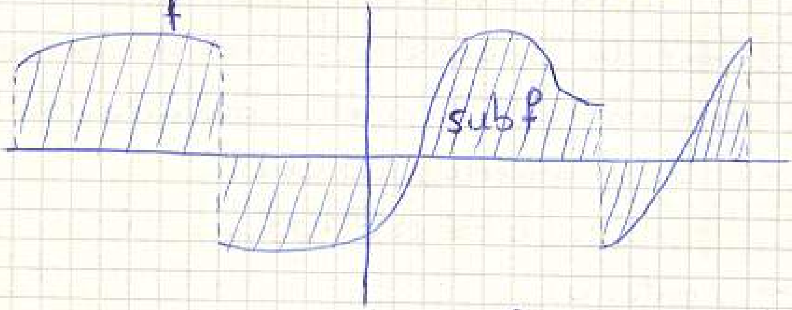
TEMA 9º: INTEGRACION LEBESGUE.

1. DEFINICIONES.

Sea una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

DEFINICION: Llamamos conjunto subyacente de f a

$$\operatorname{sub} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,/\, 0 < y < f(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,/\, f(x) < y < 0\}.$$



DEFINICION: Llamamos soporte de f al conjunto

$$\operatorname{sop} f = \{x \in \mathbb{R}^n \,/\, f(x) \neq 0\}.$$

DEFINICIONES: a) Se dice que una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es L-integrable (integrable en el sentido de Lebesgue) si, y solo si, por definición, sub f es L-medible y de medida finita.

b) Se dice que $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es R-integrable (integrable en el sentido de Riemann) si, y solo si, sub f es J-medible.

DEFINICION: Sea una función $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Llamamos f^+ a la función

$$f^+(x) = \begin{cases} = f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ = 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Llamamos f^- a la función

$$f^-(x) = \begin{cases} = f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ = 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Se tiene evidentemente que $f^- = -(-f)^+$ y que $f = f^+ + f^-$.

Es trivial que $\operatorname{sub} f = \operatorname{sub} f^+ \cup \operatorname{sub} f^-$.

1.1. PROPOSICION: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es X-integrable si, y solo si, f^+ y f^- son X-integrables, $(X = L \text{ ó } J)$

Demostr.: $\boxed{X = J\text{-}R}$ $\Longrightarrow$ | Si sub f es J-medible entonces está acotado, es decir, existe $I \in \mathcal{Y}_{n+1}$ tal que $\operatorname{sub} f \subset I$.

Si llamamos $I^+ = \{(x,y) \in I \,/\, y > 0\}$ e $I^- = \{(x,y) \in I \,/\, y < 0\}$ tenemos que $\text{sub}\, f^+ = \text{sub}\, f \cap I^+$ y $\text{sub}\, f^- = \text{sub}\, f \cap I^-$. Como la intersección de dos J-medibles es J-medible, se deduce que $\text{sub}\, f^+$ y $\text{sub}\, f^-$ son J-medibles.

$\Leftarrow$] Como $\text{sub}\, f = \text{sub}\, f^+ \cup \text{sub}\, f^-$ se deduce que si f^+ y f^- son R-integrables, entonces $\text{sub}\, f^+$ y $\text{sub}\, f^-$ son J-medibles y, por tanto, $\text{sub}\, f$ es J-medible.

• El caso $X = L$ es totalmente análogo tomando $I^+ = \mathbb{R}^{n+1}_+$ e $I^- = \mathbb{R}^{n+1}_-$.

<u>DEFINICION:</u> Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es X-integrable ($X = L$ ó J-R) su integral se define como

$$\int f = \mu(\text{sub}\, f^+) - \mu(\text{sub}\, f^-).$$

Denotaremos por $\mathcal{F}_J = \mathcal{R}$ el conjunto de funciones R-integrables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, y por $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ el conjunto de las funciones cuyo subyacente es L-medible; a estas funciones se les llama "FUNCIONES MEDIBLES". El conjunto de funciones medibles cuyo subyacente es de medida finita, es decir, el conjunto de funciones L-integrables, lo denotaremos por $\mathcal{L}$.

2. ESTRUCTURAS EN EL CONJUNTO $\mathcal{F}$ DE LAS FUNCIONES DE $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}$.

1) En primer lugar tenemos en $\mathcal{F}$ una estructura de espacio vectorial "natural" inducida por la del espacio imagen $\mathbb{R}$:

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

Se puede definir además de otra ley de composición interna

$\cdot : (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \longmapsto f \cdot g \in \mathcal{F}$ donde $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Con todo, $\mathcal{F}$ tiene estructura de algebra conmutativa y unitaria.

2) Tenemos ademas una estructura de orden inducida, de manera natural, por la de $\mathbb{R}$. Se define, para $f, g \in \mathcal{F}$

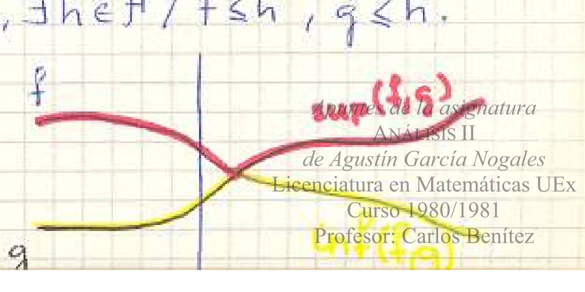
$$f \leq g \iff (\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq g(x))$$

El orden definido no es total.

Sí es filtrante, es decir, $\forall f, g \in \mathcal{F}, \exists h \in \mathcal{F} / f \leq h, g \leq h$.

Además, dadas $f, g \in \mathcal{F}$, existe la menor de las funciones que son mayores que f y g y es

$\sup(f,g) : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto \sup\{f(x), g(x)\} \in \mathbb{R}$



y existe la mayor de las funciones que son menores que f y g y es $\inf(f,g): x\in\mathbb{R}^n \longmapsto \inf\{f(x), g(x)\}$.

3) Por la complitud de $\mathbb{R}$ ocurre que si $(f_n)_n$ es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente ($\exists g\in\mathcal{F} / \forall n\in\mathbb{N}, f_n\leq g$) entonces existe el límite puntual de $(f_n)_n$ y es $\sup_n f_n$.
Equivalentemente, toda sucesión de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ acotada superiormente tiene supremo.
Se puede enunciar un resultado "análogo" para una sucesión monótona decreciente de $\mathcal{F}$ acotada inferiormente.

