3ª PARTE: TEORIA DE LA MEDIDA. INTEGRACION.

TEMA 8º: TEORIA DE LA MEDIDA.

Vamos a hacer una construcción "escalonada" de la medida en $\mathbb{R}^n$. Mediremos primeramente intervalos en $\mathbb{R}^n$, después, conjuntos elementales. Trataremos después de los conjuntos medibles en el sentido de Jordan y de los conjuntos medibles en el sentido de Lebesgue. Veremos también las propiedades que tienen estas clases de conjuntos y la medida definida para ellas.

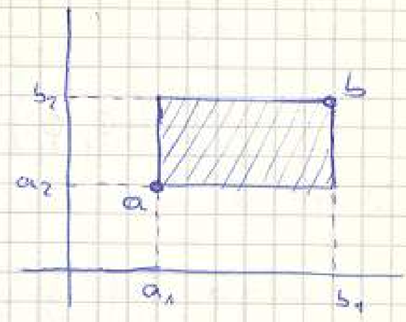
1. MEDIDA DE INTERVALOS EN $\mathbb{R}^n$.

Mientras no se indique lo contrario, hablaremos de intervalos acotados en $\mathbb{R}$. Entonces

DEFINICION: Llamamos intervalo (n-dimensional) en $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto "comprendido" entre el interior y la adherencia de un producto cartesiano de n intervalos de $\mathbb{R}$.

Denotaremos por $\mathcal{J}$ la clase de intervalos de $\mathbb{R}^n$. (*)
Entonces, por definición, $I \in \mathcal{J}$ si, y solo si, existen $a=(a_1,\dots,a_n)$ y $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ tales que
$$]a_1,b_1[\times\dots\times]a_n,b_n[\subset I\subset[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n].$$

De a y b diremos que son los extremos del intervalo I.



Un intervalo diremos que es degenerado si existe $k\in\{1,\dots,n\}$ tal que $a_k=b_k$. El conjunto vacío es un trivial intervalo degenerado.

DEFINICION: La medida (n-dimensional) de un intervalo I, de extremos a y b, es por definición el número real
$$\mu(I)=(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$$
es decir, el producto de las "longitudes" (medidas 1-dimensionales) de los intervalos factores.

Es evidente que tienen medida cero los intervalos degenerados, y solo ellos, y que dos intervalos que tienen los mismos extremos, tienen la misma medida.

* Estudiaremos a continuación las propiedades de la clase $\mathcal{J}$ y de la medida $\mu: \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, atendiendo a la verificación, o no verificación, de una colección de propiedades que pueden calificarse como de naturaleza:

(C) conjuntista.
(T) topológica.
(A) algebraica.
(V) diferenciable.

PROPIEDADES DE $\mathcal{J}$:

(C) Es evidente que la intersección de intervalos es un intervalo (aunque solo nos interesaremos por intersecciones finitas, o numerables). Sin embargo, no es, en general, un intervalo, la unión (ni siquiera finita), ni el complementario, ni la diferencia de intervalos.
Es trivial que todo conjunto contenido en un intervalo de medida cero, es un intervalo y de medida cero.

(T) Naturalmente, ni todo abierto, ni todo cerrado, ni todo compacto, ni todo conexo, ... de $\mathbb{R}^n$, es un intervalo.
Se verifica que los intervalos abiertos de $\mathbb{R}^n$ constituyen una base (que podemos tomar numerable, considerando intervalos abiertos cuyos extremos tienen coordenadas racionales) de la topología usual de $\mathbb{R}^n$.

(A) La imagen por una traslación o por una homotecia de un intervalo es un intervalo. Pero no lo es, en general, la imagen por una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo. (*)

(V) Con mayor razón, tampoco es, en general, un intervalo la imagen de un intervalo por una aplicación de clase 1 de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo.

Como vemos, la clase $\mathcal{J}$ tiene muy pocas de las propiedades que son deseables para una "buena" clase de conjuntos medibles.

PROPIEDADES DE $\mu : \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$:

(C) C.1 Es no negativa: $\forall I \in \mathcal{Y}$, $\mu(I) \geq 0$.

C.2 Es monótona: dados $I, J \in \mathcal{Y}$, si $I \subset J$ entonces $\mu(I) \leq \mu(J)$

C.3 Es σ-aditiva (ó numerablemente aditiva): Si $\{I_K\}_{K \in \mathbb{N}}$ es una colección numerable (o finita) de intervalos disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{K \in \mathbb{N}} I_K \in \mathcal{Y}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_K I_K\right) = \sum_K \mu(I_K).$$

C.4 Es σ-subaditiva: si $\{I_K\}_{K \in \mathbb{N}}$ es una colección finita o numerable de intervalos tales que $\bigcup_K I_K \in \mathcal{Y}$, entonces

$$\mu\left(\bigcup_K I_K\right) \leq \sum_K \mu(I_K)$$

(T) Dados $I \in \mathcal{Y}$ y $\varepsilon > 0$, se pueden encontrar $J \in \mathcal{Y}$ cerrado y $K \in \mathcal{Y}$ abierto tales que

$$J \subset I \subset K \quad \text{y} \quad \mu(K) - \varepsilon \leq \mu(I) \leq \mu(J) + \varepsilon. \quad (*)$$

(A) A.1 Es invariante por traslaciones: Si $\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una traslación, entonces

$$\forall I \in \mathcal{Y}, \quad \mu(\tau(I)) = \mu(I)$$

A.2 Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal de matriz asociada (a_{ij}), y si $I \in \mathcal{Y}$ es tal que $\varphi(I) \in \mathcal{Y}$, entonces

$$\mu(\varphi(I)) = |\det(a_{ij})| \cdot \mu(I).$$

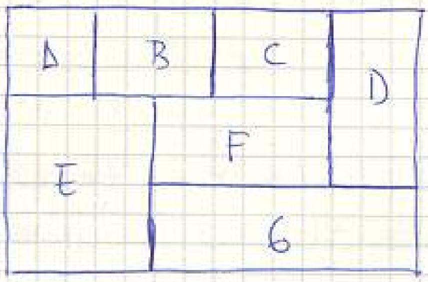
En particular, si φ es una homotecia de razón λ, entonces

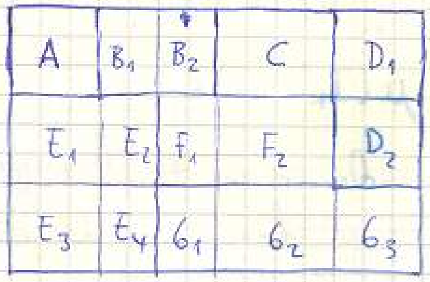
$$\forall I \in \mathcal{Y}, \quad \mu(\varphi(I)) = |\lambda|^n \mu(I).$$

(V) Más adelante, cuando se estudie el concepto de integral, se estará en condiciones de expresar la relación que existe entre $\mu(I)$ y $\mu(f(I))$, cuando $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación inyectiva y de clase 1, e I un intervalo tal que $f(I) \in \mathcal{Y}$.

DEMOSTRACION DE ESTAS PROPIEDADES:

- C.1. y C.2. son triviales
- C.3 : Caso finito: Si la colección $\{I_1, I_2, \ldots\}$ es finita, la demostración se reduce a un ejercicio aritmético. Esquematizamos la misma a continuación.





