TEMA 7º: TEOREMAS DE LA FUNCION IMPLICITA E INVERSA

1. Introducción. Planteamiento del problema.

Vamos a aplicar en este tema el cálculo diferencial a la resolución de problemas de gran transcendencia en ANALISIS: "resolución de ecuaciones funcionales".

Sean A, B y C conjuntos, $F: A\times B \longrightarrow C$ una aplicación y c un elemento de C. Entonces

DEFINICION: Se dice que la función $f: A'\subset A \longrightarrow B'\subset B$ está implícitamente definida por la ecuación funcional $F(x,y)=c$ (en la incógnita funcional y) si $\forall x\in A'$, $F(x,f(x))=c$. También se dice que f es una solución del problema de función implícita $F(x,y)=c$.

Se dice que la solución f pasa por (x_0,y_0) (o verifica el dato inicial $(x_0,y_0)\in A'\times B'$) si $y_0=f(x_0)$. (*)

Como siempre, en la resolución de ecuaciones, y en nuestro caso para la resolución de la ecuación funcional $F(x,y)=c$, interesan los problemas de existencia de soluciones, número de soluciones (en particular, la unicidad), etc... Interesa también, pero ya A, B y C deben ser algo más que simples conjuntos (espacios topológicos, normados, ...), la regularidad, continuidad, diferenciabilidad de las posibles soluciones.

En el problema ¡tan general! enunciado resulta que hay soluciones si, y solo si, $F^{-1}(c)\neq\emptyset$.

EJEMPLO: Consideremos la función $F: (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto x^2+y^2\in\mathbb{R}$.

Dado $c\in\mathbb{R}$, consideremos la ecuación funcional $F(x,y)=c$.

- Si $c<0$, resulta que $F^{-1}(c)=\emptyset$; por tanto, no hay ninguna función $f: A\subset\mathbb{R}\to B\subset\mathbb{R}$ tal que $\forall x\in A$, $F(x,f(x))=c$, o dicho de otra forma, la ecuación funcional $F(x,y)=c\,(<0)$ no define implícitamente ninguna función.
- Si $c=0$, $F^{-1}(c)=\{(0,0)\}$. Entonces no hay otra solución de $F(x,y)=0$ que la trivial: $f: 0\in\{0\}\longmapsto 0\in\{0\}$.
- Estudiemos, p. ej., el caso $c=1$. La ecuación funcional $x^2+y^2=1$ admite infinitas soluciones, como son:

$f_1: x\in[-1,1]\longmapsto\sqrt{1-x^2}\in[0,1]$

$f_2: 0\in\{0\}\longmapsto 1\in\{1\}$

$f_3: x\in\,]\frac{1}{2},\frac{2}{3}]\longmapsto\sqrt{1-x^2}$

$f_4: x\in\,]-1,-\frac{1}{2}]\cup[0,\frac{1}{3}]\longmapsto\sqrt{1-x^2}$

$f_5: x\in[0,1]\longmapsto -\sqrt{1-x^2}\in[-1,0]$

$f_6: x\in[0,1]\longmapsto \begin{cases}\sqrt{1-x^2} & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ -\sqrt{1-x^2} & x\in\mathbb{I}\cap[0,1]\end{cases}$.

Hallar una solución de la ecuación funcional $x^2+y^2=1$ es, geométricamente, seleccionar una colección de puntos del conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2=1\}$ que sean la "gráfica de una función de x en y".

2. TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA

Antes de enunciar y demostrar el teorema de la función implícita, vamos a recordar de TOPOLOGIA I el teorema del punto fijo de Banach y una consecuencia inmediata del mismo que utilizaremos en la demostración del teorema de la función implícita.

2.1. TEOREMA: (del punto fijo de Banach).

Sea M un espacio métrico completo y $f: M\to M$ una aplicación contractiva (Lipschitziana de constante menor que 1). Entonces existe un punto $a\in M$, y uno solo, tal que $f(a)=a$.

La demostración se hace considerando la sucesión $(x_n)_n$ en M donde x_1 es un punto arbitrario de M y si $n>1$, $x_n=f(x_{n-1})$. Se demuestra que esta sucesión es de Cauchy utilizando que f es contractiva. Siendo M completo, $(x_n)_n$ convergerá hacia un punto a que será un punto fijo de f. La unicidad es consecuencia inmediata del hecho de ser f contractiva.