4) Ocurre también que el orden de $\mathcal{F}$ es compatible con la estructura vectorial, en el sentido de que:
Si $f\leq g \Rightarrow \forall h\in\mathcal{F}$, $f+h\leq g+h$
y $\forall\lambda>0$, $\lambda\cdot f\leq\lambda\cdot g$.

Por 2) decimos que $\mathcal{F}$ es un retículo. Por 2) y 3) se dice que $\mathcal{F}$ es un retículo completo. Por 1) y 4) se dice que $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial ordenado. Por 1), 2), 3) y 4) se dice que $\mathcal{F}$ es un retículo vectorial completo.

Probaremos después que $\mathcal{L}$ (conjunto de funciones L-integrables) es un subretículo vectorial completo de $\mathcal{F}$ y que $\mathcal{R}$ es un subretículo vectorial no completo de $\mathcal{F}$.

3. Estudio de la aplicación integral.

Vamos a enunciar, en lenguaje "algebraico" una serie de propiedades de la aplicación $\int: \mathcal{F}_X \longrightarrow \mathbb{R}$ donde supondremos que $X=\mathcal{J}$ o $\mathcal{M}$. (*)

1) $\int$ es un funcional lineal sobre $\mathcal{F}_X$, es decir, si f y g son X-integrables, entonces, $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\lambda f+\mu g\in\mathcal{F}_X$ y $\int(\lambda f+\mu g)=\lambda\int f+\mu\int g$

2) Si f y g son X-integrables y $f\leq g$, entonces $\int f\leq\int g$. Se dice por ello que el funcional lineal $\int$ es monótono creciente.
Equivalentemente, $\int$ es positivo, pues $f\leq g \Leftrightarrow g-f\geq 0$.

3) El funcional lineal positivo $\int$ sobre $\mathcal{L}$ (funciones L-integrables) es continuo respecto a la convergencia monótona (*), es decir:
Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones L-integrables que converge monotonamente hacia f (es decir, si $(f_n)_n$ es monótona creciente

(*) La convergencia monótona es la convergencia "natural" en los retículos completos.

verge puntualmente a f) entonces
$$\int f = \lim_n \int f_n .$$
Estas propiedades serán probadas más adelante.

4. Integral de Riemann.

Puesto que solo estudiamos la medida de Jordan de conjuntos acotados, si f es R-integrable entonces sub f es acotado, lo cual equivale a que f sea acotada y de soporte acotado.

Consecuencias inmediatas de la definición de funciones R-integrables y de las propiedades de la medida de Jordan son las siguientes:

1) Dadas $f,g \in \mathcal{R}$, si $f \leq g$ entonces $\int f \leq \int g$.

2) Si $f,g \in \mathcal{R}$, también son R-integrables $\inf(f,g)$ y $\sup(f,g)$. Se verifica que sub $\inf(f,g)$ = sub $f \cap$ sub g y sub $\sup(f,g)$ = sub $f \cup$ sub g. en el caso de que $f,g \geq 0$.

3) Si $f \in \mathcal{R}$, entonces f^+ y f^- son R-integrables. De hecho
$$f^+ = \sup(f,0) \quad y \quad f^- = \inf(f,0).$$

No es trivial la demostración de que $\int$ es un funcional lineal.(*) Supuesto probado esto tenemos que si $f \in \mathcal{R}$ entonces $|f| \in \mathcal{R}$, pues $|f| = f^+ - f^-$, y además
$$\left|\int f\right| \leq \int |f|$$
ya que $f \leq |f|$ y $-f \leq |f| \Rightarrow \int f \leq \int |f|$ y $-\int f \leq \int |f|$.

Veamos un contraejemplo que prueba que la integral de Riemann no es continua respecto a la convergencia monótona acotada.

Contraejemplo: Sea $(x_K)_{K\in\mathbb{N}}$ el conjunto de los racionales de $[0,1]$ ordenados en sucesión, y sea χ_K la función característica de $\{x_1,\dots,x_K\}$, es decir
$$\chi_K : x \in \mathbb{R} \longmapsto \chi_K(x) = \begin{cases} = 1 & si\ x \in \{x_1,\dots,x_K\} \\ = 0 & si\ x \notin \{x_1,\dots,x_K\}. \end{cases}$$

La sucesión $(\chi_K)_{K\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente de funciones R-integrables acotada superiormente por la función característica de $[0,1]$, $\chi_{[0,1]} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in [0,1] \\ 0 & si\ x \notin [0,1] \end{cases}$, que es R-integrable.

El límite de la sucesión $(\chi_K)_{K\in\mathbb{N}}$ es la función característica de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, función que no es R-integrable, pues su subyacente no es J-medible.

Veamos ahora una caracterización de funciones R-integrables:

4.1. TEOREMA: Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función acotada de soporte acotado. f es R-integrable si, y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}(I) \,/\, \mathcal{U}(f,P) - L(f,P) < \varepsilon \quad (*)$$

donde I es un intervalo que contiene a sop f y $\mathcal{P}(I)$ es el conjunto de las particiones de I.

Equivalente a estas proposiciones es la siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists l, u \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}} \,/\, l \leq f \leq u \text{ y } \int (u-l) < \varepsilon.$$

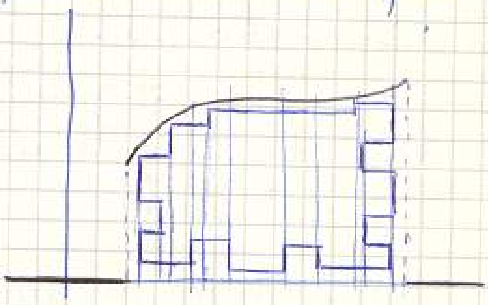
Demostr.: $\Rightarrow$] Si f es R-integrable, sub f es J-medible y, por tanto

$\forall \varepsilon > 0, \exists E, F \in \mathcal{E} \,/\, E \subset \text{sub} f \subset F$ y $\mu(F \setminus E) < \varepsilon$.

Supongamos que $f \geq 0$; el caso general se prueba observando que $f = f^+ + f^-$ y que $f^+, -f^- \geq 0$.

Sea $I \in \mathcal{Y}_n$ tal que sop $f \subset I$.

Prolongando los "lados" ("caras", ...) "verticales" de E y F obtenemos una partición de I: $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_p$.



Sea para $k = 1, \ldots, p$, $m_k(f) = \inf\limits_{x \in I_k} f(x)$

y sea $l : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto l(x) = \begin{cases} = \sum\limits_{k=1}^{p} m_k(f) \cdot \chi_k(x) & \text{si } x \in I \\ = 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$

donde χ_k es la función característica de I_k.