Se ha de probar que

$$\mu(A \cup B \cup \ldots \cup G) = \mu(A) + \mu(B) + \ldots + \mu(G)$$

Si se "prolongan" los lados de los intervalos $A, B, \ldots, G$, se obtiene una partición (producto de particiones de los intervalos factores, 1-dimensionales) de cada uno de ellos, y también del intervalo $A \cup B \cup \ldots \cup G$. Es inmediato comprobar que la medida de un intervalo así "partido" es la suma de las medidas de los intervalos de la partición. Aplicando dos veces este hecho se obtiene

$$\mu(A \cup B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup G_2 \cup G_3) = \mu(A) + \mu(B_1) + \ldots + \mu(G_2) + \mu(G_3) =$$
$$= \mu(A) + \mu(B_1 \cup B_2) + \ldots + \mu(G_1 \cup G_2 \cup G_3).$$

<u>Caso infinito:</u> Una razonamiento análogo al anterior conduce a que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{p} \mu(I_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \quad (*)$$

Luego $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \quad (**)$

Por otra parte, de la continuidad de la aplicación

$$(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \longmapsto (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \in \mathbb{R}$$

se sigue que dado $\varepsilon > 0$, se pueden encontrar:

- un intervalo cerrado J tal que
  $$J \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{y} \quad \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \mu(J) + \varepsilon \qquad \text{(en virtud de (T))}$$
- para cada $k \in \mathbb{N}$, un intervalo abierto J_k tal que
  $$I_k \subset J_k \quad \text{y} \quad \mu(J_k) \leq \mu(I_k) + \varepsilon/2^k$$

Por ser J compacto, del recubrimiento abierto $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de J se puede extraer un subrecubrimiento finito $(J_i)_{i=1}^{p}$ para el que, razonando de nuevo como en el caso finito, se verifica

$$\mu(J) \leq \mu(J_1) + \ldots + \mu(J_p)$$

Luego $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \le \mu(J)+\varepsilon \le \sum_{k=1}^{p} \mu(J_k)+\varepsilon \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(J_k)+\varepsilon \le$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)+2\varepsilon$$

Basta considerar entonces que la desigualdad entre el primer y último término de esta cadena de desigualdades es cierta para todo $\varepsilon>0$.

- C.4: Un razonamiento análogo a la última parte del anterior conduce a la demostración de la σ-subaditividad de μ.
- **(T)**: De la continuidad de la aplicación que a los extremos de un intervalo asocia la medida del mismo deducimos (análogamente a C.3) la existencia de un intervalo cerrado J contenido en otro I dado, y de un intervalo K abierto que contiene a I, de modo que las medidas de K y J son tan próximas como se quiera.
- (A) En lo que se refiere a traslaciones y homotecias es trivial. La demostración de lo referente a aplicaciones lineales se hará más adelante en un contexto más general.

* Veamos ahora una propiedad de los intervalos y de la medida de los mismos que se apoya en el concepto de cubo.

Por definición, un cubo en $\mathbb{R}^n$ de lado $l \ge 0$ es un intervalo de extremos $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n)$ tal que $b_k - a_k = l$, $k=1,\dots,n$.

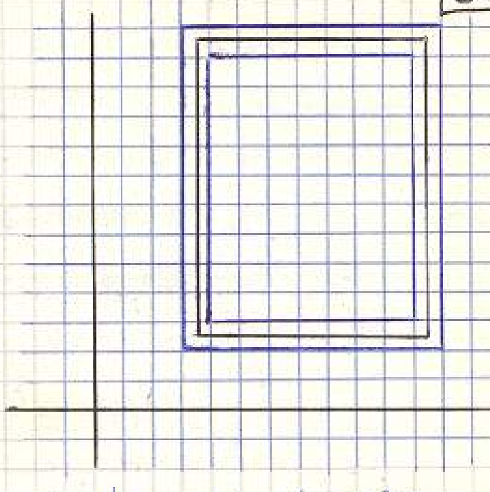
Naturalmente la medida n-dimensional de un cubo de lado l es igual a l^n. Pues bien, se prueba que:

"dado un intervalo I de $\mathbb{R}^n$ y un número $\varepsilon>0$ se pueden encontrar un número $l>0$ y sendos intervalos J y K que son unión de cubos de lado l, disjuntos dos a dos y tales que

$$\bar{J} \subset I \subset \mathring{K} \quad \text{y} \quad \mu(K)-\varepsilon < \mu(I) < \mu(J)+\varepsilon."$$

Puede obtenerse una demostración haciendo una "cuadriculación" de $\mathbb{R}^n$ mediante hiperplanos paralelos a los hiperplanos coordenados, que no contengan puntos de la frontera de I y

estén igualmente separados una distancia $l>0$, suficientemente pequeña.
Esta demostración es intuitivamente evidente, pero delicada de formalizar.
Dado el intervalo I, sea J la unión de los cubos que están contenidos en I, y K la unión de los cubos que no son disjuntos con I.



"cubicación de $\mathbb{R}^2$"

J y K son intervalos tales que $J \subset I \subset K$ y se consigue que $\mu(K)-\mu(J)<\varepsilon$, si se toma $l>0$ tal que

$$2n(d+2l)^{n-1}l<\varepsilon$$

donde $2n$ es el número de intervalos degenerados ("lados") que, a lo sumo, forman la frontera del intervalo I, y $d=\max\{b_k-a_k \,/\, k=1,\dots,n\}$, donde $(a_1,\dots,a_n)$ y $(b_1,\dots,b_n)$ son los extremos de I.

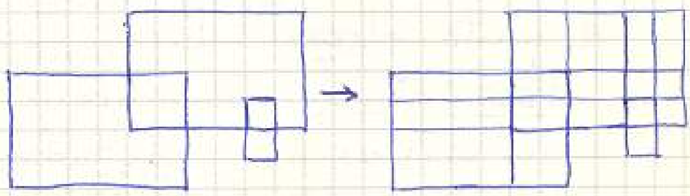
$(d+2l)^{n-1}l$ es un número mayor o igual que la suma de las medidas de los cubos que no son disjuntos con uno cualquiera de los intervalos degenerados que forman la frontera de I.

2. Medida de conjuntos elementales de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICION: Se llama conjunto elemental de $\mathbb{R}^n$ a todo conjunto que sea unión de una colección finita de intervalos de $\mathbb{R}^n$.

La definición que vamos a dar de medida de un conjunto elemental se apoya en dos hechos muy simples:
- Primero, que todo conjunto elemental se puede obtener (no de manera única, por supuesto) como unión finita de intervalos disjuntos dos a dos.

Se puede llegar a una descomposición como la indicada prolongando los lados de los intervalos que inicialmente forman el conjunto elemental.



- Segundo, que si $\{I_1, \ldots, I_p\}$, $\{J_1, \ldots, J_q\}$ son dos descomposiciones en intervalos disjuntos dos a dos de un mismo conjunto elemental entonces

$$\mu(I_1) + \ldots + \mu(I_p) = \mu(J_1) + \ldots + \mu(J_q)$$

Si se prolongan los lados de todos los I_k y los J_ℓ, se obtiene una descomposición del conjunto elemental que es "más fina" que las dadas. Teniendo esto en cuenta la demostración es trivial (análoga a la aditividad finita de la medida de intervalos).

Denotaremos por $\mathcal{E}$ la clase de los conjuntos elementales.

<u>DEFINICION</u>: Sea $E \in \mathcal{E}$ e $I_1 \cup \ldots \cup I_p$ una descomposición de E como unión de intervalos disjuntos dos a dos. Definimos la medida de E como

$$\mu(E) = \mu(I_1) + \ldots + \mu(I_p).$$

Evidentemente, $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}$ y la restricción de la medida de $\mathcal{E}$ a $\mathcal{J}$ coincide con la definida allí. Por ello utilizamos el mismo símbolo para estas medidas.

Todas las propiedades que se enunciaron para la medida de intervalos son válidas para la medida de conjuntos elementales.

Tambien es válido para $\mathcal{E}$ lo que se dijo para $\mathcal{J}$ desde los puntos de vista (T), (A) y (V), pero en (C) cambian algunas cosas:

- La unión e intersección finitas de elementales es un conjunto elemental. La diferencia de elementales es elemental.
- La intersección de una colección infinita (aunque sea numerable) de conjuntos elementales, no es, en general, un conjunto elemental.

<u>Contraejemplo</u>: Considerense superpuestos (de forma que coincidan los vértices a, b, c de todos ellos) los conjuntos elementales de $\mathbb{R}^2$ de la sucesión $\{E_k / k \in \mathbb{N}\}$, cuyos primeros términos representan las figuras

Es evidente que el conjunto $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$ no es elemental, sino que es el triángulo de vértices a, b, c.

- No es, en general, elemental la unión numerable, ni el complementario de conjuntos elementales.
- Sigue siendo cierto que todo conjunto contenido en un elemental de medida cero es elemental y de medida cero.

