathcal{U}$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\underset{y \in \mathcal{U}}{\|x-y\| < \delta} \Rightarrow \|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$.

Ahora bien, $\|Df(x) - Df(y)\| = \sup\limits_{\|(h_1,h_2)\|=1} \|(Df(x) - Df(y))(h_1,h_2)\| \geq$

$\overset{(*)}{\geq} \sup\limits_{\|h_1\|=1} \|(Df(x) - Df(y))(h_1,0)\| = \sup\limits_{\|h_1\|=1} \|(D_1 f(x) - D_1 f(y))(h_1)\| = \|D_1 f(x) - D_1 f(y)\|$

Entonces, si $\underset{y \in \mathcal{U}}{\|x-y\| < \delta} \Rightarrow \|D_1 f(x) - D_1 f(y)\| \leq \|Df(x) - Df(y)\| < \varepsilon$.

Análogamente, $D_2 f$ es continua.

$\Leftarrow$ | Supongamos que existe $D_1 f(x)$ y $D_2 f(x)$ en todo punto $x = (x_1, x_2)$ de $\mathcal{U}$ y que $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en el punto $a \in \mathcal{U}$.

Queremos probar que, entonces, f es diferenciable en el punto $a = (a_1, a_2)$

De ser f diferenciable en a se debe verificar que

$$Df(a)(h_1,h_2) = D_1 f(a)(h_1) + D_2 f(a)(h_2)$$

Se trata de probar entonces que

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(a_1,a_2)} \frac{\|f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) - D_1 f(a)(x_1-a_1) - D_2 f(a)(x_2-a_2)\|}{\|(x_1-a_1, x_2-a_2)\|} = 0 \qquad (I)$$

Evidentemente se tiene la igualdad

$$f(x_1,x_2) - f(a_1,a_2) - D_1 f(a)(x_1-a_1) - D_2 f(a)(x_2-a_2) =$$
$$= [f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2) - D_1 f(a)(x_1-a_1)] + [f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2) - D_2 f(a)(x_2-a_2)]$$

Es suficiente, pues, probar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tal que si $\|x_1 - a_1\| \leq \eta$ y $\|x_2 - a_2\| \leq \eta$ entonces

$\|f(x_1,x_2) - f(a_1,x_2) - D_1 f(a)(x_1-a_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_1 - a_1\|$ y

$\|f(a_1,x_2) - f(a_1,a_2) - D_2 f(a)(x_2-a_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_2 - a_2\|$

Probemos la primera de estas desigualdades (la segunda es enteramente análoga). Consideremos la función

$$g : \xi_1 \in E_1 \longmapsto g(\xi_1) = f(\xi_1, x_2) - D_1 f(a)(\xi_1 - a_1) \in F$$

Lo que queremos probar es que $\|g(x_1) - g(a_1)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x_1 - a_1\|$ si $\|x_1 - a_1\|$ es menor o igual que un cierto η_1.

La función g es diferenciable en todo punto $\xi_1 \in E_1$, verificando

$$Dg(\xi_1) = D_1 f(\xi_1, x_2) - D_1 f(a)$$

ya que f es, por hipótesis, diferenciable respecto a la primera coordenada y siendo $D_1 f(a)$ una aplicación lineal y continua de E_1 en F, es diferenciable en todo punto y su diferencial es la misma función.

Siendo $D_1 f$ continua en el punto $a=(a_1,a_2)$ (¡por hipótesis!), dado $\varepsilon>0$, existe $\eta_1>0$ tal que si $\|x_1-a_1\|\leq\eta_1$ y $\|x_2-a_2\|\leq\eta_1$ entonces

$$\|D_1 f(x_1,x_2) - D_1 f(a_1,a_2)\| \leq \varepsilon/2$$

Entonces, si $\xi_1 \in L[a_1,x_1] \subseteq E_1$ se verifica que

$$\|D_1 f(\xi_1,x_2) - D_1 f(a_1,a_2)\| \leq \varepsilon/2$$

pues $\|\xi_1-a_1\|\leq\|x_1-a_1\|\leq\eta_1$. (*)

por tanto, $\|D g(\xi_1)\| \leq \varepsilon/2$, $\forall \xi_1 \in L[a,x_1]$

Entonces, en virtud del teorema 4.1, tenemos que

$$\|g(x_1)-g(a_1)\| \leq \varepsilon/2 \|x_1-a_1\|$$

Luego, dado $\varepsilon>0$, $\exists \eta_1>0 / \|x_1-a_1\|\leq\eta_1 \Rightarrow \|g(x_1)-g(a_1)\|\leq\frac{\varepsilon}{2}\|x_1-a_1\|$