Trivialmente, $l \in \mathcal{F}_{\mathcal{E}}$ y se tiene que

$$\int l = L(f,P) = \sum_{k=1}^{p} m_k(f) \cdot \mu_n(I_k) \geq \mu_{n+1}(E)$$

Análogamente, se define $M_k(f) = \sup\limits_{x \in I_k} f(x)$, $k = 1, \ldots, p$

y $u : x \in \mathbb{R}^n \longmapsto u(x) = \begin{cases} = \sum\limits_{1}^{p} M_k(f) \cdot \chi_k(x) & \text{si } x \in I \\ = 0 & \text{si } x \notin I. \end{cases}$

y se tiene que $\int u = \mathcal{U}(f,P) = \sum\limits_{1}^{p} M_k(f) \cdot \mu_n(I_k) \leq \mu_{n+1}(F)$

Luego $\mathcal{U}(f,P) - L(f,P) \leq \mu(F) - \mu(E) < \varepsilon$.

$\Leftarrow$] Trivial.

Este teorema dice que para decidir si una función f de subyacente

(*) Recordemos de ANALISIS I (Tema 8º) que si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{P}(I)$ y llamamos $m_i := \inf\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $M_i = \sup\{f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i] \ldots$

acotado es R-integrable basta utilizar conjuntos elementales que sean subyacentes de funciones elementales (escalonadas).

5. INTEGRAL DE LEBESGUE

DEFINICION: Se dice que una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible (L-medible) si sub f es L-medible; equivalentemente, si subf^+ y subf^- son L-medibles.

f es L-integrable si, y solo si, f es medible y sub f tiene medida finita.

Antes de probar un teorema que da una caracterización de funciones medibles en términos más funcionales, veremos una serie de proposiciones y lemas preliminares.

5.1. PROPOSICION: Sea una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Son equivalentes las proposiciones siguientes:

1) $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq c\}$ es medible, $\forall c \in \mathbb{R}$. (*)
2) $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < c\}$ es medible, $\forall c \in \mathbb{R}$
3) $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > c\}$ es medible, $\forall c \in \mathbb{R}$.
4) $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \leq c\}$ es medible, $\forall c \in \mathbb{R}$.
5) $\{x \in \mathbb{R}^n / a \leq f(x) \leq b\} = f^{-1}([a,b])$ es medible, $\forall a,b \in \mathbb{R}$
6) $\{x \in \mathbb{R}^n / a < f(x) \leq b\}$ es medible, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.
7) $\{x \in \mathbb{R}^n / a \leq f(x) < b\}$ es medible, $\forall a,b \in \mathbb{R}$
8) $\{x \in \mathbb{R}^n / a < f(x) < b\}$ es medible, $\forall a,b \in \mathbb{R}$
9) $\forall \mathcal{U}$ abierto de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(\mathcal{U})$ es medible.
10) $\forall V$ cerrado de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(V)$ es medible.
11) $\forall B$ boreliano de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ es medible. (*)

Demostr.: La equivalencia de 1) y 2) es trivial pues los conjuntos son complementarios. Análogo para 3) y 4).

1) $\Rightarrow$ 3) pues $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > c\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq c + \frac{1}{k}\}$

3) $\Rightarrow$ 1) pues $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq c\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) > c - \frac{1}{k}\}$

1) $\Rightarrow$ 5) $\{x / a \leq f(x) \leq b\} = \{x / f(x) \geq a\} \cap \{x / f(x) \leq b\}$ y los dos conjuntos del segundo miembro son del tipo 1) y del tipo 4) respectivamente.

5) $\Rightarrow$ 1) $\{x / f(x) \geq c\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x / c \leq f(x) \leq c + k\}$.

(*) Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, los elementos de la σ-álgebra generada por $\mathcal{T}$ se llaman conjuntos de Borel o borelianos. Un boreliano en $\mathbb{R}$ es un conjunto que se obtiene a partir de una colección numerable de abiertos mediante uniones, complementarios, intersecciones y diferencias.

Análogamente se prueban las equivalencias
1) $\Leftrightarrow$ 6), 1) $\Leftrightarrow$ 7) y 1) $\Leftrightarrow$ 8).

8) $\Rightarrow$ 9) Sea U abierto de $\mathbb{R}$. Entonces U es unión numerable de abiertos: $U = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}]a_k, b_k[$. Entonces

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^{-1}(]a_k, b_k[) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x / a_k < f(x) < b_k\}.$$

9) $\Rightarrow$ 8) Trivial, pues $\{x / a < f(x) < b\} = f^{-1}(]a,b[)$.

La equivalencia 9) $\Leftrightarrow$ 10) es trivial, pues los cerrados son los complementarios de abiertos, y $f^{-1}[B^c] = (f^{-1}[B])^c$

9) $\Rightarrow$ 11) Trivial, pues todo boreliano es unión, intersección, diferencia, complementario de una colección numerable de abiertos.

11) $\Rightarrow$ 9) Trivial, pues todo abierto es un boreliano. c.s.q.d.

5.2. LEMA: a) Si $I \in \mathcal{J}_m$ y $J \in \mathcal{J}_n$ entonces $I\times J \in \mathcal{J}_{m+n}$ y

$$\mu_{m+n}(I\times J) = \mu_m(I)\cdot \mu_n(J) \qquad (*)$$

b) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $I \in \mathcal{J}_m$ entonces

$$\mu^*_{m+n}(A\times I) = \mu^*_n(A)\cdot \mu^*_m(I)$$

c) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$ entonces

$$\mu^*_{m+n}(A\times B) \le \mu^*_n(A)\cdot \mu^*_m(B).$$

5.3. LEMA: Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión expansiva de conjuntos de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$$

Demostr.: Desde luego existe $\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) \in \overline{\mathbb{R}}$, por la monotonía de la sucesión.

Además $\lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) \le \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right)$, pues $A_k \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $\forall k\in\mathbb{N}$

Por otra parte, puesto que $\mu^*(A_k) = \inf\{\mu(G) / G \text{ abierto}, A_k \subset G\}$ resulta que

$$\forall k\in\mathbb{N}, \exists G_k \text{ abto} / A_k \subset G_k \text{ y } \mu(G_k) < \mu^*(A_k) + \frac{1}{k}$$

Luego $\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \le \mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(G_k)$, por corolario 10.1 del Tema 8º. Como $\lim_{k\to\infty} \mu(G_k) \le \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k)$ se tiene

$$\mu^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \le \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k) \quad . \quad \text{c.s.q.d.}$$

5.4. LEMA: Si $E \in \mathcal{M}_m$ y $F \in \mathcal{M}_n$ entonces $E \times F \in \mathcal{M}_{m+n}$ y
$$\mu_{m+n}(E \times F) = \mu_m(E) \cdot \mu_n(F).$$

DEFINICIONES: a) (Función característica de un conjunto)

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$; se define la función característica de A como:
$$\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} = 1 & \text{si } x \in A \\ = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

b) Se dice que una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ es simple (L-simple) si es una combinación lineal de funciones características de conjuntos medibles (L-medibles).