Finalmente, es cierto que dados $E \in \mathcal{E}$ y $\varepsilon > 0$, existen $l > 0$ y $F, G \in \mathcal{E}$ tales que

$$F \subset \overset{\circ}{E} \subset G \quad , \quad \mu(G) - \varepsilon < \mu(E) < \mu(F) + \varepsilon$$

siendo F y G uniones finitas de cubos disjuntos dos a dos, de lado l.

La demostración es análoga a la indicada para los intervalos.

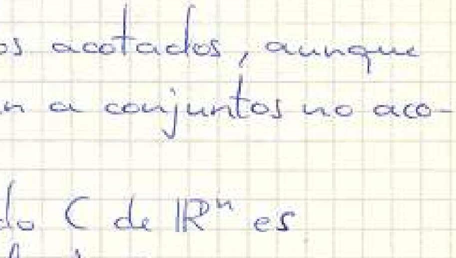
3. La medida de Jordan en $\mathbb{R}^n$.

Trataremos en este apartado de conjuntos acotados, aunque es posible extender la medida de Jordan a conjuntos no acotados.

DEFINICION: Se dice que un conjunto acotado C de $\mathbb{R}^n$ es J-medible (medible en el sentido de Jordan) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E, F \in \mathcal{E} \,/\, E \subset C \subset F \quad y \quad \mu(F \setminus E) < \varepsilon$$

Observar que si $E, F \in \mathcal{E}$, entonces $F \setminus E \in \mathcal{E}$.
Como $E \subset F$ se verifica, en virtud de la aditividad de la medida de $\mathcal{E}$, que $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$, pues $F = E \cup (F \setminus E)$ y $E \cap (F \setminus E) = \emptyset$ lo cual implica que $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$.



Una propiedad de $\mathcal{E}$ y de $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ es que dado un elemental se pueden encontrar elementales abiertos (o cerrados) contenidos en él (o que lo contienen) y de medidas tan próximas como se quiera.
Por consiguiente, la definición de conjunto J-medible puede darse añadiendo a lo anterior que E sea abierto y F cerrado, o también, que E sea cerrado y F abierto.

DEFINICIONES: Sea A un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Se llama medida interior o inferior (resp., exterior o superior) de Jordan de A al número real

$$\underline{\mu}(A) = \sup\{\mu(E) / E \in \mathcal{E} \text{ y } E \subset A\}$$

$$(\text{resp., } \overline{\mu}(A) = \inf\{\mu(F) / F \in \mathcal{E} \text{ y } A \subset F\}).$$

3.1. TEOREMA: Condición necesaria y suficiente para que un conjunto acotado C de $\mathbb{R}^n$ sea J-medible es que sus medidas interior y exterior coincidan.

Demostr.: $\Rightarrow$] Siempre es cierto que $\underline{\mu}(C) \leq \overline{\mu}(C)$.
La desigualdad opuesta se prueba teniendo en cuenta que, por ser C J-medible,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E, F \in \mathcal{E} / E \subset C \subset F \text{ y } \mu(F \setminus E) < \varepsilon$$

de donde

$$\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E) < \mu(E) + \varepsilon$$

es decir, que $\forall \varepsilon > 0$, $\overline{\mu}(C) \leq \underline{\mu}(C) + \varepsilon$.

$\Leftarrow$] Si $\underline{\mu}(C) = \overline{\mu}(C)$ entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists E, F \in \mathcal{E} / E \subset C \subset F,\ \mu(F) - \varepsilon/2 < \mu(C) < \mu(E) + \varepsilon/2$$

por lo que $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E) < \varepsilon$. c.s.q.d.

DEFINICION: Si C es un conjunto J-medible de $\mathbb{R}^n$ se llama medida (n-dimensional) de C al número real

$$\mu(C) = \underline{\mu}(C) = \overline{\mu}(C).$$

Conviene llamar la atención en que todo conjunto elemental es, trivialmente, J-medible, y su medida como elemental coincide con su medida de Jordan.

Como consecuencia inmediata de que en la definición de conjunto J-medible se puede tomar E abierto y F cerrado se obtiene que todo conjunto contenido entre el interior y la adherencia de un J-medible es J-medible y de la misma medida que el dado.

Esta, que parece ser una buena propiedad de la clase de los conjuntos J-medibles es, más bien, el síntoma de un grave defecto de la misma, pues impide, por ejemplo, que sea J-medible un conjunto numerable de $\mathbb{R}$ como el $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, cuyo interior es vacío y cuya adherencia es

$[0,1]$. Si tal conjunto fuese J-medible, se tendría el absurdo de que son J-medibles, y de la misma medida, todas las partes de $[0,1]$.

Este defecto viene expresado formalmente en el siguiente

3.2. TEOREMA: Condición necesaria y suficiente para que un conjunto C de $\mathbb{R}^n$ sea J-medible es que su frontera, ∂C, sea J-medible y de medida cero.

Demostr.: $\Rightarrow$) Si C es J-medible, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists E, F \in \mathcal{E} \ / \ E \subset C \subset F \ \text{ y } \ \mu(F \setminus E) < \varepsilon.$$

Podemos considerar E abierto y F cerrado.

Entonces, $\emptyset \subset \partial C \subset F \setminus E$.

Siendo $\mu(F \setminus E) < \varepsilon$ debe ser $\mu(\partial C) = 0$.

$\Leftarrow$) Sea C un conjunto acotado tal que ∂C es J-medible y de medida cero, es decir, de modo que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists G \in \mathcal{E}, \ G \text{ abto} \ / \ \emptyset \subset \partial C \subset G \ \text{ y } \ \mu(G) < \varepsilon.$$

Sea $\{I_k\}$ un recubrimiento abierto de $\mathring{C}$ hecho por intervalos abiertos contenidos en $\mathring{C}$. Dicho recubrimiento existe pues los intervalos abiertos son base de la topología de $\mathbb{R}^n$.

Este recubrimiento contiene un subrecubrimiento finito $\{I_1, \dots, I_p\}$ del compacto

$$\overline{C} \setminus G = \mathring{C} \setminus G \subset \mathring{C}$$

Luego, los conjuntos elementales

$$E = I_1 \cup \dots \cup I_p \quad \text{ y } \quad F = I_1 \cup \dots \cup I_p \cup G$$

son tales que

$$E \subset C \subset F \quad \text{ y } \quad \mu(F \setminus E) \leq \mu(G) < \varepsilon. \quad \text{csqd.}$$

EJEMPLOS: ① "Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado infinito con un único punto de acumulación, entonces es J-medible y de medida cero"

Dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar un conjunto elemental F tal que $A \subset F$ y $\mu(F) < \varepsilon$.

Sea a el punto de acumulación de A y sea $I = [a - \frac{\varepsilon}{4}, a + \frac{\varepsilon}{4}]$.

Entonces $\mu(I) = \varepsilon/2$.

En I están todos los puntos de A excepto, quizás, un número finito, pues A es acotado y solo tiene un punto de acumulación.

Sea $A - I = \{x_1, \dots, x_p\}$, y sea, para $k = 1, \dots, p$, $I_k = [x_k - \frac{\varepsilon}{4p}, x_k + \frac{\varepsilon}{4p}]$.

Entonces $\mu(I_k) = \frac{\varepsilon}{\ }$ y $\mu(I \cup I_1 \cup \dots \cup I_p) < \frac{\varepsilon}{\ } + p\frac{\varepsilon}{\ } = \varepsilon$

Haciendo $F = I \cup I_1 \cup \ldots \cup I_p$, queda probado el enunciado.
Si A tuviese un número finito de puntos de acumulación, también sería J-medible y de medida cero

② CONJUNTO TERNARIO DE CANTOR (O DISCONTINUO DE CANTOR).

Sea $A_n = \{0,2\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ es el conjunto de todas las sucesiones (x_n) tales que $x_n \in \{0,2\}$. Se ve fácilmente que la aplicación $g: \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ definida por $g((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n/3^n$ es inyectiva. La imagen de g se llama el conjunto ternario de Cantor, el cual geométricamente puede ser descrito como sigue:

Dividamos el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales y "retiremos" el intervalo del medio. Los dos restantes

los dividimos en tres partes cada uno y retiramos las del medio. Procediendo de este modo indefinidamente obtenemos el conjunto de Cantor, conjunto que tiene la potencia del continuo (es biyectivo con $\mathbb{R}$). Dicho conjunto es cerrado y todos sus puntos son de acumulación. Al cabo de la n-sima operación el conjunto mide $2^n/3^n$, número que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Luego el conjunto de Cantor es J-medible y de medida cero.