y, según se indicó anteriormente,

$$\|f(x_1,x_2)-f(a_1,x_2)-D_1 f(a)(x_1-a_1)\| \leq \varepsilon/2\|x_1-a_1\|$$

Análogamente, $\exists \eta_2>0 / \|x_2-a_2\|\leq\eta_2$ entonces

$$\|f(a_1,x_2)-f(a_1,a_2)-D_2 f(a)(x_2-a_2)\| \leq \varepsilon/2\|x_2-a_2\|.$$

Por tanto, dado $\varepsilon>0$, $\exists \eta=\inf(\eta_1,\eta_2)>0$ tal que si

$\|(x_1-a_1,x_2-a_2)\| = \max\{\|x_1-a_1\|,\|x_2-a_2\|\}\leq\eta$ entonces

$$\|f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)-D_1 f(a)(x_1-a_1)-D_2 f(a)(x_2-a_2)\| \leq$$
$$\leq \|f(x_1,x_2)-f(a_1,x_2)-D_1 f(a)(x_1-a_1)\| + \|f(a_1,x_2)-f(a_1,a_2)-D_2 f(a)(x_2-a_2)\| \leq$$
$$\leq \varepsilon/2\|x_1-a_1\| + \varepsilon/2\|x_2-a_2\| \leq 2\cdot\varepsilon/2 \max\{\|x_1-a_1\|,\|x_2-a_2\|\} = \varepsilon\,\|(x_1-a_1,x_2-a_2)\|.$$

En definitiva, dado $\varepsilon>0$, $\exists\eta>0$ tal que si $\|(x_1-a_1,x_2-a_2)\|\leq\eta$

entonces $$\frac{\|f(x_1,x_2)-f(a_1,a_2)-D_1 f(a)(x_1-a_1)-D_2 f(a)(x_2-a_2)\|}{\|(x_1-a_1,\ x_2-a_2)\|} \leq \varepsilon$$

que prueba que f es diferenciable en el punto a.

Hemos visto que si $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en a, entonces f es diferenciable en a. Por tanto, si $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en U, f es diferenciable en U

Además, siendo las aplicaciones proyección $p_1: (h_1,h_2)\in E_1\times E_2 \mapsto h_1 \in E_1$ y $p_2: (h_1,h_2)\mapsto h_2$, continuas en todo punto, también lo son $D_1 f(a)\circ p_1$ y $D_2 f(a)\circ p_2$

Siendo $Df(a)(h_1,h_2) = [D_1 f(a)\circ p_1 + D_2 f(a)\circ p_2](h_1,h_2)$, $\forall (h_1,h_2)\in E_1\times E_2$

se tiene que $Df(a) = D_1 f(a)\circ p_1 + D_2 f(a)\circ p_2$

Luego, como p_1 y p_2 son continuas y $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en a, se deduce que Df es continua en a, y si $D_1 f$ y $D_2 f$ son continuas en U, también lo es Df. c.q.d.

6. Gateaux – diferenciabilidad

El concepto de diferenciabilidad definido en el TEMA 5º es, como ya se indicó allí, la diferenciabilidad en el sentido de Frechet y a ella nos referiremos cuando hablemos de diferenciabilidad, simplemente. Hay, no obstante, otras definiciones de funciones diferenciables en espacios normados y que, restringidas al caso de funciones reales de variable real, tenemos el concepto de derivada definida en ANALISIS I.

El cuadro siguiente contiene los resultados más importantes probados hasta ahora y hay contraejemplos que prueban que no hay más implicaciones que las que se indican.

Sean $E_1, \dots, E_m, F$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y U un abierto de $E_1 \times \dots \times E_m$. Sea una función $f : U \subset E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$. Entonces:

① [f diferenciable continuamente en U] $\Leftrightarrow$ [Existen y son continuas en U todas las derivadas parciales] ②

$\Downarrow$

③ [f es diferenciable en U (en el sentido de Frechet)] $\Rightarrow$ [f es continua en U] ④

$\Downarrow$

⑤ [Existen las derivadas de f en U según todas las direcciones y son tales que $D_{(e_1,\dots,e_m)} f(x) = D_1 f(x)(e_1) + \dots + D_m f(x)(e_m)$] $\Rightarrow$ [Existen las derivadas de f en U según todas las direcciones] ⑥

La proposición contenida en el recuadro ⑤ no es equivalente ni a la proposición ③ ni a la proposición ⑥.