5.5. TEOREMA: (teorema fundamental de paso de la medida de Lebesgue a la integral de Lebesgue).

Sea una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Son equivalentes las proposiciones siguientes:

1) $\operatorname{sub} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / 0 < y < f(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / f(x) < y < 0\} \in \mathcal{M}_{n+1}$.

2) $\forall c \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq c\} \in \mathcal{M}_n$. (*)

Demostr.: Haremos la demostración suponiendo que $f \geq 0$. La prueba general se hace teniendo en cuenta que $f = f^+ + f^-$ y que $f^+ \geq 0$ y $-f^- \geq 0$. En nuestra suposición, $\operatorname{sub} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1} / 0 < y < f(x)\}$.

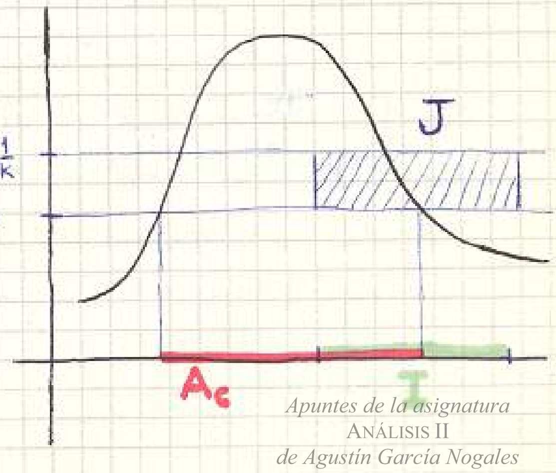
$\Rightarrow$) Por hipótesis, $\operatorname{sub} f \in \mathcal{M}_{n+1}$. Hemos de probar que $\forall c \in \mathbb{R}$, $A_c = \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq c\} \in \mathcal{M}_n$.

De otra forma: Hipótesis: $\forall J \in \mathcal{J}_{n+1}$, $\mu(J) = \mu(J \setminus \operatorname{sub} f) + \mu(J \cap \operatorname{sub} f)$

Tesis: $\forall I \in \mathcal{J}_n$, $\mu(I) = \mu^*(I \setminus A_c) + \mu^*(I \cap A_c)$.

Sean $c \in \mathbb{R}$, $I \in \mathcal{J}_n$ y $K \in \mathbb{N}$ arbitrarios.

Sea $J = I \times [c, c + \frac{1}{K}]$



Tenemos que $\mu(J) = \mu(I) \cdot \frac{1}{K}$ (Lema 5.2).

Trivialmente tenemos que

$J \setminus \operatorname{sub} f \supset (I \setminus A_c) \times [c, c + \frac{1}{K}]$ y por tanto

$\mu^*(J \setminus \operatorname{sub} f) \geq \mu^*(I \setminus A_c) \cdot \frac{1}{K}$ (Lema 5.2.b)).

Por otra parte

$J \cap \operatorname{sub} f \supset (I \cap A_{c+\frac{1}{K}}) \times [c, c + \frac{1}{K}]$.

Luego: $\mu(J \cap \operatorname{sub} f) \geq \mu^*(I \cap A_{c+\frac{1}{K}}) \cdot \frac{1}{K}$.

Luego $\mu(I) \geq \mu^*(I \setminus A_c) + \mu^*(I \cap A_{c+\frac{1}{k}})$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Un razonamiento análogo prueba que

$$\mu(I) \leq \mu^*(I \setminus A_{c+\frac{1}{k}}) + \mu^*(I \cap A_c) \quad , \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Puesto que $\lim_{k\to\infty} \mu^*(I \setminus A_{c+\frac{1}{k}}) = \mu^*(I \setminus A_c)$ y

$\lim_{k\to\infty} \mu^*(I \cap A_{c+\frac{1}{k}}) = \mu^*(I \cap A_c)$

queda visto que $\mu(I) = \mu^*(I \setminus A_c) + \mu^*(I \cap A_c)$, $\forall I \in \mathcal{Y}_n$.

$\Leftarrow$] Sea $k \in \mathbb{N}$ e $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, k \cdot 2^k$. Llamamos

$$B_{ki} = \{x \in \mathbb{R}^n \, / \, \tfrac{i-1}{2^k} \leq f(x) < \tfrac{i}{2^k}\} \quad y \quad C_k = \{x \in \mathbb{R}^n \, / \, k \leq f(x)\}$$

Consideramos la función

$$S_k = \sum_{i=1}^{k \cdot 2^k} \frac{i-1}{2^k} \chi_{B_{ki}} + k\, \chi_{C_k}$$

S_k es entonces una función simple.

Se prueba que $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge monótonamente a f.

El conjunto sub S_k es L-medible, por ser S_k simple, y se verifica que

$$\text{sub} f = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \text{sub}\, S_k$$ (es esto exactamente si en cada B_{k1} ponemos $<,<$ en lugar de $\leq, <$).

Por tanto, sub $f \in \mathcal{M}_{n+1}$

Además, $\mu_{n+1}(\text{sub}\, S_k) = \sum_{i=1}^{k\cdot 2^k} \frac{i-1}{2^k} \mu(B_{ki}) + k\, \mu(C_k)$ $\left(\overset{\text{notación}}{\equiv} \int S_k\right)$.

