# TEMA 6º: DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR.

## 1. DEFINICION

Sean $E$ y $F$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$ y $U$ un abierto de $E$.
Sea $f: U \subset E \to F$ una función derivable en $U$. Se dice que $f$ es dos veces derivable en $a \in U$ si es derivable en $a \in U$ la aplicación $Df: U \to \mathcal{L}(E,F)$. (*)

Si $Df$ admite derivada en el punto $a$ denotaremos

$$D^2 f(a) = D(Df)(a)$$

Evidentemente, $D^2 f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E,F))$.

Si recordamos del tema 1º (teoremas 12.4, 12.5) que $\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F)) \simeq \mathcal{L}^2(E\times E, F)$ entendiendo que $\simeq$ significa (en este caso) algebraicamente isomorfos e isométricos, podemos poner que $D^2 f(a) \in \mathcal{L}^2(E\times E, F)$, es decir que $D^2 f(a)$ es una aplicación bilineal continua de $E\times E$ en $F$.

De acuerdo con este "isomorfismo" escribiremos, indistintamente,

$$D^2 f(a)(h,K) = [D^2 f(a)(h)](K), \quad h,K \in E.$$

Tener en cuenta que $D^2 f(a) \in \mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))$, $D^2 f(a)(h) \in \mathcal{L}(E,F)$ y $[D^2 f(a)(h)](K) \in F$.

En general, inductivamente podemos definir la derivada n-sima de una función en un punto: Si una función $f$ es $n-1$ veces derivable en un entorno de $a \in E$ cabe pensar en la diferencial de la función $D^{n-1} f$ en el punto $a$. Si existe dicha diferencial la denotamos por $D^n f(a) = D(D^{n-1} f)(a)$

Evidentemente, $D^n f(a) \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \dots, \mathcal{L}(E,F))\dots)) \simeq \mathcal{L}^n(E\times \overset{n}{\cdots} \times E, F)$.

* Si $f$ es $n$ veces diferenciable en el abierto $U \subset E$ y $D^n f$ es continua en $U$, decimos que $f$ es de clase $n$ en $U$ y se escribe $f \in C^n(U)$.
* Se dice que $f$ es una función de clase infinito en $U$, y escribiremos $f \in C^\infty(U)$, si $f \in C^n(U)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Es claro que si $f$ y $g$ son $m$ veces diferenciables en un entorno de $a \in E$, entonces $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\exists\, D^m(\lambda f + \mu g)(a)$ y se tiene que

$$D^m(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda D^m f(a) + \mu D^m g(a).$$

## 2. Notación de Landau

Vamos a introducir ahora una notación muy utilizada en Análisis.
Sean $f$ y $g$ funciones reales definidas en un entorno de $a \in \mathbb{R}$

El hecho $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ lo denotaremos por

$$f(x) = o(g(x)) \text{ en } x=a \quad (1)$$

y diremos que "$f(x)$ es de orden inferior a $g(x)$ en $a$". En realidad, en (1) no se expresa una igualdad, sino, tal como hemos dicho, significa que en $x=a$, $f(x)$ es de orden inferior a $g(x)$.

Ejemplos: * Decir que una función $f: U \subset E \to F$ es diferenciable en $a \in U$ se escribe con esta notación en la forma

$$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)\| = o(\|h\|) \text{ en } h=0.$$

** Es trivial que si $f(x) = o(g(x))$ en $x=a$ y $g(x) = o(h(x))$ en $x=a$, entonces, $f(x) = o(h(x))$ en $x=a$.

## 3. Teorema fundamental de las diferenciales sucesivas (de Schwartz).

**3.1. TEOREMA:** (de Schwartz)

Si $f: U \subset E \to F$ es $m$ veces diferenciable en $a \in U$, $m > 1$, entonces la aplicación $m$-lineal continua $D^m f(a)$ es simétrica, es decir, se verifica que cualquiera que sea $(h_1, \ldots, h_m) \in E^m$ y cualquiera que sea la permutación $(i_1, \ldots, i_m)$ del conjunto $\{1, \ldots, m\}$ se tiene que

$$D^m f(a)(h_1, \ldots, h_m) = D^m f(a)(h_{i_1}, \ldots, h_{i_m}).$$

Demostr.: Es suficiente demostrarlo para $m=2$; la prueba general se hace por inducción teniendo en cuenta que $D^m f(a) = D^k[D^2(D^{m-k-2} f)](a)$.

* Sea el conjunto convexo $B(a,r) \subset U$ tal que $f$ es diferenciable en $B(a,r)$. Consideremos la función auxiliar

$$g: (h,k) \in B(0,\tfrac{r}{2}) \times B(0,\tfrac{r}{2}) \longmapsto g(h,k) = f(a+h+k) - f(a+h) - f(a+k) + f(a) \in F.$$

Observar que al poner $\frac{r}{2}$, $a+h+k, a+h, a+k \in B(a,r)$ donde $f$ es diferenciable.

La función $g$ es trivialmente simétrica: $g(h,k) = g(k,h)$.

Si probamos que

$$\|g(h,k) - D^2 f(a)(h,k)\| = o[(\|h\| + \|k\|)^2] \text{ en } (h,k) = (0,0) \quad (\mathrm{I})$$

tendremos que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{D^2 f(a)(h,k) - D^2 f(a)(k,h)}{(\|h\| + \|k\|)^2} = 0$$

puesto que $\|D^2 f(a)(h,k) - D^2 f(a)(k,h)\| \leq \|D^2 f(a)(h,k) - g(h,k)\| + \|g(k,h) - D^2 f(a)(k,h)\|$, pues $g(h,k) = g(k,h)$, y siendo $\|g(h,k) - D^2 f(a)(h,k)\| = o[(\|h\|+\|k\|)^2]$ y $\|g(k,h) - D^2 f(a)(k,h)\| = o[(\|h\|+\|k\|)^2]$ se tiene que $\|D^2 f(a)(h,k) - D^2 f(a)(k,h)\| = o[(\|h\|+\|k\|)^2]$ en $(h,k) = (0,0)$.

Se sigue de aquí que $\forall (h,k)\in E\times E$, $D^2f(a)(h,k) = D^2f(a)(k,h)$ (*)
pues, fijado $(h,k)\in E\times E$, tenemos, según lo anterior, que el límite direccional

$$\lim_{t\to 0} \frac{D^2f(a)(th,tk) - D^2f(a)(tk,th)}{(\|th\|+\|tk\|)^2} = 0 \qquad (\mathrm{II})$$

Siendo $D^2f(a)$ bilineal se tiene que $D^2f(a)(th,tk) = |t|^2 D^2f(a)(h,k)$
luego, de (II) se deduce que

$$\frac{1}{(\|h\|+\|k\|)^2} \lim_{t\to 0} \frac{|t|^2\left(D^2f(a)(h,k) - D^2f(a)(k,h)\right)}{|t|^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(\|h\|+\|k\|)^2}\left[D^2f(a)(h,k) - D^2f(a)(k,h)\right] = 0 \Rightarrow D^2f(a)(h,k) = D^2f(a)(k,h)$$

y esto cualquiera que sea $(h,k)\in E\times E$, que es lo que queremos probar.