4. PROPIEDADES DE $\mathcal{J}$

Denotamos con $\mathcal{J}$ la clase de los conjuntos J-medibles de $\mathbb{R}^n$.

(C) La unión e intersección finitas y la diferencia de conjuntos J-medibles es J-medible.

No lo es el complementario (no es acotado) ni, en general, la unión (aun supuesta acotada) ni la intersección numerable de J-medibles.
Todo conjunto contenido en un J-medible de medida cero es J-medible y de medida cero.

(T) Tampoco aquí (al igual que en (C)) cambia nada, respecto a lo que se tenía en E. Es decir, no todo abierto, ni todo cerrado, ni todo compacto,... es J-medible.

(A) Aquí sí se ha dado un paso importante: La imagen de un J-medible por una traslación o una aplicación lineal (en resumen, por una afinidad ≡ aplicación lineal ∘ traslación) de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es J-medible.

(V) La imagen de un J-medible por una aplicación de clase 1 de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ es J-medible.

DEMOSTRACION DE LAS PROPIEDADES DE $\mathcal{J}$:

(C) – Sean $C_1, \dots, C_p \in \mathcal{J}$, es decir, tales que para $k = 1, \dots, p$ y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists E_k, F_k \in \mathcal{E} \,/\, E_k \subset C_k \subset F_k$ y $\mu(F_k - E_k) < \varepsilon/p$.

Es claro que $\bigcup_{k=1}^{p} E_k, \bigcup_{k=1}^{p} F_k \in \mathcal{E}$ y $\bigcup_k E_k \subset \bigcup_k C_k \subset \bigcup_k F_k$.

Además $\mu\left(\bigcup_k F_k - \bigcup_k E_k\right) = \mu\left(\bigcup_k [F_k - \bigcup_k E_k]\right) \leq$

$\leq \sum_k \mu(F_k - \bigcup_k E_k) \leq \sum_k (F_k - E_k) < \varepsilon$

Análogamente se prueba lo relativo a la intersección finita y a la diferencia.

– Por otra parte ya se vió como el conjunto acotado $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, que es unión numerable de conjuntos puntuales (J-medibles de medida cero), no es J-medible. Igual ocurre con su complementario relativo a $[0,1]$, que es intersección numerable de J-medibles.

(T) Sea $\{x_k\}$ el conjunto, ordenado en sucesión, de los números racionales de $(0,1)$. El conjunto

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left] x_k - \frac{1}{2^{k+2}}, x_k + \frac{1}{2^{k+2}} \right[$$

es abierto y tal que $\overline{\mu}(A) \geq 1$ y $\underline{\mu}(A) \leq 1/2$, ya que si $F \in \mathcal{E}$ es tal que $A \subset F$, entonces F debe contener a todo $(0,1)$ salvo, quizás, un número finito de puntos (irracionales) (*) Luego $\mu(F) \geq 1$. Si $E \in \mathcal{E}$ es cerrado y tal que $E \subset A$, entonces, del recubrimiento abierto de E formado por los intervalos que componen A, se puede extraer un subrecubrimiento finito, y la suma de las medidas de los que lo componen es menor que $1/2$, ya que la suma de las medidas de todos los intervalos que componen A es igual a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

(A) Es trivial que el trasladado de un J-medible es J-medible. Para probar lo relativo a aplicaciones lineales probaremos antes un lema preliminar.

(*) Tener en cuenta que el complementario de un elemental de IR está formado por [illegible]

4.1. LEMA: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lipschitziana, entonces la imagen de un J-medible de medida cero es J-medible y de medida cero.

Demostr.: Sea A un conjunto J-medible y de medida cero. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, se pueden encontrar $I_1, \dots, I_p$ cubos disjuntos dos a dos, del mismo lado, tales que

$$A \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_p \qquad (*)$$

y $\mu(I_1 \cup \dots \cup I_p) = \mu(I_1) + \dots + \mu(I_p) < \varepsilon$.

Sea $\alpha > 0$ una constante de Lipschitz para f relativa a la norma $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \{|x_i|\}$ y sea a^k un punto arbitrario de I_k. Entonces, para cada $x \in I_k$ se verifica que

$$\|f(x) - f(a^k)\|_\infty \le \alpha \|x - a^k\|_\infty \le \alpha \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^{1/n} \qquad (**)$$

Es decir, resulta que $f(I_k)$ está contenido en el cubo

$$J_k = B_\infty\left[f(a^k), \alpha\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^{1/n}\right]$$

cuya medida es $\mu(J_k) = (2\alpha)^n \dfrac{\varepsilon}{p}$.

Por tanto, $f(A)$ está contenido en el conjunto elemental $J_1 \cup \dots \cup J_p$, que tiene una medida menor o igual que $(2\alpha)^n \varepsilon$. c.q.d.

NOTA: El lema sigue siendo válido si, en lugar de ser f lipschitziana en todo $\mathbb{R}^n$, lo es en un abierto G de $\mathbb{R}^n$, tal que $\bar{A} \subset G$. Para probarlo basta hacer como antes, pero con los cubos $I_1, \dots, I_p$ contenidos en G.

4.2. COROLARIO: Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal y $C \subset \mathbb{R}^n$ es J-medible, entonces también lo es $f(C)$.

Demostr.: $f(C)$ es acotado por serlo C y ser f lipschitziana. Si f es un isomorfismo (el determinante de su matriz es distinto de cero), entonces $f(\partial C) = \partial f(C)$ (pues f sería un ℓ-homeomorfismo) y basta aplicar el lema anterior.

En caso contrario, $f(C)$ está contenido en un subespacio vecto-

(**) Esta última desigualdad es cierta pues $\mu(J_1) = \dots = \mu(J_p)$, y por tanto, el "lado" de cada cubo es menor que $(\varepsilon/p)^{1/n}$

(*) Como consecuencia de la propiedad de los cubos citada en intervalos y [illegible] para caracterizar la J-medibilidad de un conjunto y calcular su medida, basta [illegible] rial propio de $\mathbb{R}^n$ (de dimensión igual al rango de la matriz asociada a f) y es, por tanto, J-medible y de medida cero. Para comprobar esta afirmación basta aplicar el lema previo, teniendo en cuenta que toda parte acotada de un subespacio vectorial propio (o de una variedad lineal propia), es la imagen mediante un giro (y una traslación) de una parte acotada de un hiperplano coordenado y que dicha parte es J-medible y de medida cero, por estar contenida en algún intervalo degenerado. ∎

(V) 4.3. TEOREMA: Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es de clase 1 y $C \subset \mathbb{R}^n$ es J-medible, entonces también lo es $f(C)$.

Demostr.: Siendo C acotado, $\overline{C}$ es acotado. Por ser f continua y $\overline{C}$ compacto $\overline{f(C)} = f(\overline{C})$. Siendo $\overline{C}$ compacto, $f(\overline{C})$ es compacto y, por tanto, acotado. Luego $f(C)$ es acotado.

Veamos ahora que $\partial f(C)$ es J-medible y de medida cero.

Puesto que $\overline{f(C)} = f(\overline{C})$ se verifica que $\partial f(C) \subset f(\overline{C})$

Distinguiremos dos casos:

a) Supongamos que para cada $x \in \mathring{C}$ se tiene $\det f'(x) \neq 0$. (*)
Entonces, por el teorema de la función inversa, los puntos de $\mathring{C}$ se transforman por f en puntos de $\mathring{\overbrace{f(C)}}$. Luego, en este caso resulta que $\partial f(C) \subset f(\partial C)$.

Teniendo en cuenta que la restricción de f a cada acotado de $\mathbb{R}^n$ es lipschitziana (corolario 5.2, Tema 5º), tenemos en virtud del lema 4.1 que $f(\partial C)$ es J-medible y de medida cero, y por tanto, $\partial f(C)$ es J-medible y de medida cero.

b) Caso general: Los puntos $x \in \mathring{C}$ tales que $\det f'(x) \neq 0$ se transforman en puntos de $\mathring{\overbrace{f(C)}}$. Por lo tanto, la frontera de $f(C)$ está contenida en $f(\partial C) \cup f(D)$ donde

$$D = \{x \in \mathring{C} \,/\, \det f'(x) = 0\}.$$

Ya hemos visto que $f(\partial C)$ es J-medible y de medida cero. Será suficiente, entonces, probar que $f(D)$ es también J-medible y de medida cero. (**)

Probemos entonces que $f(D)$ es J-medible y de medida cero.