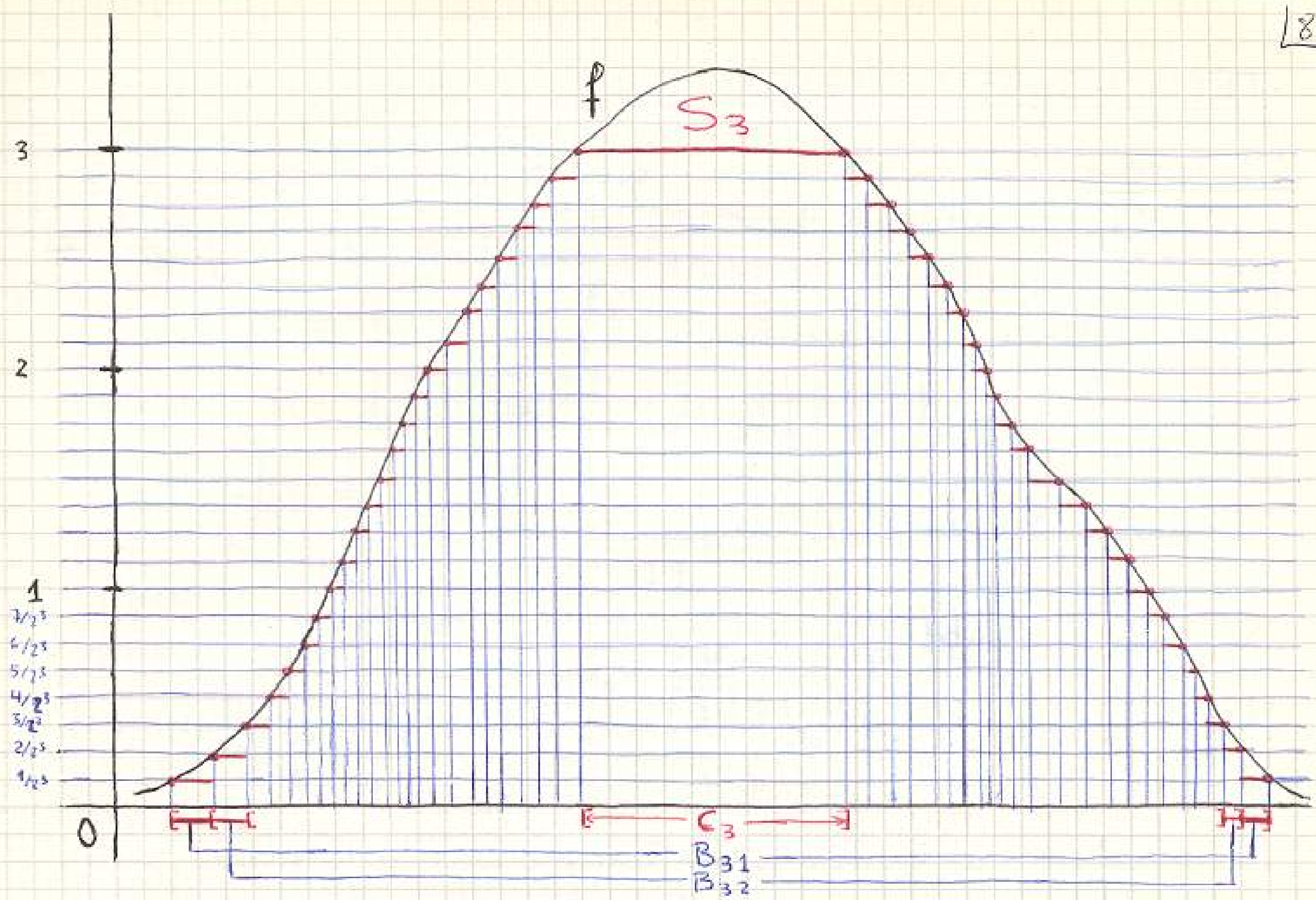
Siendo $(\text{sub}\, S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión expansiva de L-medibles se tiene que

$$\mu(\text{sub} f) = \lim_{k\to\infty} \mu(\text{sub}\, S_k)$$

o bien, $\int f = \lim_{k\to\infty} \int S_k$ c.s.q.d.

<u>OBSERVACION:</u> Se ha probado además que toda función medible no negativa es límite de una sucesión monótona creciente de funciones simples. Puesto que el recíproco de esto es siempre cierto, podemos decir que la proposición 3) " $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es límite de una sucesión de funciones simples (f^+ es límite de una sucesión monótona creciente de funciones simples y f^- es límite de una sucesión monótona decreciente de funciones simples)" es equivalente a las proposiciones 1) y 2) del teorema anterior. (*)

Como se deduce de la demostración, para medir el sub-yacente de una función Lebesgue, a diferencia de Riemann



tomaba particiones en el "eje Y". Un símil para interpretar los métodos de Riemann y de Lebesgue es el siguiente: " Si de un conjunto de monedas de distintos valores Riemann tomaba una a una, sin fijarse en su valor, y sumaba, Lebesgue clasifica las monedas por su valor y las suma así".

6. Propiedades de $\mathcal{L}$ = {funciones L-integrables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$} y de $\int : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$.

6.1. TEOREMA: Con las operaciones usuales de adición y producto por escalares reales, $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $\int$ es un funcional lineal en $\mathcal{L}$. Además, si $f \in \mathcal{L}$, entonces $|f| \in \mathcal{L}$. (*)

Demostr.: Se sigue del teorema fundamental y del hecho de que el teorema es cierto, trivialmente, para el subespacio vectorial de $\mathcal{L}$ formado por las funciones simples, subespacio que es "denso" en $\mathcal{L}$, en el sentido de 3) (OBSERVACION al teorema fundamental). Además $|f| = f^+ - f^-$.

6.2. TEOREMA: $\mathcal{L}$ es un retículo vectorial, es decir, si $f, g \in \mathcal{L}$ entonces $\sup(f,g)$, $\inf(f,g) \in \mathcal{L}$. Además el funcional lineal $\int$ es monótono creciente: si $f, g \in \mathcal{L}$ y $f \leq g$ entonces $\int f \leq \int g$. También, si $f \in \mathcal{L}$, $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

Demostr.: Trivial consecuencia de 1) (Teorema fundamental).

(*) Puede ocurrir que $|f|$ sea medible sin serlo f. Ejemplo: Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \notin \mathcal{M}_n$. Entonces la función $f: x \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ -1 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ no es medible.

TEOREMAS DE CONVERGENCIA:

6.3. TEOREMA: (de la convergencia monótona de Lebesgue).

Si $(f_n)_n$ es una sucesión monótona de funciones medibles no negativas entonces su límite, que es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\overline{\mathbb{R}}_+$, es medible y se verifica que

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n. \qquad (*)$$

Demostr.: Siendo $(f_n)_n$ monótona (creciente) se tiene que $(\operatorname{sub} f_n)_n$ es una sucesión expansiva de L-medibles.

Se tiene que $\operatorname{sub}(\lim_n f_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sub} f_n$.

Luego, $\int \lim_n f_n = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{sub} f_n\right) = \lim_n \mu(\operatorname{sub} f_n) = \lim_n \int f_n$. csqd

El enunciado que hemos dado es el enunciado clásico. El mismo teorema, con un enunciado que "conviene más" a la integral, dice:
"Si $(f_n)_n$ es una sucesión monótona creciente acotada casi por doquiera (c.p.d.) por una función L-integrable g, de funciones L-integrables entonces $\lim_n (f_n)$ es también L-integrable y se verifica que $\int \lim_n (f_n) = \lim_n \int f_n$."