Probemos entonces (I), es decir, que $\|g(h,k) - D^2f(a)(h,k)\| = o[(\|h\|+\|k\|)^2]$

$$\|g(h,k) - D^2f(a)(h,k)\| \le \|Df(a+h)(k) - Df(a)(k) - [D^2f(a)(h)](k)\| +$$
$$+ \|g(h,k) - Df(a+h)(k) + Df(a)(k)\| \qquad (\mathrm{II}')$$

Llamemos (A) al primer sumando del segundo miembro de esta desigualdad y (B) al segundo. Tenemos entonces que

(A) $\le \|Df(a+h) - Df(a) - D^2f(a)(h)\|\cdot\|k\| = \|k\|\cdot o(\|h\|)$, pues $D^2f(a)$ es la derivada de $Df$ en $a$.

Sea (A') $= \|Df(a+h) - Df(a) - D^2f(a)(h)\|$.

Entonces (A') $= o(\|h\|)$, es decir, $\lim_{h\to 0} \frac{(A')}{\|h\|} = 0$

Por tanto, dado $k\neq 0$ se deduce que $\lim_{h\to 0} \frac{(A')\,\|k\|}{\|h\|\,\|k\|} = 0 \qquad (\mathrm{III})$

Como $\frac{(A')\,\|k\|}{\|h\|\,\|k\|}$ no depende de $k$ podemos escribir, de acuerdo con (III)

que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(A')\,\|k\|}{\|h\|\cdot\|k\|} = 0$.

Siendo (A) $\le$ (A') $\|k\|$, se deduce que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(A)}{\|h\|\cdot\|k\|} = 0$.

Entonces, siendo $(\|h\|+\|k\|)^2 \ge \|h\|\cdot\|k\|$ se tiene que

$$0 \le \frac{(A)}{(\|h\|+\|k\|)^2} \le \frac{(A)}{\|h\|\cdot\|k\|}$$

y, por tanto, (A) $= o[(\|h\|+\|k\|)^2]$ en $(h,k)=(0,0)$.

Probemos ahora que (B) $= o[(\|h\|+\|k\|)^2]$ con lo cual quedará visto que $\|g(h,k) - D^2f(a)(h,k)\| = o[(\|h\|+\|k\|)^2]$ en $(h,k)=(0,0)$

como queremos probar.

Consideremos la función $\varphi: K \in B(0,\frac{r}{2}) \mapsto \varphi(K) = f(a+h+K) -$
$- f(a+K) - Df(a+h)(K) + Df(a)(K) \in F$.

Entonces $\text{(B)} = \|\varphi(K) - \varphi(0)\|$. En virtud del teorema del valor medio $\|\varphi(K)-\varphi(0)\| \leq \|K\| \sup\limits_{t\in[0,1]} \|D\varphi(tK)\|$ (IV)

Calculemos la diferencial de $\varphi$ en el punto $tK$:
La funcion $f(a+h+K)$ es la composición $K \xrightarrow{\Psi_1} a+h+K \xrightarrow{\Phi_1} f(a+h+K)$.
Entonces, por la regla de la cadena: $Df(a+h+K)(tK) = D(\Phi_1\circ\Psi_1)(tK) =$
$= D\Phi_1(\Psi_1(tK)) \circ D\Psi_1(tK) = Df(a+h+tK)\circ i_E$

Del mismo modo $Df(a+K)(tK) = Df(a+tK)\circ i_E$

Siendo $Df(a+h)$ una aplicación lineal de $E$ en $F$ es diferenciable en todo punto y su diferencial es la misma función. Lo mismo sucede con $Df(a)$. En definitiva

$D\varphi(tK) = Df(a+h+tK) - Df(a+tK) - Df(a+h) + Df(a)$

Entonces, por la desigualdad triangular de la norma se tiene
$\|D\varphi(tK)\| \leq \|Df(a+h+tK) - Df(a) - D^2f(a)(h+tK)\| + \|Df(a+tK) - Df(a) - D^2f(a)(tK)\| +$
$+ \|Df(a+h) - Df(a) - D^2f(a)(h)\| = o(\|h+tK\|) + o(\|tK\|) + o(\|h\|)$ en $(h,K)=(0,0)$
pues $Df$ es diferenciable en $B(a,r)$ y $a+h+tK, a+tK, a+h \in B(a,r)$.
Puesto que $\|h+tK\| \leq \|h\|+\|K\|$ y $\|tK\|\leq\|K\|$, cualquiera que sea $t\in[0,1]$ tenemos que $\|D\varphi(tK)\| \leq o(\|h\|+\|K\|)$.
Luego, en virtud de (IV), $\text{(B)} \leq \|K\|\, o(\|h\|+\|K\|)$.
De la misma forma que para (A) se prueba que $\text{(B)} \leq o[(\|h\|+\|K\|)^2]$
Por tanto, según (II'), $\|q(h,K) - D^2f(a)(h,K)\|$ está mayorado por $o[(\|h\|+\|K\|)^2]$, como queríamos probar. (*) ■

## 4. Derivadas parciales de orden superior.

Sea $f: U \subset E_1\times\ldots\times E_m \to F$ una función diferenciable en un entorno de $a=(a_1,\ldots,a_m)\in U$ y dos veces diferenciable en el punto $a$.
Entonces existen todas las "derivadas parciales segundas" de $f$ en $a$, que denotaremos por $D^2_{ij}f(a) = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(a)$ y se verifica que

$$D^2 f(a)[(h_1,\ldots,h_m),(K_1,\ldots,K_m)] = \sum_{i,j=1}^{m} D^2_{ij} f(a)(h_i,K_j)$$

siendo $D^2_{ij}f(a) = D_i(D_jf)(a)$.
Quizás deberíamos haber dicho antes que si $f$ es dos veces diferenciable

ble en a, entonces $D_i f$ es diferenciable en el punto a. La demostración de esta afirmación es trivial si tenemos en cuenta que si $Df$ es diferenciable en a, $\exists D^2 f(a) \in \mathcal{L}(E_1\times\dots\times E_m, \mathcal{L}(E_1\times\dots\times E_m, F))$ tal que

$$\| Df(a+h) - Df(a) - D^2 f(a)(h) \| = o(\|h\|) \text{ en } h=0$$

y en el primer miembro aparece la norma de una aplicación lineal de $E_1\times\dots\times E_m$ en $F$, que es el supremo en los puntos de la esfera unidad de $E_1\times\dots\times E_m$ y que es mayor o igual que el supremo en los puntos de la esfera unidad que además están en $\hat{E}_i = \{0\}\times\dots\times E_i\times\dots\times\{0\}$ lo cual prueba que $D_i f$ es diferenciable en a, pues hemos probado que

$$0 \le \frac{\| D_i f(a+h) - D_i f(a) - D(D_i f)(a)(h)\|}{\|h\|} \le \frac{\| Df(a+h) - Df(a) - D(Df)(a)(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