DEFINICION: Una función $f : U \subset E_1 \times \dots \times E_m \longrightarrow F$ que admita derivadas en un punto x de U en todas las direcciones verificando que

$$D_{(e_1,\dots,e_m)} f(x) = D_1 f(x)(e_1) + \dots + D_m f(x)(e_m)$$

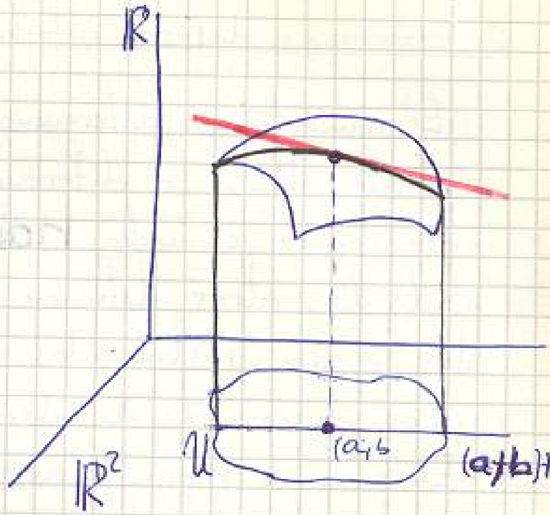
se dice que es diferenciable en el sentido de Gateaux (G-diferenciable) en el punto x.

* Sabemos que el hecho de que f sea diferenciable continuamente en U significa que la función tiene "plano tangente" en todo punto de U y que "puntos próximos tienen planos tangentes próximos".

Vamos a dar una interpretación geométrica de la G-diferenciabilidad.

El hecho de que f sea diferenciable ~~en~~ el punto x según el subespacio unidimensional L significa que la curva

intersección de la gráfica de f y el plano "levantado" sobre ~~e~~ la variedad lineal $a+L$ tiene tangente en el punto a.
Se prueba que si f es 6-diferenciable en $a\in U$, las tangentes a las distintas curvas son coplanarias



De las implicaciones recogidas en el cuadro anterior, se deduce que el plano que contiene a dichas tangentes, si es que f es 6-diferenciable, es el único "candidato" a ser tangente a la gráfica de f. Pero, aunque f fuese continua (que no tiene porque serlo), ese plano no tiene porque ser tangente a la gráfica de f.
La proposición ⑥ indica que, todas las curvas "direccionales" tienen rectas tangentes, las cuales no necesariamente son coplanarias.

7. CONVERGENCIA UNIFORME Y DERIVACION DE SUCESIONES FUNCIONALES.

* Sea A un conjunto, M un espacio métrico y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones definidas en A y valoradas en M.
Se dice que $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia $f: A\to M$ si
$\forall x\in A, \forall \varepsilon>0, \exists \nu(x,\varepsilon)\in\mathbb{N} / n>\nu \Rightarrow d(f_n(x), f(x))<\varepsilon$
Se dice que $(f_n)_n$ converge uniformemente hacia $f: A\to M$ si
$\forall\varepsilon>0, \exists\nu(\varepsilon)\in\mathbb{N} / n>\nu \Rightarrow d(f_n(x), f(x))<\varepsilon, \forall x\in A$.
Es trivial que la convergencia uniforme implica convergencia puntual pero no recíprocamente (ver ANALISIS I).
Si A es también un espacio métrico, la desigualdad
$$d(f(x),f(y))\leq d(f(x),f_n(x))+d(f_n(x),f_n(y))+d(f_n(y),f(y))$$
prueba que si todas las funciones f_n son continuas y si la convergencia de (f_n) a f es uniforme en A, entonces f es continua en A.