(**) Este enunciado "tiene" nombre: es el teorema de Sard-Thom.

Sea I un cubo compacto de lado $l>0$ que contiene fuertemente a C, es decir, tal que $\overline{C} \subset \mathring{I}$, y sea $\alpha>0$ una constante de Lipschitz para f en I relativa a la norma infinito.
Por hipótesis, la función

$$\varphi : (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\|f(y)-f(x)-Df(y-x)\|_\infty}{\|y-x\|_\infty} & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

es continua, y, por tanto, es uniformemente continua en el compacto $I \times I$.
Luego
$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, x,y \in I, \|x-y\|_\infty < \delta \Rightarrow \|f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)\| < \varepsilon \|x-y\|$. $(*)$
Sea $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $l/\nu \leq \delta$.
Dividamos I en ν^n cubos iguales de lado l/ν, $(I_k)_{k=1}^{\nu^n}$. Se tiene entonces para cualquier I_k que

$$x,y \in I_k \Rightarrow \|f(y)-f(x)-Df(x)(y-x)\| < \varepsilon\|x-y\| \leq \varepsilon\, l/\nu . \quad (1)$$

Si $\det f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I_k$, los puntos de $\overline{I}_k$ no nos interesan, pues sería $I_k \cap D = \emptyset$. Supongamos que $\overline{I}_k \cap D \neq \emptyset$, y sea $a^k \in \overline{I}_k \cap D$, es decir, tal que $\det f'(a_k) = 0$. Se tiene entonces que el conjunto

$$\{f(a^k) + Df(a^k)(x-a^k) \,/\, x \in I_k\}$$

está contenido en una variedad lineal propia de $\mathbb{R}^n$ (concretamente en $\{f(a^k)+Df(a^k)(x-a^k) \,/\, x \in \mathbb{R}^n\}$) de dimensión menor que n, pues es la imagen por una afinidad no inyectiva de una parte de $\mathbb{R}^n$ (la dimensión de esta variedad lineal es rango $f'(a^k)$).
Podemos suponer, por (A), que esta variedad lineal está contenida en un hiperplano coordenado.

Resulta de (1), haciendo $x=a^k$ y dejando variar y en I_k, que los puntos de $f(I_k)$ distan del hiperplano coordenado menos que $\varepsilon\, l/\nu$, es decir, que $f(I_k)$ está contenido en una "estrecha banda" centrada en el hiperplano y de "altura" $2\varepsilon\, l/\nu$.

Por otra parte, si $y \in I_k$, $\|f(y)-f(a_k)\|_\infty \leq \alpha\|y-a^k\| \leq \alpha\, l/\nu$
Entonces, $f(I_k)$ está contenido en un intervalo J_k cuya "base" $(n-1)$-dimensional) en el hiperplano coordenado tiene lado menor que $2\alpha\, l/\nu$ y cuya "altura" (1-dimensional) es menor que

que $2\varepsilon \ell/\nu$. La medida de ese intervalo es, por tanto, menor que
$$\left(2\alpha\frac{\ell}{\nu}\right)^{n-1} 2\varepsilon\frac{\ell}{\nu} = (2\ell)^n \alpha^{n-1}\frac{\varepsilon}{\nu^n}$$
La suma para $K=1,\dots,\nu^n$ de tales medidas de todos los posibles intervalos J_K es menor o igual que $(2\ell)^n\alpha^{n-1}\varepsilon$.

Luego
$$f(D) = f(I\cap D) \subset f\Big(\bigcup_{J_K\cap D\neq\emptyset} I_K\Big) \subset \bigcup_{J_K\cap D\neq\emptyset} f(I_K) \subset \bigcup_{J_K\cap D\neq\emptyset} J_K$$

Como $\mu\Big(\bigcup_{J_K\cap D\neq\emptyset} J_K\Big) \leq \sum_{J_K\cap D\neq\emptyset} \mu(J_K) < (2\ell)^n\alpha^{n-1}\varepsilon$.

Luego $\mu(f(D)) < (2\ell)^n\alpha^{n-1}\varepsilon$, es decir, $f(D)$ es J-medible y de medida cero. c.q.d.

5. PROPIEDADES DE $\mu : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$

Vamos a dar sin demostración las propiedades de la medida de Jordan en $\mathbb{R}^n$. Estas propiedades se demostrarán para la medida de Lebesgue, que extiende a la de Jordan.

(C) - Es no negativa: $\forall C\in\mathcal{J}$, $\mu(C)\geq 0$

- Es σ-aditiva: Si $(C_K)_{K\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos J-medibles disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{K\in\mathbb{N}} C_K \in\mathcal{J}$, entonces
$$\mu\Big(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} C_K\Big) = \sum_{K\in\mathbb{N}} \mu(C_K)$$

- Es monótona: Sean $C, D\in\mathcal{J}$ tales que $C\subset D$. Entonces $\mu(C)\leq\mu(D)$.
- Es σ-subaditiva: Si $(C_K)_{K\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de J-medibles tales que $\bigcup_{K\in\mathbb{N}} C_K\in\mathcal{J}$ entonces $\mu\Big(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} C_K\Big)\leq\sum_{K\in\mathbb{N}}\mu(C_K)$.

(T) $C\in\mathcal{J}$ si, y sólo si, $\forall\varepsilon>0$, $\exists E, F\in\mathcal{E}$, E cerrado y F abierto tales que
$$E\subset C\subset F \quad \text{y} \quad \mu(F\setminus E)<\varepsilon.$$

(A) - Es invariante frente a las traslaciones:
$$\forall C\in\mathcal{J},\ \forall x\in\mathbb{R}^n,\ \mu(x+C)=\mu(C)$$

- Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal de matriz asociada (a_{ij}), entonces
$$\forall C\in\mathcal{J},\ \mu[f(C)] = |\det(a_{ij})|\cdot\mu(C).$$

(V) No se cuenta todavía con herramientas suficientes para expresar la relación que existe entre $\mu[f(C)]$ y $\mu(C)$, cuando $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

es una aplicación inyectiva y de clase 1, y C un conjunto J-medible.

6. LA MEDIDA DE LEBESGUE EN $\mathbb{R}^n$

Se podría construir la medida de Lebesgue definiendo una medida exterior y una medida interior de Lebesgue. La construcción de la medida interior plantea problemas que habríamos de solucionar previamente. Seguiremos otro camino para la construcción de la medida de Lebesgue: a partir de la medida exterior.

DEFINICION: La medida exterior (n-dimensional) de Lebesgue de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ (acotado o no) es el número real positivo (ó $+\infty$) siguiente

$$\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) \; / \; I_k \in \mathcal{I} \text{ y } A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \}$$

Se verifica trivialmente que la medida exterior de un conjunto finito o numerable es cero.

Es trivial que si A es un conjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\mu^*(A) \leq \overline{\mu}(A)$$

pues $\{ \mu(F) / F \in \mathcal{E} \text{ y } A \subset F \} \subset \{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) / I_k \in \mathcal{I} \text{ y } A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \}$.

Ejemplo: $\overline{\mu}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 1$ y $\mu^*(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.

PROPIEDADES DE $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

1. Es no negativa, (ya se indica al poner $\overline{\mathbb{R}}_+$).
2. Es monótona: $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. La restricción de μ^* a $\mathcal{I}$ es la medida de $\mathcal{I}$. Se verá que esto también es cierto para $\mathcal{J}$.
4. Para la definición de μ^* pueden utilizarse, únicamente, intervalos abiertos. Basta considerar que con ellos el valor obtenido para μ^* es trivialmente mayor o igual que el dado. Por otro lado, supuesto $\mu^*(A) < +\infty$ (el caso $\mu^*(A) = +\infty$ es trivial), se tiene que $\forall \varepsilon > 0, \exists \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{I} / A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$ y $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) < \mu^*(A) + \varepsilon$.