* Consideremos el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
x \in E_1\times\dots\times E_n \arrow[rr, mapsto, "Df"] \arrow[dr, mapsto, "\phi"'] & & Df(x) \in \mathcal{L}(E_1\times\dots\times E_n, F) \\
& (D_1 f(x), \dots, D_n f(x)) \in \mathcal{L}(E_1, F)\times\dots\times\mathcal{L}(E_n, F) \arrow[ur, mapsto, "\Psi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\Psi(D_1 f(x), \dots, D_n f(x))(h_1, \dots, h_n) = D_1 f(x)(h_1) + \dots + D_n f(x)(h_n)$

La aplicación $\Psi$ es lineal y continua, luego es diferenciable y su derivada en todo punto es ella misma. Entonces

$$D^2 f(a) = D(Df)(a) = D(\Psi\circ\phi)(a) = D\Psi(\phi(a)) \circ D\phi(a) =$$
$$= \Psi \circ D\phi(a) = \Psi\circ(D(D_1 f)(a), \dots, D(D_n f)(a))$$

Por tanto, $D^2 f(a)(h_1, \dots, h_n) = [\Psi\circ(D(D_1 f)(a), \dots D(D_n f)(a))](h_1, \dots, h_n) =$

$$= \Psi[(D(D_1 f)(a)(h_1,\dots,h_n), \dots, D(D_n f)(a)(h_1,\dots,h_n))] =$$

$$= \Psi[(D_1(D_1 f)(a)(h_1) + \dots + D_n(D_1 f)(a)(h_n), \dots, D_1(D_n f)(a)(h_1) + \dots + D_n(D_n f)(a)(h_n))]$$

Entonces, según la definición de $\Psi$ tenemos

$$[D^2 f(a)(h_1, \dots, h_n)](k_1, \dots, k_n) =$$
$$= \Psi[(D_1(D_1 f)(a)(h_1) + \dots + D_n(D_1 f)(a)(h_n), \dots, D_1(D_n f)(a)(h_1) + \dots + D_n(D_n f)(a)(h_n))](k_1, \dots, k_n) =$$
$$= ([D_1(D_1 f)(a)(h_1)](k_1) + \dots + [D_n(D_1 f)(a)(h_n)](k_1)) +$$
$$+ ([D_1(D_2 f)(a)(h_1)](k_2) + \dots + [D_n(D_2 f)(a)(h_n)](k_2)) +$$
$$+ \dots + $$
$$+ ([D_1(D_n f)(a)(h_1)](k_n) + \dots + [D_n(D_n f)(a)(h_n)](k_n)) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} D^2_{ij} f(a)(h_i, k_j).$$

Siendo $D^2 f(a)$ simétrica se tiene que

$$\sum^{n} D^2_{ij} f(a)(h_i, k_j) = \sum^{n} D^2_{ij} f(a)(k_i, h_j)$$

Tomando $h=(0,\dots,h_i,\dots,0)$ y $K=(0,\dots,K_j,\dots,0)$ se tiene que
$D^2_{ij}f(a)(h_i,K_j) = D^2_{ji}f(a)(K_j,h_i)$.

No tiene sentido en general decir que $D^2_{ij}f(a) = D^2_{ji}f(a)$, pues $D^2_{ij}f(a) \in \mathcal{L}^2(E_i \times E_j, F)$ y $D^2_{ji}f(a) \in \mathcal{L}^2(E_j \times E_i, F)$. Sin embargo, en el caso $E_1 = \dots = E_n = \mathbb{K}$, toda aplicación bilineal $\varphi$ de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ en $F$ es de la forma $\varphi(s,t) = s\,t\cdot c$, $c = \varphi(1,1) \in F$.
Entonces $D^2_{ij}f(a)(s,t) = D^2_{ji}f(a)(t,s) = D^2_{ji}f(a)(s,t) \Rightarrow$
$\Rightarrow D^2_{ij}f(a) = D^2_{ji}f(a)$.

$\boxed{\text{4.1 TEOREMA: Una función } f: U \subset E_1 \times \dots \times E_n \to F \text{ es } m \text{ veces diferenciable continuamente en } U \text{ (} f \text{ es } m \text{ veces diferenciable en } U \text{ y la aplicación } D^m f: U \to \mathcal{L}^m((E_1 \times \dots \times E_n)^m, F) \text{ es continua) si, y solo si, existen y son continuas todas las derivadas parciales de orden } m.}$

La demostración puede hacerse por inducción sobre $m$. El caso $m=1$ es el teorema 5.5 (Tema 5°).

## 5. Funciones polinómicas en espacios normados.

Sean $E$ y $F$ espacios normados sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Llamamos polinomio homogéneo y continuo de grado $n$ de $E$ en $F$ a la restricción de una aplicación $p$ $n$-lineal y continua de $E^n$ en $F$ a la diagonal $\Delta$ de $E^n$. Es decir, $P$ es un polinomio homogéneo y continuo de grado $n$ de $E$ en $F$ si existe $p \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$ tal que $P(x) = p(x, \overset{n}{\dots}, x)$, $\forall x \in E$.

Se prueba que si $P_i$, $i=0,1,\dots,n$, son polinomios de grado $i$ de $E$ en $F$ entonces $P = \sum_{i=0}^{n} P_i$ es de grado $n$ de $E$ en $F$.

Un polinomio homogéneo continuo de grado cero de $E$ en $F$ es una función constante de $E$ en $F$ (un elemento de $F$). Un polinomio homogéneo continuo de grado 1 de $E$ en $F$ es un elemento de $\mathcal{L}(E,F)$.
En general, hay muchas $p \in \mathcal{L}^n(E^n, F)$ cuyas restricciones a la diagonal $\Delta$ coinciden, es decir, que definen el mismo polinomio homogéneo continuo de grado $n$ de $E$ en $F$. Sin embargo, en el conjunto de las aplicaciones $n$-lineales continuas de $E^n$ en $F$, que definen un polinomio dado hay una, y solo una, que es simétrica. El razonamiento que se sigue para la demostración es puramente algebraico. Lo probaremos para $n=2$.

Sea $p \in \mathcal{L}^2(E \times E, F)$; el polinomio que define es $P(x) = p(x,x)$.