2.2. COROLARIO: Sea M un espacio métrico completo, a un punto de M, r un número real positivo y K un punto de $[0,1[$. Sea $f: B[a,r]\subset M\to M$ una aplicación tal que $\forall x,y\in B[a,r]$, $d(f(x),f(y))\leq K\,d(x,y)$ y tal que $d(f(a),a)\leq r(1-K)$. Entonces, $f(B[a,r])\subset B[a,r]$ y f tiene un único punto fijo en $B[a,r]$.

Demostr.: $\forall x\in B[a,r]$, $d(f(x),a)\leq d(f(x),f(a))+d(f(a),a)\leq$ $\leq K\,d(x,a)+r(1-K)\leq Kr+r(1-K)=r$. Luego $f(x)\in B[a,r]$.
Por tanto, $f(B[a,r])\subset B[a,r]$.

Siendo $B[a,r]$ un cerrado en M, que es completo, $B[a,r]$ es completo. Entonces, siendo $f: B[a,r]\to B[a,r]$ una aplicación contractiva del espacio métrico completo $B[a,r]$ en sí mismo, tendrá un único punto fijo (por supuesto en $B[a,r]$). c.s.q.d.

* Sean E, F y G espacios normados sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), F y G completos (de Banach).

Sea U un abierto de $E\times F$ y $f: U\subset E\times F\longrightarrow G$ una función de clase $K\geq 1$ (es decir, K veces diferenciable continuamente).

Entonces:

(*) **2.3. TEOREMA**. Si (a,b) es un punto de $\mathcal{U}$ tal que $f(a,b)=0$ y $D_2 f(a,b)$ es un isomorfismo bicontinuo de F en G ($D_2 f(a,b) \in \mathcal{I}(F,G)$), (**) entonces existen $B(a,r)\subset E$ y $B(b,s)\subset F$ y existe una función $\varphi: B(a,r) \longrightarrow B(b,s)$ que verifican lo siguiente:

1. $\forall x \in B(a,r)$, $f(x,\varphi(x))=0$.
2. Si $\psi: B(a,r) \longrightarrow B(b,s)$ es tal que $\forall x\in B(a,r)$, $f(x,\psi(x))=0$ entonces $\varphi=\psi$.
3. φ es una función de clase K en $B(a,r)$.
4. $\forall x\in B(a,r)$, $D\varphi(x) = -[D_2 f(x,\varphi(x))]^{-1} \circ D_1 f(x,\varphi(x))$.

Demostr.: 1ª PARTE: Probamos en esta primera parte la existencia de $r', s>0$ y de una función $\varphi: B[a,r'] \longrightarrow B[b,s]$ que es continua y es la única función que verifica que

$$f(x,\varphi(x))=0, \quad \forall x\in B[a,r']$$

es decir, es la única solución de la ecuación funcional $f(x,y)=0$ que está definida en $B[a,r']$ y valorada en $B[b,s]$; además, esta solución es continua.

Consideremos la función

$$\Psi: (x,y)\in \mathcal{U} \longmapsto \Psi(x,y) = y - [D_2 f(a,b)]^{-1}(f(x,y)) \in F$$

Ψ es una función de clase K, pues las aplicaciones $(x,y) \xrightarrow{pr_2} y$ y $[D_2 f(a,b)]^{-1}$ son de clase infinito (por ser lineales y continuas) y f es de clase K, por hipótesis.

Dado el segmento $L[(x,y_1),(x,y_2)]\subset \mathcal{U}$, el teorema del valor medio nos dice que

$$\|\Psi(x,y_1)-\Psi(x,y_2)\| \leq \sup_{z\in L[y_1,y_2]} \|D_2\Psi(x,z)\|\cdot\|y_1-y_2\| \qquad (I).$$

En realidad, el teorema del valor medio nos asegura que

$$\|\Psi(x,y_1)-\Psi(x,y_2)\| \leq \sup_{(x,z)\in L[(x,y_1),(x,y_2)]} \|D\Psi(x,z)\|\cdot\|(x,y_1)-(x,y_2)\|$$

pero, puesto que hemos fijado x, estamos considerando la función $\varsigma(y)=\Psi(x,y)$ y para esta función tenemos que

$$\|\varsigma(y_1)-\varsigma(y_2)\| \leq \sup_{z\in L[y_1,y_2]} \|D\varsigma(z)\|\cdot\|y_1-y_2\|$$

formulación que es equivalente a (I) si tenemos en cuenta que $D\varsigma(z)=D_2\Psi(x,z)$. Observar que no decimos que $\sup_{z\in L[y_1,y_2]}\|D_2\Psi(x,z)\|$ sea finito, ni importa ahora que lo sea o no.