Además, dado I_k, $\exists J_k \in \mathcal{I}$, J_k abierto $/ I_k \subset J_k$ y $\mu(J_k) < \mu(I_k) + \varepsilon/2^k$

Entonces $A \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} J_k$ y además

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(J_k) < \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) + \varepsilon < \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

5. Es σ-subaditiva: $\mu^*\left(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} A_K\right) \leq \sum_{K\in\mathbb{N}} \mu^*(A_K)$

6. Es invariante frente a las traslaciones:
$\forall x\in\mathbb{R}^n, \forall A\subset\mathbb{R}^n,\ \mu^*(x+A)=\mu^*(A)$.

7. No es σ-aditiva, es decir, existe una colección $\{A_K / K\in\mathbb{N}\}$ de partes de $\mathbb{R}^n$, disjuntas dos a dos, y tales que

$$\mu^*\left(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} A_K\right) < \sum_{K\in\mathbb{N}} \mu^*(A_K)$$

Ejemplo de VITALI: donde se prueba la existencia de una colección de partes de $\mathbb{R}$ como la citada en 7.
Definimos en $\mathbb{R}$ la relación de equivalencia

$$x\sim y \iff x-y\in\mathbb{Q}$$

Las clases del conjunto cociente $\mathbb{R}/\sim$ son de la forma $x+\mathbb{Q}$, y este conjunto es no numerable, pues de serlo, también lo sería $\mathbb{R}$, como unión numerable de conjuntos numerables.
El axioma de elección asegura la existencia de un conjunto $A\subset[0,1]$ formado por un elemento, y uno solo, de cada clase y se verifica que

$$[0,1]\subset\bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(x+A)\subset[-1,2]$$

Teniendo en cuenta que μ^* es invariante frente a las traslaciones y que

$$1=\mu^*([0,1])\leq\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}\mu^*(x+A)$$

se obtiene que $\mu^*(A)>0$.
Por tanto, si μ^* fuese σ-aditiva se llegaría al absurdo

$$+\infty=\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}\mu^*(x+A)=\mu^*\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(x+A)\right)\leq\mu^*([-1,2])=3. \quad (*)$$

8. No es aditiva (finitamente). Basta ver que μ^* no es aditiva si, y solo si, no es σ-aditiva.
Si μ^* no es aditiva, no es σ-aditiva trivialmente, pues si no es aditiva existen $A_1,\dots,A_p\subset\mathbb{R}^n$ tales que $\mu^*\left(\bigcup_{K=1}^{p} A_K\right)<\sum_{K=1}^{p}\mu^*(A_K)$ siendo $A_K\cap A_l=\emptyset$ si $K\neq l$. Haciendo $A_K=\emptyset$ para $K>p$ queda visto que μ^* no es σ-aditiva.
Veamos ahora que si μ^* no es σ-aditiva, tampoco es aditiva, o bien, que si μ^* es aditiva, es σ-aditiva.

Sea $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de partes de $\mathbb{R}^n$ disjuntas dos a dos.
Sabemos (μ^* es σ-subaditiva) que

$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k). \quad (I)$$

Supongamos que $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mu^*(A_k)$, $\forall p\in\mathbb{N}$. Supongamos además que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k) < +\infty$.

Entonces, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \nu\in\mathbb{N} \,/\, \sum_{k=1}^{\nu} \mu^*(A_k) > \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) - \varepsilon$.

Como $\sum_{k=1}^{\nu} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\nu} A_k\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$

se tendría que

$\forall \varepsilon>0$, $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k) - \varepsilon$

y, por tanto, $\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

y teniendo en cuenta (I) sería: $\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$

que prueba que μ^* es σ-aditiva. ■
Por tanto, μ^* no es aditiva, pues se ha comprobado que no es σ-aditiva.

9. CONJUNTOS L-MEDIBLES: MEDIDA DE LEBESGUE DE UN CONJUNTO L-MEDIBLE.

DEFINICIÓN: (de Caratheodory) Se dice que $E\subset\mathbb{R}^n$ es L-medible (medible en el sentido de Lebesgue) si se verifica que

$$\forall A\subset\mathbb{R}^n, \quad \mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\sim E)$$

es decir, si resulta aditiva la restricción de μ^* a las secciones que E determina en cada conjunto A de $\mathbb{R}^n$.

Si E es L-medible, la medida de Lebesgue (n-dimensional) de E es el número real positivo ó $+\infty$

$$\mu(E) = \mu^*(E).$$

9.1. TEOREMA: Condición necesaria y suficiente para que $E\subset\mathbb{R}^n$ sea L-medible es que

$$\forall I\in\mathcal{Y}, \quad \mu^*(I) = \mu^*(I\cap E) + \mu^*(I\sim E). \quad (*)$$

Demostr.: La necesidad es evidente.
Suficiencia: Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ tal que $\forall I\in\mathcal{Y}$, $\mu(I) = \mu^*(I\cap E) + \mu^*(I\sim E)$, y sea $A\subset\mathbb{R}^n$ arbitrario. Por definición de μ^*, dado $\varepsilon>0$ $\exists$ una sucesión $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de intervalos tales que $A\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ y $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(I_k) \leq \mu^*(A)+\varepsilon$.

Aplicando, sucesivamente, la subaditividad, la monotonía y la σ-subaditividad de μ^*, y la hipótesis, se obtiene

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E) \leq \mu^*[(\bigcup_k I_k)\cap E] + \mu^*[(\bigcup_k I_k)\setminus E] =$$
$$= \mu^*[\bigcup_k (I_k\cap E)] + \mu^*[\bigcup_k (I_k\setminus E)] \leq$$
$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} [\mu^*(I_k\cap E) + \mu^*(I_k\setminus E)] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(I_k) \leq \mu^*(A)+\varepsilon.$$

Siendo esto cierto cualquiera que sea $\varepsilon>0$ debe ser

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E). \quad \text{csqd.}$$

– Denotaremos por $\mathcal{M}$ la clase de los conjuntos de $\mathbb{R}^n$ que son L-medibles. Veamos que

9.2. TEOREMA: Todo J-medible es L-medible y la restricción de la medida de Lebesgue a $\mathcal{J}$ es la medida de Jordan.

Demostr.: Probemos que para todo $C\subset\mathbb{R}^n$, acotado, se verifica que

$$\underline{\mu}(C) \leq \mu^*(C) \leq \overline{\mu}(C)$$

En todo caso, es evidente que $\mu^*(C)\leq\overline{\mu}(C)$. Será suficiente probar que $\underline{\mu}(C)\leq\mu^*(C)$.

Ahora bien, para definir $\underline{\mu}$ basta utilizar conjuntos elementales cerrados (compactos) y para definir μ^* basta utilizar intervalos abiertos:

$\forall\varepsilon>0,\ \exists E\in\mathcal{E}$, cerrado / $E\subset C$ y $\underline{\mu}(C)\leq\mu(E)+\varepsilon/2$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{J}$, abiertos / $C\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$ y $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mu(I_k)\leq\mu^*(C)+\varepsilon/2$

Tenemos entonces $E\subset\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k$, y siendo E compacto, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que

$$E\subset I_1\cup\ldots\cup I_p$$

En consecuencia

$$\underline{\mu}(C)\leq\mu(E)+\varepsilon/2\leq\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{p} I_k\Big)+\varepsilon/2\leq\sum_{k=1}^{p}\mu(I_k)+\varepsilon/2\leq$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k)+\varepsilon/2\leq\mu^*(C)+\varepsilon.$$

Por tanto, debe ser $\underline{\mu}(C)\leq\mu^*(C)$.

Entonces, si C es J-medible, la medida de Jordan de C es $\mu^*(C)$. Falta ver que C es L-medible, pero esto es trivial pues, siendo la medida de Jordan aditiva, se tiene que

$$\forall I\in\mathcal{J},\ \mu(I)=\mu(I\cap C)+\mu(I\setminus C)$$

y, puesto que $I, I\cap C, I\setminus C\in\mathcal{J}$ se tiene que

$$\forall I\in\mathcal{J},\ \mu^*(I)=\mu^*(I\cap C)+\mu^*(I\setminus C). \quad \text{csqd.}$$

10. Propiedades de $\mathcal{M}$ y de $\mu: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

(C) 1. $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$

2. El complementario de un L-medible es L-medible: $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$.

3. $\mathcal{M}$ es cerrado frente a las uniones e intersecciones numerables: Si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de L-medibles, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k, \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{M}$. (*)

4. $\mathcal{M}$ es cerrado frente a la diferencia: Si $E, F \in \mathcal{M}$, entonces $E \setminus F \in \mathcal{M}$.