Entonces se tiene

$$P(x+y) = p(x+y, x+y) = p(x,x) + p(x,y) + p(y,x) + p(y,y)$$

$$P(x-y) = p(x-y, x-y) = p(x,x) - p(x,y) - p(y,x) + p(y,y)$$

Por tanto $P(x+y) + P(x-y) = 2\,(p(x,x) + p(y,y)) = 2\,(P(x) + P(y))$

$$P(x+y) - P(x-y) = 2\,(p(x,y) + p(y,x)) \qquad (\mathrm{I})$$

Visto esto, la aplicación $q$ bilineal simétrica de $E \times E$ en $F$ que define el mismo polinomio que $p$, es decir, tal que $p(x,x) = q(x,x)$, $\forall x \in E$, es

$$q(x,y) = \frac{1}{2}\,[p(x,y) + p(y,x)] \qquad (\mathrm{II})$$

Se dice de $q$ que es la simetrizada de $p$. De lo dicho se deduce que dado un polinomio $P$ de grado 2 de $E$ en $F$ existe una aplicación bilineal simétrica que lo define.

De (I) y (II) se deduce que $q(x+y, x+y) - q(x-y, x-y) = 4\, q(x,y)$.

Es decir si sabemos que $q$ es bilineal simétrica y conocemos la restricción de $q$ a $\Delta$ (polinomio determinado por $q$) queda determinada la aplicación $q$ en la forma:

$$q(x,y) = \frac{1}{4}\,[q(x+y, x+y) - q(x-y, x-y)].$$

En otras palabras dos aplicaciones bilineales simétricas que coinciden en la diagonal son la misma. O de otro modo

$$\mathcal{L}^2(E^2, F)/\sim \; = \mathcal{L}^2_S(E, F)$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia: "definen el mismo polinomio".

## 6. TEOREMA DE TAYLOR

(A) DEFINICION: Sean $f: U \subset E \to F$ y $g: V \subset E \to F$ dos funciones. Se dice que $f$ tiene un contacto con $g$ de orden $r$ en un punto $a \in U \cap V$ si

① $f(a) = g(a)$

② $\|f(x) - g(x)\| = o(\|x-a\|^r)$ en $x = a$ (es decir $\lim_{x \to a} \frac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x-a\|^r} = 0$).

Es inmediato comprobar la siguiente:

**6.1. PROPOSICION:** a) $f: U \subset E \to F$ es continua en $a$ si, y solo si, $f$ tiene en $a$ un contacto de orden 0 con una función constante (concretamente, $x \in E \to f(a)$).

b) $f: U \subset E \to F$ es diferenciable en $a$ si, y solo si, tiene un contacto en $a$ de orden 1 con una función afín (polinómica de grado 1, es decir, cte + lineal). Concretamente esta función afín no tiene más remedio que ser

$$x \in E \longmapsto f(a) + Df(a)(x-a) \;(= f(a) - Df(a)(a) + Df(a)(x))$$

* La relación "tener un contacto de orden $r$ en $a$" es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones definidas en un entorno de $a$ y valoradas en $F$.

(B) 6.2. TEOREMA: (de Taylor)

Si $f: U \subset E \longrightarrow F$ es $m$ veces diferenciable en el punto $a$ entonces existe un polinomio continuo de grado menor o igual que $m$, y solo uno, que tiene un contacto con $f$ en $a$ de orden $m$. Dicho polinomio se dice el polinomio de Taylor de $f$ en $a$ y es

$$P^m f(a): x \in E \longmapsto P^m f(a)(x) = f(a) + \frac{1}{1!} Df(a)(x-a) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{m!} D^m f(a)(x-a)^m.$$

donde se ha utilizado la notación $D^2 f(a)(x-a)^2 = [D^2 f(a)(x-a)](x-a), \dots$

Demostr.: Veamos que $P^m f(a)$ tiene un contacto de orden $m$ con $f$ en $a$.

Evidentemente $f(a) = P^m f(a)(a)$

Probemos que $\|f(x) - P^m f(a)(x)\| = o(\|x-a\|^m)$ en $x=a$ por inducción sobre $m$.

- Para $m=0$ (o $m=1$) es trivial por la continuidad de $f$ en $a$ (o la diferenciabilidad de $f$ en $a$).
- Supongamos que la tesis es cierta para funciones $m-1$ veces diferenciables en $a$. Haciendo $h = x-a$, queremos ver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \frac{1}{1!} Df(a)(h) - \dots - \frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m\|}{\|h\|^m} = 0 \qquad (I)$$

Consideremos la función

$$(*) \quad \phi: h \in B(0,r) \longmapsto \phi(h) = f(a+h) - \frac{1}{1!} Df(a)(h) - \frac{1}{2!} D^2 f(a)(h)^2 - \dots - \frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m \in F.$$

La expresión (I) queda entonces así

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|\phi(h) - \phi(0)\|}{\|h\|^m} = 0$$

En virtud del teorema del valor medio se verifica

$$\|\phi(h) - \phi(0)\| \leq \|h\| \cdot \sup_{t\in[0,1]} \|D\phi(th)\|$$

Vamos a calcular $D\phi(th)$

- $Df(a+h)(th) = Df(a+th)$, por la regla de la cadena.
- $Df(a)$ es lineal y continua y, por tanto, su derivada en cualquier punto es ella misma.
- Consideremos la composición $h \xrightarrow{\varphi} (h,h) \xrightarrow{\psi} \frac{1}{2!} D^2 f(a)(h,h)$

$D(\psi \circ \varphi)(th) = D\psi(\varphi(th)) \circ D\varphi(th) = D\psi(\varphi(th)) \circ \varphi$, pues $\varphi$ es lineal y continua. Por otro lado $D\psi[\varphi(th)](r,s) = D\psi(th,th)(r,s) = \psi(th,s) + \psi(r,th)$ pues $\psi$ es bilineal y continua. Entonces:

$[D(\Psi\circ\varphi)(th)](k) = [D\Psi[\varphi(th)]\circ\varphi](k) = D\Psi[\varphi(th)](k,k) =$
$= D\Psi(th,th)(k,k) = \Psi(th,k)+\Psi(k,th) = 2\Psi(th,k)$, pues $\Psi$ es simétrica $(\Psi = \frac{1}{2!}D^2f(a))$.

Luego $[D(\Psi\circ\varphi)(th)](k) = 2\Psi(th,k) = 2[\Psi(th)](k)$

- Consideremos la composición $h\in E \xrightarrow{\varphi} (h,h,h) \xrightarrow{\Psi} \frac{1}{3!}D^3f(a)(h)^3 = \frac{1}{3!}D^3f(a)(h,h,h)$
$\Psi = \frac{1}{3!}D^3f(a)$. Tenemos que

$[D(\frac{1}{3!}D^3f(a)\circ\varphi)(th)](k) = [\frac{1}{3!}D[D^3f(a)(\varphi(th))]\circ D\varphi(th)](k) =$

$\overset{(1)}{=} \frac{1}{3!}[D(D^3f(a)(th,th,th))\circ\varphi](k) =$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{3!}D[D^3f(a)(th,th,th)](k,k,k) \overset{(3)}{=}$

$= \frac{1}{3!}[D^3f(a)(k,th,th)+D^3f(a)(th,k,th)+D^3f(a)(th,th,k)] \overset{(4)}{=}$

$= \frac{3}{3!}D^3f(a)(th,th,k) = \frac{1}{2!}[D^3f(a)(th,th)](k)$

(1) pues $\varphi$ es lineal y continua, (2) $\varphi(k)=(k,k,k)$, (3) $D^3f(a)$ es trilineal, (4) $D^3f(a)$ es simétrica.