Evaluemos $D_2\Psi(x,z)$.

La derivada de la proyección $pr_2:(x,y)\mapsto y$ es ella misma, por ser lineal y continua, es decir, $D\,pr_2(x,y) = pr_2$. Entonces

$$D_2\,pr_2(x,y) = pr_2{}_{|F} = id_F$$

Además, siendo $[D_2 f(a,b)]^{-1}$ lineal y continua tenemos que si $T(x,y) = [D_2 f(a,b)]^{-1}(f(x,y))$, entonces, por la regla de la cadena

$$D_2 T(x,y) = [D_2 f(a,b)]^{-1} \circ D_2 f(x,y) \qquad (*)$$

Por tanto

$$D_2 \Psi(x,y) = id_F - [D_2 f(a,b)]^{-1} \circ D_2 f(x,y).$$

Entonces $D_2\Psi(a,b) = 0$, pues $D_2\Psi(a,b) = id_F - [D_2 f(a,b)]^{-1} \circ D_2 f(a,b) =$
$= id_F - id_F = 0$.

Siendo $D_2\Psi$ continua (pues lo son $D_2 f$, $[D_2 f(a,b)]^{-1}$ e id_F) se verifica que dado $t \in]0,1[$ existen $r', s > 0$ tales que se tiene lo siguiente:

ⓐ $B[a,r'] \times B[b,s] \subset U$: siendo U abierto y $(a,b) \in U$ siempre podemos encontrar un entorno de (a,b) de la forma $B[a,r'] \times B[b,s]$ contenido en U.

ⓑ $\|D_2\Psi(x,y)\| \leq t$, $\forall (x,y) \in B[a,r'] \times B[b,s]$: haciendo r' y s más pequeños si es preciso (aunque los seguimos denotando igual) y dado que $D_2\Psi(a,b) = 0$ y $D_2\Psi$ es continua podemos hacer $\|D_2\Psi(x,y)\|$ sea menor o igual que el t dado cuando (x,y) varíe en $B[a,r'] \times B[b,s]$.

ⓒ $\|\Psi(x,b) - b\| \leq s(1-t)$, $\forall x \in B[a,r']$: dado que $\Psi(a,b) = b$ (pues $f(a,b)=0$) y Ψ es continua, haciendo r' más pequeño si es preciso, podemos hacer $\|\Psi(x,b) - b\|$ menor o igual que $s(1-t) > 0$ cuando $x \in B[a,r']$.

Sea M el conjunto de las funciones definidas en $B[a,r']$ y valoradas en $B[b,s]$. Dotamos a M de la métrica

$$d : (g,h) \in M \times M \longmapsto d(g,h) = \sup_{x \in B[a,r']} \|g(x) - h(x)\|$$

Se prueba fácilmente que d es, en efecto, una métrica sobre M y que el espacio métrico (M,d) es completo.

La topología que esa métrica induce en M es la topología de la convergencia uniforme.

Consideremos la aplicación $\phi : g \in M \longmapsto \phi(g) \in M$ siendo

$$[\phi(g)](x) = \Psi(x, g(x)) = g(x) - [D_2 f(a,b)]^{-1}(f(x,g(x))), \quad \forall x \in B[a,r'] \quad (**)$$

Veamos que ϕ es contractiva: dadas $g, h \in M$, $\forall x \in B[a,r']$, $g(x), h(x) \in B[b,s]$

Entonces, $\forall x \in B[a,r']$, $\|\phi(g)(x) - \phi(h)(x)\| = \|\Psi(x,g(x)) - \Psi(x,h(x))\|$

En virtud de (I) tenemos $\|\Psi(x,g(x)) - \Psi(x,h(x))\| \leq \|g(x) - h(x)\| \cdot \sup_{z \in L[g(x),h(x)]} \|D_2\Psi(x,z)\|$

Pero $\|g(x) - h(x)\| \leq \|g - h\| = \sup_{z \in B[a,r']} \|g(z) - h(z)\|$ y, según ⓑ, $\sup_{z \in L[g(x),h(x)]} \|D_2\Psi(x,z)\| \leq t$

(**) Se prueba que ϕ está bien definida utilizando ⓒ: Veamos que si $x \in B[a,r']$ y $g \in M$ entonces $\Psi(g)(x) \in B[b,s]$.

pues $\forall z \in [g(x), h(x)]$, $z \in B[b,s]$ (ya que $B[b,s]$ es convexo).