5. Todo conjunto contenido en un L-medible de medida cero es L-medible y de medida cero.

6. μ es no negativa, σ-aditiva, σ-subaditiva y monótona.

(T) - Todo abierto y todo cerrado es L-medible.

- Un conjunto E es L-medible si, y solo si, para cada $\varepsilon > 0$ existen F cerrado y G abierto tales que

$$F \subset E \subset G \quad \text{y} \quad \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

(A) - La imagen por una afinidad (aplicación lineal o traslación) de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo de un L-medible es L-medible.

- μ es invariante frente a las traslaciones, y si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal con matriz asociada (a_{ij}) y sea $E \in \mathcal{M}$, entonces

$$\mu[f(E)] = |\det(a_{ij})| \, \mu(E).$$

(V) La imagen por una aplicación de clase 1 de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo de un L-medible es L-medible.

Demostración de estas propiedades

(C) 1. Es evidente que $\emptyset, \mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$: $\forall A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \mathbb{R}^n) + \mu^*(A \setminus \mathbb{R}^n)$.

2. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$, $A \setminus E = A \cap E^c$. Luego

$\forall A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A \setminus E^c) + \mu^*(A \cap E^c)$

que prueba que $E^c \in \mathcal{M}$.

3 y 6. Veamos que la unión numerable de L-medibles es L-medible y que μ es σ-aditiva. Lo haremos en dos etapas:

1ª etapa: $E, F \in \mathcal{M} \Rightarrow E \cup F \in \mathcal{M}$.

Queremos probar que $\forall A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap (E \cup F)) + \mu^*(A \setminus (E \cup F))$

Si tenemos en cuenta que $A \cap (E \cup F) = (A \cap E) \cup [(A \setminus E) \cap F]$

y que μ^* es subaditiva tenemos que:

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A\cap(E\cup F)) + \mu^*(A\setminus(E\cup F)) \leq \mu^*(A\cap E) + \mu^*((A\setminus E)\cap F) +$$
$$+ \mu^*((A\setminus E)\setminus F) \overset{(I)}{=} \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E) \overset{(II)}{=} \mu^*(A) \qquad (III)$$

(I) es cierta pues F es L-medible.
(II) es cierta pues E es L-medible.

Luego $\forall A\subset\mathbb{R}^n$, $\mu^*(A) = \mu^*(A\cap(E\cup F)) + \mu^*(A\setminus(E\cup F))$

Veamos ahora que si $E\cap F=\emptyset$ entonces $\mu(E\cup F) = \mu(E)+\mu(F)$.
Más aun, probaremos, no solo que μ^* es aditiva para los L-medibles, sino que lo es tambien sobre las secciones que un conjunto cualquiera determina sobre dos conjuntos L-medibles, es decir, que

$\forall A\subset\mathbb{R}^n$, $\mu^*(A\cap(E\cup F)) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap F)$, si $E\cap F=\emptyset$. (*)

De la cadena de desigualdades (III) tenemos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\setminus E) \quad , \forall A\subset\mathbb{R}^n$$

En particular, sustituyendo A por $A\cap(E\cup F)$ tenemos

$$\mu^*(A\cap(E\cup F)) = \mu^*(A\cap(E\cup F)\cap E) + \mu^*[(A\cap(E\cup F))\setminus E] =$$
$$= \mu^*(A\cap E) + \mu^*[A\cap(F\setminus E)] = \mu^*(A\cap E) + \mu^*(A\cap F)$$

ya que $F\setminus E = F$, pues $E\cap F=\emptyset$.

Esto se generaliza fácilmente para el caso de una colección finita de L-medibles disjuntos dos a dos. Por tanto: "μ^* es aditiva sobre las secciones que determinan en un conjunto cualquiera los elementos de una colección finita de L-medibles disjuntos dos a dos".
Por tanto, $\mathcal{M}$ es cerrado frente a la unión finita y $\mu: \mathcal{M}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ es finitamente aditiva.

2ª etapa: (Caso numerable). Sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una colección numerable de conjuntos L-medibles. Queremos ver que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\in\mathcal{M}$.
Podemos suponer que $E_k\cap E_l=\emptyset$ si $k\neq l$, pues de no serlo podremos escribir $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k = E_1\cup[E_2\setminus E_1]\cup[E_3\setminus(E_1\cup E_2)]\cup\ldots$ que es unión numerable de conjuntos disjuntos dos a dos y L-medibles (la diferencia de L-medibles es L-medible, como veremos después).
Puesto que los E_k son L-medibles y disjuntos dos a dos tenemos que
$\forall p\in\mathbb{N}$, $\forall A\subset\mathbb{R}^n$ $\mu^*(A) = \mu^*[A\cap(\bigcup_{k=1}^{p} E_k)] + \mu^*(A\setminus\bigcup_{k=1}^{p} E_k) \geq$

$\geq \mu^*[A\cap(\bigcup_{k=1}^{p} E_k)] + \mu^*(A\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) =$

$= \sum_{k=1}^{p} \mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$

Luego, $\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \overset{(IV)}{\geq}$

$\geq \mu^*[A\cap(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)] + \mu^*(A\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \overset{(V)}{\geq} \mu^*(A)$

Las desigualdades (IV) y (V) son ciertas por la σ-subaditividad y subaditividad, respectivamente, de μ^*.

Se deduce que

$\forall A\subset \mathbb{R}^n,\ \mu^*(A) = \mu^*[A\cap(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)] + \mu^*(A\setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)$

y, por tanto, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{M}$.

Además se tiene, $\forall A\subset \mathbb{R}^n,\ \mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A\cap E_k) + \mu^*(A\setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)$

Sustituyendo A por $A\cap(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)$ se obtiene que

$$\mu^*(A\cap(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A\cap E_k)$$

Es decir, μ^* es σ-aditiva sobre las secciones que determinan en un conjunto cualquiera A de $\mathbb{R}^n$ una colección numerable de conjuntos L-medibles disjuntos dos a dos. En particular, para $A=\mathbb{R}^n$ se deduce que μ^* es numerablemente aditiva (σ-aditiva) para conjuntos L-medibles, o bienque, siendo la medida de Lebesgue la restricción de μ^* a $\mathcal{M}$, μ es σ-aditiva. ■

Que $\mathcal{M}$ es cerrado frente a la intersección numerable es consecuencia de lo anterior y del hecho de ser cerrado frente al paso al complementario, utilizando las leyes de Morgan.

Que μ es no negativa, monotona y σ-subaditiva es trivial, pues lo era μ^*.

4. Que la diferencia de L-medibles es L-medible es trivial si tenemos en cuenta que $E\setminus F = E\cap F^c$. (*)

5. Probemos que si $\mu^*(E)=0$, entonces $E\in\mathcal{M}$.

$\forall A\subset\mathbb{R}^n,\ \mu^*(A)\leq \mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)$, por la subaditividad de μ^*.

Por otra parte, como $\mu^*(A\cap E)=0$, pues $A\cap E\subset E$, y siendo $A\setminus E\subset A$ se tiene que $\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E)\leq\mu^*(A)$. Luego, $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap E)+\mu^*(A\setminus E) \Rightarrow E\in\mathcal{M}$.

De aquí se deduce trivialmente que si $E\in\mathcal{M}$ y $\mu(E)=0$ y $F\subset E$, entonces F es L-medible y de medida cero.

Vamos a obtener de lo anterior el siguiente

10.1. COROLARIO: Si $(E_K)_{K\in\mathbb{N}}$ es una sucesión expansiva (es decir, $E_K \subset E_{K+1}, \forall K$) de L-medibles entonces
$$\boxed{\mu\Big(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} E_K\Big) = \lim_{K\to\infty} \mu(E_K).}$$

Demostr.: Puesto que $\forall K\in\mathbb{N}$, $\mu(E_K) \leq \mu\big(\bigcup_{K\in\mathbb{N}} E_K\big)$ se tiene que
$$\lim_{K\to\infty} \mu(E_K) \leq \mu\Big(\bigcup_K E_K\Big).$$
Si $\lim_{K\to\infty} \mu(E_K) = +\infty$, entonces $\mu\big(\bigcup_K E_K\big) = +\infty$ y ya estaría probado.