- Así sucesivamente, $[D(\frac{1}{m!}D^mf(a)\circ\varphi)(th)](k) = \frac{1}{(m-1)!}[D^mf(a)(th)^{m-1}](k)$.

Entonces

$D\phi(th) = Df(a+th) - Df(a) - \frac{1}{1!}D^2f(a)(th) - \frac{1}{2!}D^3f(a)(th)^2 - \dots -$
$- \frac{1}{(m-1)!}D^mf(a)(th)^{m-1} =$

$= Df(a+th) - Df(a) - \frac{1}{1!}D(Df)(a)(th) - \frac{1}{2!}D^2(Df)(a)(th)^2 - \dots - \frac{1}{(m-1)!}D^{m-1}(Df)(a)(th)^{m-1}$

Pero esta última igualdad es $o(\|th\|^{m-1})$ por hipótesis de inducción para la función $Df$ que las verifica, y siendo $t\in[0,1]$ se tiene que $\sup_{t\in[0,1]}\|D\phi(th)\| = o(\|h\|^{m-1})$.

Entonces $\|\phi(h)-\phi(0)\| \le \|h\|\, o(\|h\|^{m-1}) = o(\|h\|^m)$, como queríamos ver.

* Unicidad del polinomio de Taylor de $f$ en $a$: Supongamos que existen dos polinomios de grado menor o igual que $m$ con un contacto de orden $m$ con $f$ en $a$. Sean $P$ y $Q$ dichos polinomios de $E$ en $F$. Supongamos que admiten las expresiones siguientes:

$P(h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots + a_mh^m$ y $Q(h) = b_0 + b_1h + b_2h^2 + \dots + b_mh^m$

donde $a_0,b_0\in F$; $a_1,b_1\in \mathcal{L}_s(E,F)$; ...; $a_k,b_k\in\mathcal{L}_s^k(E^k,F)$; ...; $a_m,b_m\in\mathcal{L}_s^m(E^m,F)$ siendo $\mathcal{L}_s^k(E^k,F)$ el conjunto de aplicaciones $k$-lineales continuas simétricas; la notación $a_1h$ representa $a_1(h)$ y, en general, $a_kh^k = a_k(h, \overset{k)}{\dots}, h)$.

Por la transitividad de la relación "tener un contacto de orden $m$ en un

Siendo $\lim_{h\to 0} \frac{P(h)-Q(h)}{\|h\|^m}=0$, trivialmente se tiene que $\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-Q(h)}{\|h\|^K}=0$, $K=0,1,\dots,m$

(basta considerar que, para $\|h\|\leq 1$, si $K\leq m \Rightarrow \|h\|^m\leq \|h\|^K \Rightarrow \frac{1}{\|h\|^K}\leq\frac{1}{\|h\|^m}$)

Para $K=0$ tenemos que $\lim_{h\to 0}(P(h)-Q(h))=0$. Por otra parte $\lim_{h\to 0}(P(h)-Q(h))=a_0-b_0$. Luego debe ser $a_0=b_0$.

Para $K=1$ tenemos que $\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-Q(h)}{\|h\|}=0$. Por otro lado, ya que $a_0=b_0$ tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-Q(h)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\left[(a_1-b_1)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)+(a_2-b_2)\left(\frac{h}{\|h\|},h\right)+\dots+(a_m-b_m)\left(\frac{h}{\|h\|},h,\overset{m-1}{\dots},h\right)\right]$$

Pero $\lim_{h\to 0}(a_2-b_2)\left(\frac{h}{\|h\|},h\right)=0$, pues $0\leq\left\|(a_2-b_2)\left(\frac{h}{\|h\|},h\right)\right\|\leq\|a_2-b_2\|\cdot\left\|\frac{h}{\|h\|}\right\|\cdot\|h\|\xrightarrow[h\to 0]{}0$

Análogamente, $\lim_{h\to 0}(a_K-b_K)\left(\frac{h}{\|h\|},h,\overset{K-1}{\dots},h\right)=0$ si $K>1$

Luego $0=\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-Q(h)}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}(a_1-b_1)\left(\frac{h}{\|h\|}\right)$

Por tanto, dado $e\in E$, $0=\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}}(a_1-b_1)\left(\frac{te}{\|te\|}\right)=(a_1-b_1)\left(\frac{e}{\|e\|}\right)\lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$

Debe ser entonces $(a_1-b_1)\left(\frac{e}{\|e\|}\right)=0$, $\forall e\in E$, pues $\lim_{t\to 0}\frac{t}{|t|}$ no existe.

Por tanto $a_1-b_1$ aplica todo punto de la esfera unidad de $E$ en $\{0\}$ y, en consecuencia, $a_1-b_1=0$. Luego $a_1=b_1$.

De la misma manera se prueba que las restricciones de $a_K$ y $b_K$ a la diagonal de $E^K$ coinciden y, siendo $a_K$ y $b_K$ simétricas, debe ser $a_K=b_K$. c.s.q.d.

## 7. Teoremas de Taylor para funciones reales de variable real

A lo largo de este apartado $f$ y $g$ serán funciones definidas en un intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ y valoradas en $\mathbb{R}$, continuas en $[a,b]$, $m$ veces diferenciables en $[a,b[$ y $m+1$ veces diferenciables en $]a,b[$. (*)

En estas hipótesis se tiene

**7.1. TEOREMA:** Existe $c\in\, ]a,b[$ tal que

$$\boxed{[f(b)-P^m f(a)(b)]\,g^{(m+1)}(c)=[g(b)-P^m g(a)(b)]\,f^{(m+1)}(c)} \quad (**)$$

Demostr.: Consideremos las funciones siguientes

$F: x\in[a,b]\longmapsto f(x)-P^m f(a)(x)\in\mathbb{R}$

$G: x\in[a,b]\longmapsto g(x)-P^m g(a)(x)\in\mathbb{R}$

$H: x\in[a,b]\longmapsto H(x)=F(b)G(x)-G(b)F(x)\in\mathbb{R}$

Entonces $H$ es continua en $[a,b]$ y diferenciable continuamente en $]a,b[$.

Además $H(a)=H(b)\ (=0)$. Entonces, por el teorema de Rolle $\exists c_1\in\, ]a,b[$ tal que $H'(c_1)=0$.