Luego

$\forall x \in B[a,r']$, $\|\phi(g)(x) - \phi(h)(x)\| \leq \|g-h\| \cdot t$.

Luego $\|\phi(g) - \phi(h)\| = \sup_{x \in B[a,r']} \|\phi(g)(x) - \phi(h)(x)\| \leq t\,\|g-h\|$.

Puesto que $t \in]0,1[$, queda visto que ϕ es contractiva.

Entonces, en virtud del teorema del punto fijo de Banach, ϕ tiene un único punto fijo, es decir, existe una única función φ definida en $B[a,r']$ y valorada en $B[b,s]$ tal que $\phi(\varphi) = \varphi$. Esto significa que $\forall x \in B[a,r']$, $\psi(x, \varphi(x)) = \varphi(x)$ y también que $\forall x \in B[a,r']$, $\varphi(x) - [D_2 f(a,b)]^{-1}(f(x,\varphi(x))) = \varphi(x)$.

Luego $\forall x \in B[a,r']$, $[D_2 f(a,b)]^{-1}(f(x,\varphi(x))) = 0$ y, siendo $[D_2 f(a,b)]^{-1}$ un isomorfismo de G en F debe ser, $f(x,\varphi(x)) = 0$, $\forall x \in B[a,r']$.

Siendo φ el punto fijo de ϕ, φ es el límite de una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones de $B[a,r']$ en $B[b,s]$ donde φ_1 es un elemento arbitrario de M y $\varphi_n = \phi(\varphi_{n-1})$ si $n \geq 2$. Consideremos entonces que φ_1 es una función continua, entonces $\varphi_2 = \phi(\varphi_1)$ es continua y, por recurrencia, φ_n es continua (ver la definición de ϕ).

Siendo $\varphi = \lim_n \varphi_n$ y siendo la topología que tenemos sobre M la topología de la convergencia uniforme se deduce que φ es continua.

<u>2ª PARTE</u>: Veamos que existe $r \in]0,r']$ tal que $\varphi|_{B(a,r)}$ es diferenciable y tal que su diferencial es

$$D\varphi(x) = -[D_2 f(x,\varphi(x))]^{-1} \circ D_1 f(x,\varphi(x))$$

La unicidad de φ prueba que $\varphi(a) = b$ (tener en cuenta que $f(a,b)=0$ y $f(x,\varphi(x))=0, \forall x$).

Entonces $D_2 f(a,b) = D_2 f(a,\varphi(a))$. Como $D_2 f(a,b) \in \mathcal{I}(F,G)$ e $\mathcal{I}(F,G)$ es un abierto de $\mathcal{L}(F,G)$, las aplicaciones lineales continuas "próximas" a $D_2 f(a,b)$ son también isomorfismos de F en G; por tanto, siendo φ y $D_2 f$ continuas la aplicación $D_2 f(x,\varphi(x))$ es lineal y continua (*), y, en consecuencia, existe $r \in]0,r']$ tal que $\forall x \in B(a,r)$, $D_2 f(x,\varphi(x)) \in \mathcal{I}(F,G)$.