Por esto se dice que el retículo vectorial $\mathcal{L}$ es completo (cerrado frente a la convergencia monótona acotada), y el funcional lineal monótono $\int$ es continuo respecto a la convergencia monótona; $\int$ es un morfismo entre los retículos vectoriales completos $\mathcal{L}$ y $\mathbb{R}$.

NOTA: Sea $(A_K)_{K\in\mathbb{N}}$ una sucesión de partes de un conjunto dado A.
Se llama límite inferior de la sucesión a

$$\underline{\lim}(A_K) = \bigcup_{K=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i\geq K} A_i\right)$$

y se llama límite superior de la misma a

$$\overline{\lim}(A_K) = \bigcap_{K=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i\geq K} A_i\right).$$

Trivialmente, $\underline{\lim}(A_K) \subset \overline{\lim}(A_K)$

Se dice que esta sucesión tiene límite si

$$\underline{\lim}(A_K) = \overline{\lim}(A_K).$$

Si $A = \mathbb{R}^n$ y $(A_K)_K$ tiene límite, no es cierto en general que la medida del límite sea el límite de las medidas. Ejemplo: $A_K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -2^K \leq x \leq 2^K, 0 \leq y \leq 2^{-K}\}$

Sí es cierto si los A_k están contenidos en un L-medible de medida finita.

6.4. TEOREMA: (Lema de Fatou)

Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones L-medibles no negativas entonces el límite inferior de $(f_n)_n$ es L-medible y se verifica que

$$\int \underline{\lim}\,(f_n)_n \leq \underline{\lim}_n \int f_n .$$

Demostr.: Por definición de límite inferior de una sucesión se tiene que

$$\left[\underline{\lim}\,(f_n)_n\right](x) = \underline{\lim}\,(f_n(x))_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}\right] =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\inf_{k\geq n} f_k(x)\right].$$

Entonces $\operatorname{sub}\left[\underline{\lim}\,(f_n)_n\right] = \underline{\lim}\left[\operatorname{sub} f_n\right]_n =$

$$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k\right)$$

$\forall k\in\mathbb{N}$, $\operatorname{sub} f_k$ es medible. Luego, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k$ es medible.

Además, $\left(\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k\right)_n$ es una sucesión expansiva de L-medibles.

Luego $\mu\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k\right)\right] = \lim_n \mu\left(\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k\right) = \sup_n \mu\left(\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k\right).$

Como $\int \underline{\lim}\,(f_n)_n = \mu\left[\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k\right)\right]$

y $\underline{\lim}_n \int f_n = \underline{\lim}_n\, \mu(\operatorname{sub} f_n)$, y teniendo además que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\bigcap_{k\geq n}\operatorname{sub} f_k \subset \operatorname{sub} f_n$ se verifica que

$$\int \underline{\lim}\,(f_n)_n \leq \underline{\lim}_n \int f_n \qquad \text{c.s.q.d.}$$

6.5. TEOREMA: (de la convergencia dominada de Lebesgue).

Si $(f_n)_n$ es una sucesión convergente (puntualmente) de funciones L-integrables y existe una función $g\in\mathcal{L}$ tal que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|f_n|\leq g$ entonces $\lim_n f_n \in \mathcal{L}$ y se tiene que

$$\int \lim_n f_n = \lim_n \int f_n$$

Demostr.: Que $\lim_n f_n \in \mathcal{L}$ es trivial por el lema de Fatou.

Por otra parte, la sucesión $(g-f_n)_n$ es de funciones no negativas medibles (más aún, integrables). Por tanto

$$\int \underline{\lim}\,(g-f_n)_n = \int \lim_n (g-f_n) \leq \underline{\lim} \int (g-f_n)$$

Luego $\int \lim_n(-f_n) \leq \underline{\lim_n} \int(-f_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \lim_n f_n \geq -\underline{\lim_n} \int(-f_n)$

Puesto que $-\underline{\lim_n}\int(-f_n) = \overline{\lim_n}\int f_n$ se tiene que

$$\int \lim_n f_n \geq \overline{\lim_n} \int f_n$$

Por otra parte, $(g+f_n)_n$ es una sucesión de funciones medibles no negativas (pues g "domina" absolutamente a las f_n). Entonces

$\int \lim_n (g+f_n) = \int \underline{\lim} (g+f_n)_n \leq \underline{\lim_n} \int (g+f_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \lim_n f_n \leq \underline{\lim_n} \int f_n$

Por tanto, $\overline{\lim_n} \int f_n \leq \int \lim_n f_n \leq \underline{\lim_n} \int f_n$

Puesto que siempre $\underline{\lim_n} \int f_n \leq \overline{\lim_n} \int f_n$ se tiene que existe $\lim_n \int f_n$ y coincide con $\int \lim_n f_n$. csqd.

7. Integral de Riemann y Lebesgue sobre un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$.

Damos a continuación un teorema cuya demostración puede verse en Apostol o en Spivak ("Calculo en variedades").

7.1. TEOREMA: Una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada y de soporte acotado (es decir, de subyacente acotado) es R-integrable si, y solo si, es continua c.p.d (*), es decir, si es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ salvo a lo sumo en los puntos de un L-medible de medida nula.

OBSERVACION: No es lo mismo una función continua c.p.d que una función igual c.p.d a una función continua.

Por ejemplo, la funcion $f: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \begin{cases} =1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ =0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, $f = \chi_{\mathbb{Q}}$, es igual c.p.d. a la funcion cero (se diferencia de ella en los puntos de $\mathbb{Q}$ que es un L-medible de medida cero), pero es discontinua en todo $\mathbb{R}$ (que no es de medida nula).

DEFINICION: Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que una función f, definida cuando menos en C, es integrable (R ó L) en C si $f \cdot \chi_C$ es integrable (R ó L) en cuyo caso se define

$$\int_C f = \int f \cdot \chi_C .$$

7.2. PROPOSICION: Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es (J ó L)-medible si, y solo si, χ_C es (R ó L)-integrable y se verifica que

$$\mu(C) = \int \chi_C = \int_C 1$$

OBSERVACION: Si C es J-medible, entonces ∂C es J-medible y de medida cero, y recíprocamente.