Consideremos la función $H': x\in[a,c_1]\mapsto H'(x)=F(b)G'(x)-G(b)F'(x)\in\mathbb{R}$

$H'$ es continua en $[a, c_1]$ y diferenciable en $]a, c_1[$. Además $H'(a) = H'(c_1) (=0)$. (*). Entonces, por el teorema de Rolle $\exists c_2 \in ]a, c_1[ \,/\, H''(c_2) = H^{(2)}(c_2) = 0$

Así sucesivamente, probamos que $\exists c_m \in ]a, c_{m-1}[ \subset ]a, b[ \,/\, H^{(m)}(c_m) = 0$.

La función $H^{(m)} : [a, c_m] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, c_m]$ y diferenciable en $]a, c_m[$. Además $H^{(m)}(a) = H^{(m)}(c_m) (=0)$. Una vez más el teorema de Rolle garantiza la existencia de $c \in ]a, c_m[ \subset ]a, b[$ tal que $H^{(m+1)}(c) = 0$.

Si tenemos en cuenta que $H^{(m+1)}(c) = F(b)\, G^{(m+1)}(c) - G(b)\, F^{(m+1)}(c) = [f(b) - P^m f(a)(b)]\, g^{(m+1)}(c) - [g(b) - P^m g(a)(b)]\, f^{(m+1)}(c)$ queda demostrado el teorema. ■

7.2. COROLARIO: $\exists\, c \in ]a, b[$ tal que $f(b) - P^m f(a)(b) = \dfrac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$.

Demostr.: Es consecuencia inmediata del teorema anterior para $g(x) = (x-a)^{m+1}$, pues $P^m g(a) = 0$ y $g^{(m+1)}(c) = (m+1)!$. csqd.

7.3. COROLARIO: Si $\forall x \in ]a, b[$, $|f^{(m+1)}(x)| \leq g^{(m+1)}(x)$ entonces
$$|f(b) - P^m f(a)(b)| \leq g(b) - P^m g(a)(b)$$

Demostr.: Trivial consecuencia del Teorema 7.1., si $g^{(m+1)}(x) > 0, \forall x$. (**)

7.4. COROLARIO: Si $\forall x \in ]a, b[$, $f^{(m+1)}(x) \geq 0$ entonces
$$f(b) - P^m f(a)(b) \geq 0$$

7.5 COROLARIO: Si $\forall x \in ]a, b[$, $|f^{(m+1)}(x)| \leq M$ entonces
$$|f(b) - P^m f(a)(b)| \leq \frac{M}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$$

Estos resultados vienen a dar una estimación de la diferencia entre los valores de la función y de su polinomio de Taylor.

## 8. Teoremas de Taylor para funciones reales definidas en un espacio normado.

En este apartado $E$ es un espacio normado, $U$ un abierto de $E$ y $L[a, b]$ un segmento que supondremos contenido en $U$. Sean $f$ y $g$ funciones definidas en $U$ y valoradas en $\mathbb{R}$, continuas en $L[a, b]$, $m$ veces diferenciables en $L[a, b[$ y $m+1$ veces diferenciables en $L]a, b[$. Entonces se tiene el siguiente

8.1. TEOREMA: Existe $c \in L]a, b[$ tal que
$$[f(b) - P^m f(a)(b)]\, D^{m+1} g(c)(b-a)^{m+1} = [g(b) - P^m g(a)(b)] \cdot D^{m+1} f(c)(b-a)^{m+1}$$

Demostr.: La demostración se reduce al teorema 7.1 considerando las funciones reales de variable real $f\circ s$ y $g\circ s$ siendo $s$ la función que a cada $t\in[0,1]$ asocia $s(t)=tb+(1-t)a\in E$.

* Antes de hacer esta demostración hagamos un pequeño inciso sobre la regla de la cadena para derivadas de orden superior a uno.

En el caso de que $f$ y $g$ sean funciones reales de variable real y en las hipótesis necesarias se tiene que

$(g\circ f)'(x)=g'[f(x)]\cdot f'(x)=(g'\circ f)(x)\cdot f'(x)$.

Entonces $(g\circ f)''(x)=(g'\circ f)'(x)\cdot f'(x)+(g'\circ f)(x)\cdot f''(x)=$

$=(g''\circ f)(x)\cdot f'(x)\cdot f'(x)+(g'\circ f)(x)\cdot f''(x)$. (I)

Estudiemos el caso en que $f$ y $g$ son funciones definidas y valoradas en espacios normados. De una primera aplicación de la regla de la cadena se tiene que: $D(g\circ f)(x)=(Dg\circ f)(x)\circ Df(x)$.

Si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} x\in E \arrow[r, mapsto, "D(g\circ f)"] \arrow[dr, "\phi"'] & D(g\circ f)(x)\in\mathcal{L}(E,G) \\ & {[(Dg\circ f)(x), Df(x)]\in\mathcal{L}(F,G)\times\mathcal{L}(E,F)} \arrow[u, mapsto, "\Psi"'] \end{tikzcd}$$

tenemos $D^2(g\circ f)(x)=D(\Psi\circ\phi)(x)=(D\Psi\circ\phi)(x)\circ D\phi(x)$

Siendo $\Psi$ bilineal y continua: $D\Psi(\alpha,\beta)(h,k)=\Psi(\alpha,k)+\Psi(h,\beta)$

Entonces $D^2(g\circ f)(x)(h)=D\Psi(\phi(x))[D\phi(x)(h)]=$

$=D\Psi(\phi(x))\big[[D^2g(f(x))\circ Df(x)](h), D^2f(x)(h)\big]=$

$=[(D^2g(f(x))\circ Df(x))(h)]\circ Df(x)+(Dg\circ f)(x)\circ D^2f(x)(h)$

expresión formalmente idéntica a (I).

* Demostración del teorema 8.2: Las funciones $f\circ s$ y $g\circ s$ están en las hipótesis del teorema de Taylor para funciones reales de variable real. Luego, existe $\xi\in]0,1[$ tal que

$[(f\circ s)(1)-P^m(f\circ s)(0)(1)]D^{m+1}(g\circ s)(\xi)=[(g\circ s)(1)-P^m(g\circ s)(0)(1)]D^{m+1}(f\circ s)(\xi)$ (II)

Pero $(f\circ s)(1)=f(s(1))=f(b)$, $(f\circ s)(0)=f(a)$. Además

$P^m(f\circ s)(0)(1)=(f\circ s)(0)+\frac{1}{1!}D(f\circ s)(0)(1)+\frac{1}{2!}D^2(f\circ s)(0)(1)^2+\dots+\frac{1}{m!}D^m(f\circ s)(0)(1)^m$ (III)

Calculemos las derivadas sucesivas de $D(f\circ s)$ en $0$:

$-D(f\circ s)(0)(1)=[Df(s(0))\circ Ds(0)](1)=Df(s(0))(b-a)=Df(a)(b-a)$, pues siendo $s(t)=tb+(1-t)a=a+t(b-a)$, $s$ es diferenciable en todo punto (en particular en $0$) y su diferencial es la aplicación $s_1: t\in[0,1]\mapsto t(b-a)$, y, por tanto, $Ds(0)(1)=s_1(1)=b-a$.