Puesto que f es diferenciable en U tenemos que, $\forall x \in B(a,r)$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\|f(x+h,\varphi(x)+k) - f(x,\varphi(x)) - D_1 f(x,\varphi(x))(h) - D_2 f(x,\varphi(x))(k)\|}{\|(h,k)\|} = 0$$

Si, en particular, tomamos $k = \varphi(x+h) - \varphi(x)$ que tiende a cero cuando h tiende a cero (pues φ es continua), podremos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h,\varphi(x+h)) - f(x,\varphi(x)) - D_1 f(x,\varphi(x))(h) - D_2 f(x,\varphi(x))[\varphi(x+h) - \varphi(x)]\|}{\|(h, \varphi(x+h) - \varphi(x))\|} = 0$$

Hemos probado que φ es solución de la ecuación funcional $f(x,y)=0$.
Luego, dado h suficientemente próximo a cero (de manera que $x+h\in B(a,r)$), podemos escribir que $f(x+h,\varphi(x+h))=0$ y $f(x,\varphi(x))=0$, $\forall x\in B(a,r)$.
Tenemos entonces que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|D_2f(x,\varphi(x))[\varphi(x+h)-\varphi(x)]+D_1f(x,\varphi(x))(h)\|}{\|(h,\varphi(x+h)-\varphi(x))\|}=0$$

Como $\|\varphi(x+h)-\varphi(x)+[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}(D_1f(x,\varphi(x))(h))\| =$
$= \|[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}(D_2f(x,\varphi(x))[\varphi(x+h)-\varphi(x)])+[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}(D_1f(x,\varphi(x))(h)\| \leq$
$\leq \|[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}\|\cdot\|D_2f(x,\varphi(x))[\varphi(x+h)-\varphi(x)]+D_1f(x,\varphi(x))(h)\|$

Se verifica que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\varphi(x+h)-\varphi(x)+[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}(D_1f(x,\varphi(x))(h))\|}{\|(h,\varphi(x+h)-\varphi(x))\|}\leq \qquad (\text{II})$$

$$\leq \|[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}\|\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\|D_2f(x,\varphi(x))[\varphi(x+h)-\varphi(x)]+D_1f(x,\varphi(x))(h)\|}{\|(h,\varphi(x+h)-\varphi(x))\|}=0$$

Si en el denominador pusiese $\|h\|$ quedaría probado que
$D\varphi(x)=-[D_2f(x,\varphi(x))]^{-1}\circ D_1f(x,\varphi(x))$.
Consideremos en $E\times F$ la norma $\|\cdot\|_1$, que es equivalente a la norma producto. Entonces $\|(h,\varphi(x+h)-\varphi(x))\|_1=\|h\|+\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|$.
De (II) deducimos que, dado $\varepsilon\in]0,\frac{1}{2}[$, existe $\delta>0$ tal que

$\|h\|<\delta \Rightarrow \|\varphi(x+h)-\varphi(x)+[D_2f(x,\varphi(x))^{-1}\circ D_1f(x,\varphi(x))](h)\|\leq\varepsilon[\|h\|+\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|]$
Luego, si $\|h\|<\delta$ tenemos que:

$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|-\|[D_2f(x,\varphi(x))^{-1}\circ D_1f(x,\varphi(x))](h)\|\leq\varepsilon\|h\|+\frac{1}{2}\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|$

Por tanto, $\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|\leq 2[\varepsilon+\|D_2f(x,\varphi(x))^{-1}\circ D_1f(x,\varphi(x))\|]\cdot\|h\|=c\cdot\|h\|$
donde c es una constante (hemos fijado x desde un principio).
Llevando este resultado a (II) tenemos que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\varphi(x+h)-\varphi(x)+[D_2f(x,\varphi(x))^{-1}\circ D_1f(x,\varphi(x))](h)\|}{\|h\|+c\|h\|}=0$$

y, por tanto, que $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\|\varphi(x+h)-\varphi(x)+[D_2f(x,\varphi(x))^{-1}\circ D_1f(x,\varphi(x))](h)\|}{\|h\|}=0$

como queríamos probar.
Falta ver que φ es de clase K, siendo f de clase K.
Como D_1f, D_2f y φ son continuas, $D\varphi$ es continua, ya que

que φ es, al menos, de clase 1 en $B(a,r)$.

Para ver que φ es de clase K (si $K>1$) basta aplicar la regla de la cadena. Para poder aplicar la regla de la cadena hace falta probar que la aplicación $\alpha \in \mathcal{I}(F,G) \longmapsto \alpha^{-1} \in \mathcal{I}(G,F)$ es de clase infinito, lo cual se demuestra en el siguiente

2.3.1 Lema: La aplicación $i : \alpha \in \mathcal{I}(F,G) \longmapsto \alpha^{-1} \in \mathcal{I}(G,F)$ es de clase infinito.