Pero para conjuntos compacto es equivalente el ser J-medible de medida cero a ser L-medible de medida cero: basta ver que si F es L-medible de medida cero y compacto se tiene que $\mu^*(F) = \inf \{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(I_k) \,/\, I_k \in \mathcal{Y}$ abto., $F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \}$ y que del recubrimiento abierto $F \subset \bigcup_n I_n$ se puede extraer un subrecubrimiento finito).

Luego, siendo ∂C compacto, se tiene que C es J-medible (~~de medida cero~~) si, y solo si, ∂C es L-medible de medida cero.

Se tiene además que si C es compacto, $\partial(C) = \{$discontinuidades de $\chi_C\}$

Entonces, se tiene que

(χ_C es R-integrable) $\Leftrightarrow$ (χ_C es continua c.p.d.) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (∂C es L-medible de medida cero) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ (∂C es J-medible de medida cero) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ C es J-medible.

7.3. PROPOSICION: Si f es L-integrable y g es igual a f c.p.d entonces g es L-integrable y se verifica que

$$\int f = \int g.$$

7.4. PROPOSICION Si f es L-integrable y no negativa, y tal que $\int f = 0$, entonces ($f = 0$ c.p.d.).

7.5. PROPOSICION: La aplicación $f \in \mathcal{L} \longmapsto \int |f| \in \mathbb{R}^+$ es una seminorma (*) en $\mathcal{L}$.

NOTAS: Si definimos en $\mathcal{L}$ la relacion de equivalencia

$$(f \sim g) \Leftrightarrow (f = g \text{ c.p.d.})$$

es decir, si f y g se diferencian en los puntos de un L-medible de medida cero, y denotamos por L^1 el conjunto cociente $\mathcal{L}/\sim$, entonces, la aplicación

$$[f]\in L^1 \longmapsto \int|f|\in\mathbb{R}$$

es una norma en L^1.

En general, sea $p\in\mathbb{N}$ y $\mathcal{L}^p$ el conjunto de funciones L-medibles y tales que $|f|^p$ es L-integrable. Mediante una relación de equivalencia $\sim$ análoga a la anterior, consideramos el conjunto cociente $L^p = \mathcal{L}^p/\sim$. Entonces, la aplicación

$$[f]\in L^p \longmapsto \left(\int|f|^p\right)^{1/p}$$

es una norma en L^p.

Se prueba que los espacios normados L^p son completos.

En particular, el espacio L^2 se llama "el espacio de Hilbert".

La norma $f\in L^2 \longmapsto \left(\int|f|^2\right)^{1/2}$ deriva del producto escalar

$$(f|g) = \int fg$$

Se verifica que el producto de dos funciones L-medibles es L-medible. Sin embargo, el producto de dos funciones L-integrables no tiene por que ser L-integrable, es decir, el producto de dos funciones L-medibles de medida finita puede ser una función medible de medida infinita.

Ejemplo: La función $f: x\in\mathbb{R}\longmapsto \begin{cases} = 1/\sqrt{x} & \text{si } x\in\,]0,1] \\ = 0 & \text{si } x\notin\,]0,1]\end{cases}$

es L-medible de medida finita, pues

$$\mu(\mathrm{sub}\, f) = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\Big]_a^1 = \lim_{a\to 0}(2-2\sqrt{a}) = 2$$

Sin embargo, $f^2(x) = \frac{1}{x}$ si $x\in\,]0,1]$ y $f^2(x) = 0$ si $x\notin\,]0,1]$. Luego:

$$\mu(\mathrm{sub}\, f^2) = \lim_{a\to 0}\int_a^1\frac{1}{x} = \lim_{a\to 0+}\ln x\Big]_a^1 = \lim_{a\to 0+}(-\ln a) = +\infty.$$

Se deduce de lo anterior que $L^1 \not\subset L^2$.

Se prueba también que $L^2\not\subset L^1$.

Se demuestra además que, dado $p\in\mathbb{N}$, el dual de L^p es

$$(L^p)' = L^q$$

siendo $q\in\mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$.

8. Teoremas de Fubini

Damos a continuación dos teoremas, uno referente a funciones R-integrables y otro a funciones L-integrables, que se utilizan para el "cálculo de integrales dobles". Las demostraciones de los mismos pueden verse, respectivamente

8.1. TEOREMA: Sea $f: \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de subyacente acotado (equivalentemente, acotada de soporte acotado). Consideremos las aplicaciones

$$l: x \in \mathbb{R}^m \longmapsto l(x) = \underline{\int} f(x,y)\,dy \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n$$

y $\quad u: x \in \mathbb{R}^m \longmapsto u(x) = \overline{\int} f(x,y)\,dy \quad , \quad y \in \mathbb{R}^n$

Entonces, si f es R-integrable, también lo son l y u y se verifica que

$$\int f = \int u = \int l$$

Estas igualdades se suelen escribir en la forma

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int \Big[\overline{\int} f(x,y)\,dy \Big] dx = \int \Big[\underline{\int} f(x,y)\,dy \Big] dx .$$

OBSERVACIONES: - f asocia a cada par $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ el número real $f(x,y)$.
- Recordemos que la integral inferior de Riemann de una función es el supremo de las sumas inferiores de Riemann de la función y que la integral superior de Riemann de una función es el ínfimo de las sumas superiores de Riemann de la función.
- Notar que $\int f$ es una integral en $\mathbb{R}^{m+n}$ y que $\int u$ e $\int l$ son integrales en $\mathbb{R}^m$.

8.2. TEOREMA: Si la función $f: (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$ es L-integrable, entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$ (todos, salvo a lo sumo, los puntos de un L-medible de medida cero) la función

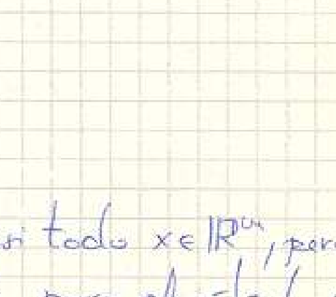
$$y \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x,y) \in \mathbb{R}$$

es L-integrable, y se verifica que

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int \Big[\int f(x,y)\,dy \Big] dx$$

OBSERVACION: La integral $\int f(x,y)\,dy$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$, pero esto no importa a la otra integral, pues no importa para el cálculo de una integral los valores que tome la función en un conjunto de medida nula.

En versión de la teoría de la medida, el teorema dice que si un conjunto (de $\mathbb{R}^2$) tiene área, "casi toda" sección tiene longitud.



Nos dice el teorema que para calcular el subyacente de una función (p.ej., de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$) basta calcular la suma de los "volúmenes" de las rodacon planos paralelos al plano YZ, secciones cuyas areas existen para casi todos los x.