Supongamos, entonces, que $\lim_K \mu(E_K) < +\infty$.
Puesto que la sucesión es expansiva se tiene que
$$\bigcup_{K\in\mathbb{N}} E_K = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \ldots = E_1 \cup \Big(\bigcup_{K=1}^{\infty} (E_{K+1} \setminus E_K)\Big)$$
y los conjuntos, $E_1, E_2\setminus E_1, E_3 \setminus E_2, \ldots$ son disjuntos dos a dos.
Entonces
$$\mu\Big(\bigcup_K E_K\Big) = \mu(E_1) + \sum_{K=1}^{\infty} \mu(E_{K+1} \setminus E_K) = \mu(E_1) + \sum_{K=1}^{\infty} [\mu(E_{K+1}) - \mu(E_K)] =$$
$$= \lim_K \mu(E_K). \quad \text{c.s.q.d.}$$

OBSERVACION: Sea $(E_K)_{K\in\mathbb{N}}$ una sucesión contractiva ($E_K \supset E_{K+1}, \forall K\in\mathbb{N}$) de L-medibles. No es cierto en general que
$$\lim_{K\to\infty} \mu(E_K) = \mu\Big(\bigcap_{K=1}^{\infty} E_K\Big). \qquad \text{(VI)}$$
Veamos un contraejemplo: Sea, para cada $K\in\mathbb{N}$, $E_K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq \frac{1}{K}\}$
E_K es medible, pues se puede obtener como unión numerable de intervalos: $E_K = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n,n]\times[0,\frac{1}{K}]$. Además, trivialmente, $\mu(E_K) = +\infty$
Luego $\lim_{K\to\infty} \mu(E_K) = +\infty$.

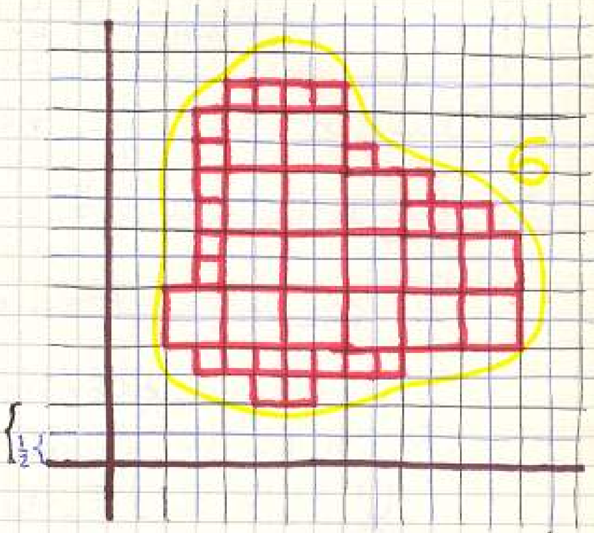
Pero $\bigcap_{K\in\mathbb{N}} E_K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y = 0\}$ (eje de las equis) que es de medida cero (basta recubrirlo con intervalos de medida cero).
Sí es cierta la igualdad (VI) cuando algún E_K (y por tanto, todos los siguientes) tiene medida finita.

(T) Todo abierto es L-medible, pues se puede obtener como unión numerable de intervalos (basta observar que el conjunto de los intervalos de $\mathbb{R}^n$ cuyos extremos tienen coordenadas racionales es una base de la topología de $\mathbb{R}^n$).
Como consecuencia inmediata de esto, todo cerrado (complementario

Aun más, podemos enunciar la siguiente

10.2. PROPOSICION: Todo abierto de $\mathbb{R}^n$ se puede obtener como unión numerable de intervalos disjuntos dos a dos.

La demostración se puede hacer considerando una "cubicación" de $\mathbb{R}^n$ mediante cubos de lado 1, una "subcubicación" de ella mediante cubos de lado $\frac{1}{2}$, otra subcubicación de ésta mediante cubos de lado $\frac{1}{2^2}$, etc...



Entonces, un abierto G es unión numerable de los siguientes cubos:

Los cubos de lado 1 contenidos en G; los cubos de lado $\frac{1}{2}$ contenidos en G, pero no contenidos en los anteriores, etc...

Estos cubos los podemos tomar disjuntos considerando que son de la forma $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \,/\, a_k \leq x_k < b_k, (k=1,\dots,n)\}$.

10.3. COROLARIO: La medida exterior de Lebesgue de un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ puede definirse por
$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(G) \,/\, G \text{ abierto}, A\subset G\}.$$

Demostr.: Por supuesto que
$$\inf\{\mu(G)\,/\,G \text{ abierto}, A\subset G\} \leq \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}\mu(I_k)\,/\,I_k\in\mathcal{J}_{abto}, A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\} =$$
$$= \inf\{\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k)\,/\,I_k\in\mathcal{J}_{abto} \text{ y } A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$
pues $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ es un abierto que contiene a A.

En virtud del lema, todo abierto se puede expresar como unión numerable de intervalos, que prueba la desigualdad contraria. c.q.d.

Vamos a probar ahora que un conjunto $E\subset\mathbb{R}^n$ es L-medible si, y solo si, $\forall\varepsilon>0$, $\exists F$ cerrado, G abierto $/ F\subset E\subset G$ y $\mu(G\setminus F)<\varepsilon$.

si] Sea $E\subset\mathbb{R}^n$ tal que para cada $k\in\mathbb{N}$ existen F_k cerrado y G_k abierto tales que $F_k\subset E\subset G_k$ y $\mu(G_k\setminus F_k)<\frac{1}{k}$.

Entonces
$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k\subset E\subset\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k \quad \text{y} \quad \mu(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k)\leq\mu(G_k\setminus F_k)<\frac{1}{k}, \ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Es decir, E se diferencia de un L-medible (el $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ ó el $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} G_k$)

solo si] Si se prueba que para $E \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$ existe G abierto tal que

$$E \subset G \quad y \quad \mu(G \setminus E) < \varepsilon/2$$

entonces, como también $E^c \in \mathcal{M}$, resultará que existe F cerrado tal que

$$E^c \subset F^c \quad y \quad \mu(F^c \setminus E^c) = \mu(E \setminus F) < \varepsilon/2$$

y de ambas cosas se seguirá que

$$F \subset E \subset G \quad y \quad \mu(G \setminus F) = \mu(G \setminus E) + \mu(E \setminus F) < \varepsilon$$

Falta pues probar la primera afirmación, y para ello se hará uso del corolario 10.3. Por este corolario resulta que dado $E \in \mathcal{M}$ y $\varepsilon > 0$ existe G abierto, tal que

$$E \subset G \quad y \quad \mu(G) \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

Si $\mu(E) < +\infty$, entonces

$$\mu(G \setminus E) = \mu(G) - \mu(E) \leq \varepsilon$$

Si $\mu(E) = +\infty$ no tiene sentido escribir $\mu(G) - \mu(E)$. Consideraremos entonces una sucesión de intervalos $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k = \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, $E \cap I_k \in \mathcal{M}$ y $\mu(E \cap I_k) < +\infty$.

Luego, $\exists G_k$ abto / $E \cap I_k \subset G_k$ y $\mu(G_k \setminus (E \cap I_k)) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$

Por consiguiente, el abierto $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$ es tal que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E \cap I_k) = E \subset G$$

$$y \quad \mu(G \setminus E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(G_k - E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(G_k - E_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

donde $E_k = E \cap I_k$. csqd.

NOTA: Además de lo enunciado, se ha probado que para todo $E \in \mathcal{M}$, existe un conjunto F_σ (unión numerable de cerrados) y un conjunto G_δ (intersección numerable de abiertos) tales que

$$F_\sigma \subset E \subset G_\delta \quad y \quad \mu(F_\sigma) = \mu(E) = \mu(G_\delta).$$

• No haremos aquí la demostración de las propiedades algebraicas y diferenciables.