Demostr.: Sabemos que $\mathcal{I}(F,G)$ es un abierto de $\mathcal{L}(F,G)$ y que i es continua (es decir, se dan dos de las condiciones necesarias para la diferenciabilidad de i).

Veamos que $Di(\alpha)(h) = -\alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1}$.

$$\frac{i(\alpha+h) - i(\alpha) + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1}}{\|h\|} = \frac{(\alpha+h)^{-1} - \alpha^{-1} + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1}}{\|h\|} =$$

$$= \frac{id_F - \alpha^{-1} \circ (\alpha+h) + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} (\alpha+h)}{\|h\|} (\alpha+h)^{-1} =$$

$$= \frac{id_F - id_F - \alpha^{-1} \circ h + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} \circ \alpha + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} \circ h}{\|h\|} (\alpha+h)^{-1} =$$

$$= \frac{-\alpha^{-1} \circ h + \alpha^{-1} \circ h + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} \circ h}{\|h\|} (\alpha+h)^{-1} = \frac{\alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} \circ h}{\|h\|} (\alpha+h)^{-1}$$

Entonces, dado que $\frac{\|\alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} \circ h \circ (\alpha+h)^{-1}\|}{\|h\|} \leq \frac{\|\alpha^{-1}\|^2 \|h\|^2 \|(\alpha+h)^{-1}\|}{\|h\|} = \|\alpha^{-1}\|^2 \|(\alpha+h)^{-1}\| \cdot \|h\|$

y $\|\alpha^{-1}\|^2 \cdot \|(\alpha+h)^{-1}\| \cdot \|h\|$ tiende a cero cuando $h \to 0$, se deduce que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|i(\alpha+h) - i(\alpha) + \alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1}\|}{\|h\|} = 0$$

y, siendo $-\alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(F,G), \mathcal{L}(G,F))$ tenemos que $Di(\alpha)(h) = -\alpha^{-1} \circ h \circ \alpha^{-1}$! ∎

Utilizando este lema y aplicando la regla de la cadena se prueba que φ es de clase K.

Queda así terminada la demostración del TEOREMA DE LA FUNCION IMPLICITA ∎

OBSERVACIONES: ① Si la función f y el punto (a,b) verifican las hipótesis del teorema este nos asegura la existencia de sendos entornos de a y b tales que el conjunto de los puntos (x,y) que están el producto de dichos entornos y que satisfacen la ecuación funcional $f(x,y) = 0$ es la gráfica de una función φ que verifica ①, ②, ③ y ④. ② dice que existe un entorno de (a,b) en el que no hay más puntos en los que se de clase K.

② Si la función f es lineal, el teorema de la función implícita se reduce al teorema de Rouché-Frobenius para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

EJEMPLOS: Ⓐ Consideremos la función $f: (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \longmapsto (x+y+z, x+2y+2z)\in\mathbb{R}^2$.
La forma usual de escribir esta función es:

$$f_1(x,y,z) = x+y+z \qquad f_2(x,y,z) = x+2y+2z$$

Trivialmente $f\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.
Veamos si se puede "despejar" (y,z) en función de x, o de otra forma, si se puede resolver el sistema

$$\begin{cases} f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

tomando x como parámetro.
Con las notaciones del teorema será $E=\mathbb{R}$, $F=\mathbb{R}^2$ y $G=\mathbb{R}^2$, pues E "corresponde" a la x y F a la incógnita funcional (y,z), y $\dim F = \dim G$, pues el teorema presupone la existencia de isomorfismos bicontinuos de F en G. La derivada parcial de f respecto de (y,z) en el punto $(x,y,z)\cong$ $\cong (x,(y,z))\in E\times F$ viene dada por la matriz

$$D_2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que no es la matriz de un isomorfismo de F en G pues su determinante es cero (cualquiera que sea $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$). Luego no se puede despejar (y,z) en función de x, como ya sabíamos por el teorema de Rouché-Frobenius.
Sí se puede despejar, sin embargo, (x,z) en función de y, pues

$$D_2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

que es la matriz de un isomorfismo por ser su determinante no nulo. Además se verifica en este caso que

$$D\varphi(y) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ⓑ Consideremos la función $f: (x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto e^x\cdot y + \operatorname{sen} x \in\mathbb{R}$.
Por supuesto $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sea $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tal que $f(a,b)=0$ (p.ej. $(0,0)$).
Para que el teorema de la función implícita proporcione una condición

suficiente para poder "despejar" y en función de x en las proximidades de (a,b) ha de ocurrir que $D_2 f(a,b) \neq 0$. Notar que en este caso $D_2 f(a,b) \in \mathcal{L}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \cong \mathcal{M}_{1\times 1} \cong \mathbb{R}$.