EJEMPLOS DE CALCULO DE INTEGRALES DOBLES:

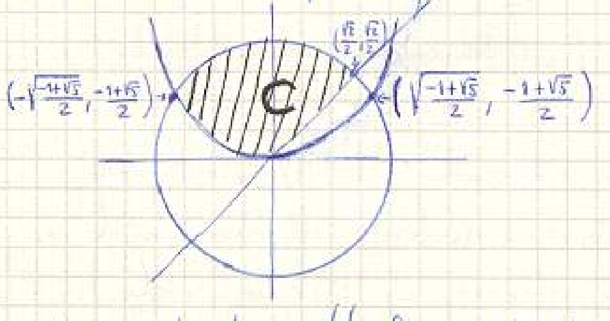
① Calcular la integral de la función

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2 \longmapsto x+y\in\mathbb{R}$$

en el conjunto C de $\mathbb{R}^2$ limitado por las curvas de ecuaciones

$$x^2+y^2=1 \quad , \quad y=x^2 \quad e \quad y=x.$$

El conjunto C es el representado en la figura siguiente:



Se trata de calcular $\iint_C f(x,y)\,dx\,dy$.

f es continua en $\mathbb{R}^2$ (es el plano $z=x+y$). Además χ_C es continua en $\mathbb{R}^2-\partial C$. Hay que calcular el volumen del "cilindro" de generatrices paralelas a OZ con fondo C y "tapa" el plano $z=x+y$.

∂C es J-medible de medida cero y $f\cdot\chi_C$ es acotada y de soporte acotado. Luego $f\cdot\chi_C$ es R-integrable ($f\cdot\chi_C\in\mathcal{R}$) y por tanto $f\in\mathcal{R}(C)$ (f es integrable en C (Riemann)).

Vamos a calcular la integral.

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy=\iint f(x,y)\cdot\chi_C(x,y)\,dx\,dy=\int\left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dx\right]dy=$$

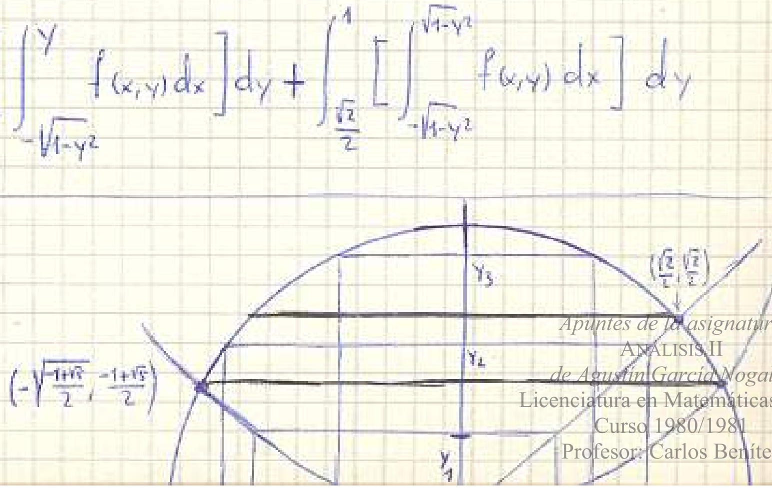
$$=\int_0^1\left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dx\right]dy=$$

$$\overset{(*)}{=}\int_0^{\frac{-1+\sqrt5}{2}}\left[\int_{-\sqrt y}^{y} f(x,y)\,dx\right]dy+\int_{\frac{-1+\sqrt5}{2}}^{\frac{\sqrt2}{2}}\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y} f(x,y)\,dx\right]dy+\int_{\frac{\sqrt2}{2}}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right]dy$$

(*) Cuando y varía entre 0 y $\frac{-1+\sqrt5}{2}$, (y_1), x varía entre $-\sqrt{y}$ e y.

Cuando y varía entre $\frac{-1+\sqrt5}{2}$ y $\frac{\sqrt2}{2}$, (y_2), x varía entre $-\sqrt{1-y^2}$ e y.

Cuando y varía entre $\frac{\sqrt2}{2}$ y 1 (y_3)



Hemos reducido, así, el cálculo de una integral doble al cálculo de dos integrales "simples" reiteradas.

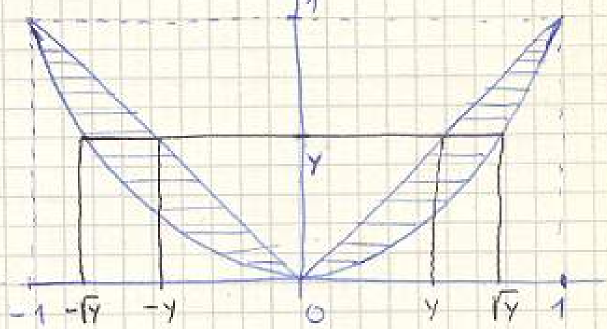
Vamos a resolver el problema de otro modo.

$$\iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \iint f(x,y)\cdot \chi_C(x,y)\,dx\,dy = \int \left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dy \right] dx = \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}^{0} \left[\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy \right] dx \; +$$

$$+ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[\int_x^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy \right] dx .$$

② Calcular la integral de la función f del ejercicio anterior en el conjunto C limitado por las curvas $y = x^2$ e $y = |x|$.



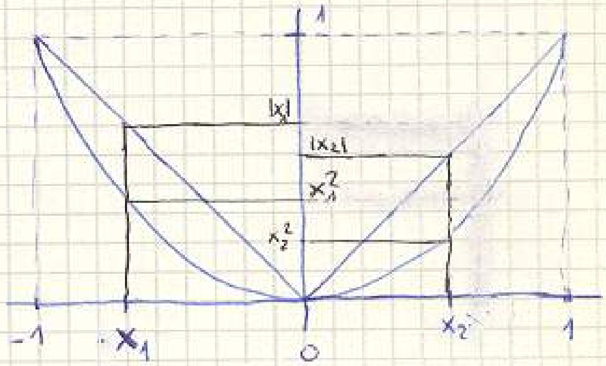
$$\iint_C f = \iint f \cdot \chi_C =$$

$$= \int \left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dx \right] dy =$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{y}}^{-y} f(x,y)\,dx + \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right] dy$$

De otra forma



$$\iint_C f = \int \left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\int f(x,y)\,\chi_C(x,y)\,dy \right] dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^{|x|} f(x,y)\,dy \right] dx = \int_{-1}^0 \left[\int_{x^2}^{-x} (x+y)\,dy \right] dx + \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} (x+y)\,dy \right] dx .$$