7.1. TEOREMA: Sean E y F espacios normados sobre $\mathbb{K}$, y F completo. Sea U un abierto convexo de E. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones diferenciables de U en F. Si existe $a\in U$ tal que la sucesión $(f_n(a))_n$ es convergente en F y si la sucesión $(Df_n)_n$ converge uniformemente en U a una función $g: U\subset E\to \mathcal{L}(E,F)$, entonces la sucesión $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia una función $f: U\subset E\to F$

y la convergencia es uniforme en cada conjunto acotado de $\mathcal{U}$. Además se verifica que f es diferenciable en $\mathcal{U}$ siendo
$$Df = g.$$

Demostr.: Puesto que $(Df_n)_n$ converge uniformemente en $\mathcal{U}$, es uniformemente de Cauchy en $\mathcal{U}$. Luego
dado $\varepsilon > 0$, $\exists \nu_1 \in \mathbb{N} / p, q > \nu_1 \Rightarrow \sup_{z\in\mathcal{U}} \|Df_p(z) - Df_q(z)\| \leq \varepsilon/2M$

Dado que $\mathcal{U}$ es convexo, y que si $p, q > \nu_1$ entonces el conjunto $\{\|D(f_p - f_q)(z)\| / z \in \mathcal{U}\}$ es acotado, se verifica, en virtud de Teorema 5.1, que $\forall x \in \mathcal{U}, \forall p, q > \nu_1$, $\|(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(a)\| \leq \|x - a\| \cdot \sup_{z\in\mathcal{U}} \|D(f_p - f_q)(z)\|$ (I)
dado que $f_p - f_q$ es diferenciable en $\mathcal{U}$.
Sea C una parte acotada de $\mathcal{U}$, y $M > 0$ una cota superior del conjunto $\{\|x - a\| / x \in C\}$.
Por otra parte, siendo $(f_n(a))_n$ convergente en F tenemos que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \nu_2 \in \mathbb{N} / p, q > \nu_2 \Rightarrow \|f_p(a) - f_q(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Teniendo en cuenta la desigualdad (I) podemos escribir
$$\|[f_p(x) - f_q(x)] - [f_p(a) - f_q(a)]\| \leq \|x - a\| \cdot \sup_{z\in\mathcal{U}} \|D(f_p - f_q)(z)\|, \forall x \in \mathcal{U}, \forall p, q > \nu_1$$

Sea $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que si
$$p, q > \nu \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \|f_p(a) - f_q(a)\| + \|x - a\| \cdot \sup_{z\in\mathcal{U}} \|Df_p(z) - Df_q(z)\| \leq$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$
que prueba que $\forall x \in \mathcal{U}$, $(f_p(x))_n$ es de Cauchy en F y, por tanto, convergente hacia $f(x) \in F$, pues F es completo.
Además, de la demostración hecha se deduce que ν no depende de x cuando x varía en un conjunto acotado C, es decir, que la convergencia de $(f_n)_n$ a f es puntual en $\mathcal{U}$ y uniforme en cada conjunto acotado de $\mathcal{U}$.
Veamos ahora que f es diferenciable en $\mathcal{U}$ y que su diferencial es g.
Se trata de probar que
$$\forall x \in \mathcal{U}, \lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Tenemos trivialmente que:
$$\|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\| \leq \|[f(x+h) - f(x)] - [f_n(x+h) - f_n(x)]\| +$$
$$+ \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)(h)\| + \|Df_n(x)(h) - g(x)(h)\|.$$
Dado que $(f_n)_n \to f$ uniformemente en cada acotado de $\mathcal{U}$, sea

cualquier $\varepsilon > 0$, siempre podemos encontrar $\nu_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \nu_0$ entonces $\|[f(x+h) - f(x)] - [f_n(x+h) - f_n(x)]\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|h\|$

Por otra parte, como $(Df_n)_n$ converge uniformemente a g, existe $\nu_0' \in \mathbb{N}$ tal que si $n > \nu_0'$, entonces $\|Df_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon/3$, $\forall x \in U$ y, por tanto, $\|Df_n(x)(h) - g(x)(h)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|h\|$.

Sea $n_0 = \max(\nu_0, \nu_0')$ y sea $n \geq n_0$. Como f_n es diferenciable se verifica que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $\|h\| < \delta_1$ entonces $\|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)(h)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|h\|$.

Entonces, si tomamos $\delta = \inf(r, \delta_1)$ (con $n \geq n_0$) tenemos que

$\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x+h) - f(x) - g(x)(h)\| \leq$

$\leq \|[f(x+h) - f(x)] - [f_n(x+h) - f_n(x)]\| + \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x)(h)\| +$
$+ \|Df_n(x)(h) - g(x)(h)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}\|h\| + \frac{\varepsilon}{3}\|h\| + \frac{\varepsilon}{3}\|h\| = \varepsilon\|h\|$. c.s.q.d.