Como $D_2 f(a,b) = e^a \neq 0$, podemos despejar y en función de x.

Luego existen $r,s>0$, y existe $\varphi: B(a,r) \to B(b,s)$, y es "única", tal que $f(x,\varphi(x)) = 0$, $\forall x \in B(a,r)$ y se verifica que

$$\varphi'(x) = -\frac{D_1 f(x,\varphi(x))}{D_2 f(x,\varphi(x))} = \frac{-e^x \cdot \varphi(x) - \cos x}{e^x}$$

Veamos si se puede "despejar" x en función de y. Lo podremos hacer si $D_1 f(a,b) \neq 0$.

$D_1 f(a,b) = e^a b + \cos a$. Por ejemplo, si $(a,b) = (0,0)$, $D_1 f(a,b) = 1 \neq 0$ y podemos despejar x en función de y en las proximidades de $(0,0)$.

Entonces existe una solución $\psi: B(0,r) \to B(0,s)$ tal que $\forall y \in B(0,r)$, $f(\psi(y),y) = 0$. Además

$$\psi'(y) = \frac{-D_2 f(\psi(y),y)}{D_1 f(\psi(y),y)} = -\frac{e^{\psi(y)}}{e^{\psi(y)} \cdot y + \cos\psi(y)}$$

En particular $\psi'(0) = -\dfrac{e^0}{e^0 \cdot 0 + \cos 0} = -1$ (pues $\psi(0) = 0$).

El teorema no permite afirmar la existencia de solución en los puntos (a,b) en los que $D_1 f(a,b) = 0$.

3. Teorema de la función inversa o de la inversión local

3.1. Teorema: (de la función inversa).

Sean E y F espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$, U un abierto de E y $f: U \subset E \to F$ una aplicación de clase $K \geq 1$. Si a es un punto de U tal que $Df(a)$ es un isomorfismo de E en F entonces existen $r,s>0$ y existe $g: B(f(a),r) \to B(a,s)$ que verifica lo siguiente:

1. g es inversa local de f, es decir, $\forall y \in B(f(a),r)$, $(f\circ g)(y) = y$.
2. g es única en el sentido de que si $h: B(f(a),r) \to B(a,s)$ es tal que $(f\circ h)(y) = y$, $\forall y \in B(f(a),r)$, entonces $g = h$.
3. $\forall y \in B(f(a),r)$, $Dg(y) = [Df(g(y))]^{-1}$.
4. g es de clase K en $B(f(a),r)$. (*)

Demostración: g es la solución del problema de función implícita con x como incógnita, $\phi(x,y) = f(x) - y = 0$.

En efecto, ϕ es una aplicación del abierto $U\times F$ de $E\times F$ en F

clase infinito, y se verifica también que $\phi(a,f(a))=0$ y $(a,f(a))\in U\times F$.
Por otra parte, $D_1\phi(a,f(a))\in \mathcal{I}(E,F)$, pues $D_1\phi(a,f(a))=Df(a)$, ya que la proyección segunda no "depende" de x.
Estas condiciones, junto con que E y F son espacios de Banach, son las hipótesis del teorema de la función implícita para $\phi(x,y)=0$. (*)
En virtud de dicho teorema podemos asegurar la existencia de $r,s>0$ y una función $g: B(f(a),r)\to B(a,s)$ de clase K en $B(f(a),r)$ tal que $\forall y\in B(f(a),r)$, $\phi(g(y),y)=0$, o bien que $\forall y\in B(f(a),r)$, $(f\circ g)(y)=y$.
Se verifica también que esta g es única, una vez fijado el dominio y el rango (imagen).
Por último,

$$Dg(y)=-[D_1\phi(g(y),y)]^{-1}\circ D_2\phi(g(y),y)=$$
$$=-[Df(g(y))]^{-1}\circ(-id_F)=[Df(g(y))]^{-1}$$

pues la derivada primera de ϕ en el punto $(g(y),y)$ es la derivada de f en $g(y)$ y la derivada segunda de ϕ en $(g(y),y)$ es la opuesta de la derivada segunda de la aplicación lineal y continua $pr_2:(x,y)\mapsto y$, la cual es $-id_F$. csqd.