$-D^2(f\circ s)(0)(1)^2=D^2f(s(0))\big(Ds(0)(1), Ds(0)(1)\big)+Df(s(0))\circ D^2s(0)(1)^2$

pero $D^2 s(0)(1)^2 = 0$, pues en cualquier punto $\alpha$ de $[0,1]$, $Ds(\alpha) = s_1$, es decir, $Ds$ es una aplicación constante y, por tanto, su derivada segunda es cero. Luego

$D^2(f\circ s)(0)(1)^2 = D^2 f(s(0))(Ds(0)(1), Ds(0)(1)) = D^2 f(a)(b-a)^2$.

- $D^3(f\circ s)(0)(1)^3 = D^3 f[s(0)](Ds(0)(1), Ds(0)(1), Ds(0)(1)) = D^3 f(a)(b-a)^3$.

Se prueba del mismo modo que $D^k(f\circ s)(0)(1)^k = D^k f(a)(b-a)^k$.

Por otra parte,

$D^{m+1}(f\circ s)(\xi)(1)^{m+1} = D^{m+1} f[s(\xi)](Ds(\xi)(1), \ldots, Ds(\xi)(1)) =$

$= D^{m+1} f(s(\xi))(b-a)^{m+1}$.

Si hacemos $c = s(\xi)$ tenemos que $c \in ]a,b[$, pues $\xi \in ]0,1[$, y

$D^{m+1}(f\circ s)(\xi)(1)^{m+1} = D^{m+1} f(c)(b-a)^{m+1}$.

Para la función $g$ se obtienen resultados totalmente análogos.

Hemos visto, en definitiva, lo siguiente:

- $(f\circ s)(1) = f(b)$ , $(g\circ s)(1) = g(b)$
- $P^m(f\circ s)(0)(1) = f(a) + \frac{1}{1!} Df(a)(b-a) + \frac{1}{2!} D^2 f(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{m!} D^m f(a)(b-a)^m = P^m f(a)(b)$

  $P^m(g\circ s)(0)(1) = g(a) + \frac{1}{1!} Dg(a)(b-a) + \frac{1}{2!} D^2 g(a)(b-a)^2 + \cdots + \frac{1}{m!} D^m g(a)(b-a)^m = P^m g(a)(b)$
- $D^{m+1}(f\circ s)(\xi)(1)^{m+1} = D^{m+1} f(c)(b-a)^{m+1}$, $D^{m+1}(g\circ s)(\xi)(1)^{m+1} = D^{m+1} g(c)(b-a)^{m+1}$.

Sustituyendo estos resultados en (II) queda demostrado el teorema. ■

8.2. COROLARIO: Existe $c \in ]a,b[$ tal que

$$\boxed{f(b) - P^m f(a)(b) = \frac{1}{(m+1)!} D^{m+1} f(c)(b-a)^{m+1}}$$

8.3. COROLARIO: Si $\forall x \in ]a,b[$, $\|D^{m+1} f(x)\| \le M$ entonces

$$\boxed{\|f(b) - P^m f(a)(b)\| \le \frac{M}{(m+1)!} \|b-a\|^{m+1}}$$

## 9. Teoremas de Taylor para funciones de variable real valoradas en un espacio normado.

9.1. TEOREMA: Sean $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to E$ y $g: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$, $m$ veces diferenciables en $[a,b[$ y $m+1$ veces diferenciables en $]a,b[$. Si $\forall x \in ]a,b[$, $\|D^{m+1} f(x)\| \le g^{(m+1)}(x)$, entonces (*)

$$\|f(b) - P^m f(a)(b)\| \le g(b) - P^m g(a)(b).$$

Demostr.: Procederemos por inducción sobre $m$. Para $m=0$ el teorema es cierto (Teorema 3.1, Tema 5°).

Supongamos cierto el teorema para $m-1$. Entonces, el teorema es cierto para $Df$ y $Dg$, pues $\forall z \in ]a,b[$, son continuas en $[a,z]$, $m-1$ veces diferenciables en $[a,z[$ y $m$ veces diferenciables en $]a,z[$. Además

$\forall x \in ]a,b[$, $\|D^{m+1}f(x)\| = \|D^m(Df)(x)\|$ y $D^{m+1}g(x) = D^m(Dg)(x)$.
Luego $\|D^m(Df)(x)\| \leq D^m(Dg)(x)$. Por tanto, se verifica la tesis, es decir:

$$\forall z \in ]a,b[, \ \|Df(z) - P^{m-1}(Df)(a)(z)\| \leq Dg(z) - P^{m-1}(Dg)(a)(z) \quad (I)$$

Si consideramos las funciones

$$F: x \in [a,b] \longmapsto F(x) = f(x) - P^m f(a)(x) \in E$$
$$G: x \in [a,b] \longmapsto G(x) = g(x) - P^m g(a)(x) \in \mathbb{R}$$

la desigualdad (I) se puede escribir en la forma

$$\forall z \in ]a,b[, \ \|DF(z)\| \leq G'(z)$$

Entonces, según Teorema 3.1, Tema 5º, se tiene que

$$\|F(b) - F(a)\| \leq G(b) - G(a)$$

que es justamente lo que queremos probar. ■

9.2. COROLARIO: Si $\forall x \in ]a,b[$, $\|D^{m+1}f(x)\| \leq M$ entonces

$$\|f(b) - P^m f(a)(b)\| \leq \frac{M}{(m+1)!}(b-a)^{m+1}$$

## 10. Teorema de Taylor para funciones entre espacios normados.

Damos sin demostración el siguiente

10.1. TEOREMA: Sean $E$ y $F$ espacios normados y $U$ abto de $E$. Si $f: U \to F$ es continua en $L[a,b]$, $m$ veces diferenciable en $L[a,b[$ y $m+1$ veces diferenciable en $L]a,b[$ y si $\forall x \in L]a,b[$, $\|D^{m+1}f(x)\| \leq M$, entonces

$$\|f(b) - P^m f(a)(b)\| \leq \frac{M}{(m+1)!}\|b-a\|^{m+1}$$

## 11. EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES REALES DIFERENCIABLES

Sea $E$ un espacio normado (*), y $U$ un entorno de un punto $a \in E$.

DEFINICION: Se dice que una función $f: U \subset E \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo (resp. mínimo) relativo en el punto $a$ si existe un entorno $V_a$ de $a$ tal que si $x \in V_a \cap U$ entonces $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
Se dice que el máximo (resp. mínimo) es estricto si $f(x) < f(a)$, $\forall x \in V_a \cap U - \{a\}$ (resp. $f(x) > f(a)$).