EJEMPLOS: ① Consideremos la función $f: x\in\mathbb{R}\to x^2\in\mathbb{R}$, que es de clase infinito en $\mathbb{R}$. Siendo $f'(x)=2x$, que es no nulo si $x\neq 0$, podemos aplicar el teorema de la función inversa en todo punto distinto de cero; es decir, si $a\in\mathbb{R}-\{0\}$, existen $r,s>0$ y existe $g:]a^2-r,a^2+r[\to]a-s,a+s[$ tal que $(f\circ g)(y)=y$, $\forall y\in]a^2-r,a^2+r[$, y además

$$g'(y)=\frac{1}{f'(g(y))}$$

② Sea $f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto (e^x\cos y,\ e^x \operatorname{sen} y)\in\mathbb{R}^2$.
Evidentemente $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. La matriz jacobiana de f en (x,y) es:

$$Df(x,y)\cong\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial x}\\ \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^x\cos y & e^x\operatorname{sen} y\\ -e^x\operatorname{sen} y & e^x\cos y\end{pmatrix}$$

Al determinante de esta matriz se le llama jacobiano de f en (x,y), y se denota por: $Jf(x,y)$ ó $\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}$ ó $J(f_1,f_2)(x,y)$.
f es invertible localmente en los puntos de jacobiano no nulo (cuando la matriz es un isomorfismo). Pero

$$Jf(x,y)=\begin{vmatrix}e^x\cos y & e^x\operatorname{sen} y\\ -e^x\operatorname{sen} y & e^x\cos y\end{vmatrix}=e^{2x}\cos^2 y+e^{2x}\operatorname{sen}^2 y=e^{2x}\neq 0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Luego $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\exists r,s>0$ y $\exists g: B((e^a\cos b, e^a \operatorname{sen} b), r) \to B((a,b),s)$ de clase infinito tal que $(f\circ g)(x,y)=(x,y)$, $\forall (x,y)\in B((e^a\cos b, e^a\operatorname{sen} b), r)$. Esta función f es un ejemplo de una función invertible localmente en todo punto y que no es inyectiva.

③ Sean f,g,h funciones reales de variable real de clase $k\geq 1$. Consideremos la función $\phi:(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto (f(x+g(y)), h(x+g(y)))$. Veamos en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ se puede aplicar el teorema de la función inversa para ϕ.

Sean $\phi_1:(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto f(x+g(y))\in\mathbb{R}$ y $\phi_2:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto h(x+g(y))\in\mathbb{R}$.

El teorema de la función inversa se podrá aplicar en aquellos puntos $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tales que $D\phi(a,b)\in\mathcal{I}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, es decir, en aquellos puntos (a,b) en los que

$$\det\left[(D_i\phi_j(a,b))_{i,j=1}^{2}\right]\neq 0$$

o, con la notación del ejemplo anterior, $J(\phi_1,\phi_2)(a,b)\neq 0$.

Pero $D_1\phi_1(x,y)=f'(x+g(y))$, pues $\phi_1=\psi_1\circ\varphi_1$ donde $\varphi_1:(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto x+g(y)\in\mathbb{R}$ y $\psi_1(x+g(y))=f(x+g(y))$ y, por tanto, $D_1\phi_1(x,y)=D\psi_1(\varphi_1(x,y))\cdot D_1\varphi_1(x,y)=f'(x+g(y))\cdot 1$.

De la misma manera:

$D_1\phi_2(x,y)=h'(x+g(y))$, $D_2\phi_1(x,y)=f'(x+g(y))\cdot g'(y)$ y
$D_2\phi_2(x,y)=h'(x+g(y))\cdot g'(y)$.

Luego

$$J(\phi_1,\phi_2)(x,y)=\begin{vmatrix} f'(x+g(y)) & h'(x+g(y)) \\ f'(x+g(y))\cdot g'(y) & h'(x+g(y))\cdot g'(y)\end{vmatrix}=0,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Luego, en ningún punto de $\mathbb{R}^2$ se puede aplicar el teorema de la función inversa.