11.1. Lema: Sean $E$ y $F$ espacios normados sobre $\mathbb{K}$, $U$ un abierto de $E$ y $f: U \subset E \to F$ una función $m$ veces diferenciable en el punto $a \in U$. Entonces existe una función $\alpha: U \subset E \to F$ continua en $a$ tal que $\alpha(a) = 0$ y $f(x) - P^m f(a)(x) = \alpha(x)\|x-a\|^m$.

Demostr.: Basta definir $\alpha: x \in U \longmapsto \alpha(x) = \begin{cases} = \dfrac{f(x) - P^m f(a)(x)}{\|x-a\|^m} & \text{si } x \neq a \\ = 0 & \text{si } x = a \end{cases}$

Esto no es más que otra forma de expresar el hecho de que $f$ y $P^m f(a)$ tienen un contacto de orden $m$ en el punto $a$.

11.2. TEOREMA: (Condición necesaria de extremo relativo).

Si $f: U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ es $m$ veces diferenciable en $a \in U$ y $f$ alcanza un máximo (resp. mínimo) relativo en $a$ y se verifica además que $Df(a) = 0, \dots, D^{m-1}f(a) = 0$ y $D^m f(a) \neq 0$, entonces $m$ es par y $D^m f(a)$ es semidefinida negativa (resp. positiva), es decir, que $\forall h \in E$, $D^m f(a)(h)^m \leq 0$ (resp. $D^m f(a)(h)^m \geq 0$). (*)

Demostr.: En las hipótesis se tiene que $P^m f(a)(a+h) = f(a) + \frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m$. En virtud del lema anterior, existe una función $\alpha: U \subset E \to F$ continua en el punto $0$ y tal que $\alpha(0) = 0$, verificando, en este caso particular que

$$f(a+h) - f(a) - \frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m = \alpha(h) \|h\|^m. \quad (I)$$

Haremos la demostración en el caso de que $f$ alcance un máximo relativo, (si $f$ alcanzase un mínimo relativo el razonamiento es análogo).

Puesto que $f$ alcanza un máximo en $a$, $\exists \delta > 0 / \|h\| < \delta \Rightarrow f(a+h) - f(a) \leq 0$.

Entonces, de (I), se deduce que

$$\frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m + \alpha(h) \|h\|^m \leq 0, \quad \text{si } \|h\| < \delta.$$

Dicho de otra forma, dado $h \in E$ arbitrario, cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$ con $\|th\| < \delta$ (es decir, tal que $|t| < \frac{\delta}{\|h\|}$, $h \neq 0$) se tiene que

$$\frac{1}{m!} D^m f(a)(th)^m + \alpha(th) \|th\|^m \leq 0 \quad (II)$$

Entonces si $m$ es par, $t^m > 0$ y, puesto que $D^m f(a)(th)^m = t^m D^m f(a)(h)^m$ y $\|th\|^m = |t|^m \|h\|^m = t^m \|h\|^m$, se tiene que, dividiendo por $t^m$

$$\frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m + \alpha(th) \|h\|^m \leq 0, \quad \forall h \in E. \quad (III)$$

Dado que $\alpha(th) \xrightarrow[t \to 0]{} 0$ debe ser $\frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m \leq 0, \forall h \in E$

y por tanto $D^m f(a)(h)^m \leq 0, \forall h \in E$.

Si $m$ fuese impar la desigualdad (II) no implicaría (III) pues $t^m$ sería positivo si $t > 0$ y negativo si $t < 0$.

11.3. TEOREMA: (Condición suficiente de extremo relativo)

Si $f: U \subset E \longrightarrow \mathbb{R}$ es $m$ veces diferenciable en $a \in U$, con $m$ par, y se verifica que $Df(a) = 0, \dots, D^{m-1}f(a) = 0$ y existe $\rho > 0$ tal que $D^m f(a)(h)^m \leq -\rho \|h\|^m$, $\forall h \in E$, entonces $f$ alcanza en $a$ un máximo relativo estricto (mínimo si $D^m f(a)(h)^m \geq \rho \|h\|^m$).

Demostr.: Sabemos que existe la función $\alpha$ continua en $0$ tal que

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m + \alpha(h) \|h\|^m. \quad (I)$$

Pero $\frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m \leq \frac{-\rho}{m!} \|h\|^m$. Luego

$$\frac{1}{m!} D^m f(a)(h)^m + \alpha(h) \cdot \|h\|^m \leq \left[\frac{-\rho}{m!} + \alpha(h)\right] \|h\|^m \quad (\text{II})$$

Ahora bien $\exists \delta > 0 / \|h\| < \delta \Rightarrow |\alpha(h)| < \frac{\rho}{2m!}$, (III), pues $\alpha$ es continua en $0$ y $\alpha(0)=0$.

De (I), (II) y (III) deducimos que si $0<\|h\| < \delta$ entonces $f(a+h) - f(a) < 0$. c.s.q.d.

OBSERVACION: No hemos puesto en el teorema anterior la condición de que $D^m f(a)$ sea definida negativa, sino algo más restrictivo, hemos puesto la desigualdad "coerciva" siguiente

$$D^m f(a)(h)^m \leq -\rho \|h\|^m, \forall h \in E. \quad (\text{I})$$

Por supuesto, si $D^m f(a)$ verifica esta desigualdad es definida negativa. El recíproco no es cierto en general. Sí es cierto en el caso de que $E$ sea de dimensión finita, es decir: "Si $E$ es de dimensión finita la condición de que $D^m f(a)$ sea definida negativa es equivalente a que exista $\rho > 0$ que satisfaga la desigualdad coerciva (I)".

Demostr.: Sea $S$ la esfera unidad de $E$. Entonces $S$ es compacto, pues es un cerrado y acotado en un espacio normado de dimensión finita. Entonces $S^m = S \times \overset{m}{\cdots} \times S$, que es la esfera unidad de $E^m$ es compacto. Si la aplicación continua $D^m f(a): E^m \to \mathbb{R}$ es definida negativa, es decir, tal que $D^m f(a)(h)^m < 0$, $\forall h \in E - \{0\}$, se verifica, en particular, que $D^m f(a)(h)^m < 0$, $\forall h \in S$. Siendo $S^m$ compacto, $D^m f(a)$ alcanza el máximo en el compacto, es decir, $\exists (h_1, \dots, h_m) \in S^m$ tal que $D^m f(a)(h_1, \dots, h_m) \geq D^m f(a)(h)^m$, $\forall h \in S$

Si hacemos $-\rho = D^m f(a)(h_1, \dots, h_m) < 0$, se tiene que

$$\forall h \in E \quad D^m f(a) \left(\frac{h}{\|h\|}\right)^m \leq -\rho \Rightarrow D^m f(a)(h)^m \leq -\rho \|h\|^m.$$