Tema 1º: Números Reales

1. Revisión del número racional

① Consideremos el conjunto producto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}$. Definimos en él la relación de equivalencia R del siguiente modo:

$(a,a'),(b,b')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$; $(a,a')\,R\,(b,b') \overset{def}{\Longleftrightarrow} a\cdot b'=a'b$

El par (a,a') se llama fracción y se representa tambien por a/a'.

Al conjunto cociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/R$ se le denomina conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales.

Si α es un número racional representa una clase de un número fraccionario $\alpha=[(a,a')]$.

② $\mathbb{Q}$ es un cuerpo conmutativo, totalmente ordenado.

Se define la suma en $\mathbb{Q}$ del siguiente modo:

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\xrightarrow{+}\mathbb{Q}$$
$$(\alpha,\beta)\longrightarrow\alpha+\beta=[(ab'+a'b,\,a'b')]$$

Y el producto:

$$\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\xrightarrow{\times}\mathbb{Q}$$
$$(\alpha,\beta)\longrightarrow\alpha\cdot\beta=[(a\cdot b,\,a'\cdot b')]$$

Se define además en $\mathbb{Q}$ la relación de orden $\leq$:

$(\mathbb{Q},\leq)$ $\quad \alpha\leq\beta \Leftrightarrow ab'\leq a'b$.

③ Valor absoluto de un número racional: Se define una aplicación de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$ del siguiente modo:

$$\mathbb{Q}\xrightarrow{|\,|}\mathbb{Q}$$
$$\alpha\longrightarrow|\alpha|=\sup\{\alpha,-\alpha\}$$

$|\alpha|$ se llama valor absoluto del número racional α. Cumple las siguientes propiedades:

a) $|\alpha|\geq 0$ $\qquad$ b) $|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$

c) $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ $\qquad$ d) $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$

Corolario: $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha-\beta|$

Demostr.: $|\alpha|=|\alpha-\beta+\beta|\leq|\alpha-\beta|+|\beta|$

$|\beta|=|\beta-\alpha+\alpha|\leq|\beta-\alpha|+|\alpha|=|\alpha-\beta|+|\alpha|$

Luego: $|\alpha|-|\beta|\leq|\alpha-\beta|$

$|\beta|-|\alpha|\leq|\alpha-\beta|$

Como $|\alpha|-|\beta|$ y $|\beta|-|\alpha|$ están acotados por $|\alpha-\beta|$ tambien lo estará el supremo de ambos, luego: $\big||\alpha|-|\beta|\big|\leq|\alpha-\beta|$ c.s.q.d.

2. Definición axiomática del número real.

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un cuerpo conmutativo, totalmente ordenado, por tanto verifica los axiomas:

... es un grupo abeliano: Asociativa, elemento neutro, simétrico y conmutativa

- $(\mathbb{R}, \times)$ es un grupo abeliano. $\boxed{A}$, $\boxed{N}$, $\boxed{S}$ y $\boxed{C}$
- Además cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma.
- $\mathbb{R}$ posee una relación de orden total que tiene las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. El orden es total porque dos números reales cualesquiera son comparables: $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b \vee b \leq a$.

La relación de orden es compatible con la estructura de cuerpo

a) Compatibilidad con la adición: $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

b) Compatibilidad con el producto: $x \leq y \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$, $z \geq 0$.

La relación de orden verifica la siguiente propiedad:

"Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente posee extremo superior".

Sea X una parte de $\mathbb{R}$ acotada superiormente. Entonces existe un número s llamado supremo o extremo superior que es el mínimo del conjunto de las cotas superiores, es decir, si K es una cota superior cualquiera se verifica que $s \leq K$.

Análogamente, para un conjunto acotado inferiormente, existe el extremo inferior.

3. Sucesiones de Cauchy. Suma y producto de Sucesiones de Cauchy.

Una sucesión de números racionales es una aplicación

$$X: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$n \longrightarrow X(n) = x_n$$

Cuando ponemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o bien (x_n) nos referimos a la sucesión.

Cuando ponemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o $\{x_n\}$ nos referimos a la parte de $\mathbb{Q}$ imagen de $\mathbb{N}$. Se llama rango de la sucesión.

Una sucesión (x_n) de números racionales se dice que es de Cauchy si se verifica la siguiente propiedad:

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n,m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| \leq r$$

3.1. TEOREMA: La suma de dos sucesiones de Cauchy es otra sucesión de Cauchy. Es decir, si (x_n) e (y_n) son sucesiones de Cauchy, (x_n+y_n) también lo es.

Demostr.: Si (x_n) es una sucesión de Cauchy: $\forall \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0' \in \mathbb{N} / n,m \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \frac{r}{2}$

Si (y_n) es una sucesión de Cauchy: $\forall \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0'' \in \mathbb{N} / n,m \geq n_0'' \Rightarrow |y_n - y_m| \leq r/2$

Teniendo en cuenta lo anterior y tomando $n_0 = \sup(n_0', n_0'')$ tenemos:

$n,m \geq n_0 \Rightarrow |(x_n+y_n) - (x_m+y_m)| = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \leq$
$\leq \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$. Luego (x_n+y_n) es una sucesión de Cauchy.

3.2. TEOREMA: Toda sucesión de Cauchy está acotada. Es decir, si (x_n) es una sucesión de Cauchy de números racionales entonces

$$\exists K \in \mathbb{Q}^+ \text{ tal que } |x_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostr: $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| \leq r$

Según el corolario del valor absoluto: $||x_n| - |x_m|| \leq |x_n - x_m|$

Luego: $\exists n_0 \in \mathbb{N}; n, m \geq n_0 \Rightarrow ||x_n| - |x_m|| \leq r$

Quitando el valor absoluto: $|x_n| - |x_m| \leq r \Leftrightarrow |x_n| \leq |x_m| + r$

O bien: $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| \leq |x_{n_0}| + r$

Para tomar una cota de la sucesión basta tomar:

$$K = \sup(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}| + r)$$

3.3 TEOREMA: Sean (x_n) e (y_n) sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Entonces el producto $(x_n) \cdot (y_n) = (x_n \cdot y_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

Lo cual quiere decir que:

$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n y_n - x_m y_m| \leq r$$

Demostración: $|x_n y_n - x_m y_m| = |x_n(y_n - y_m) + y_m(x_n - x_m)| \leq$
$\leq |x_n(y_n - y_m)| + |y_m(x_n - x_m)| = |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |y_m| \cdot |x_n - x_m|$

Luego $|x_n y_n - x_m y_m| \leq |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |y_m| \cdot |x_n - x_m|$

Siendo (x_n) e (y_n) sucesiones de Cauchy, las podemos acotar en valor absoluto; es decir: $\exists K'$ tal que $|x_n| \leq K', \forall n \in \mathbb{N}$; $\exists K''$ tal que $|y_m| \leq K'', \forall m \in \mathbb{N}$

Además, si $r \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \frac{r}{2K''} \in \mathbb{Q}^+$ y $\frac{r}{2K'} \in \mathbb{Q}^+$. Siendo (x_n) e (y_n) sucesiones de Cauchy, podemos poner que:

$\forall \frac{r}{2K''} \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0' \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \frac{r}{2K''}$, y

$\forall \frac{r}{2K'} \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0'' \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0'' \Rightarrow |y_n - y_m| \leq \frac{r}{2K'}$

Luego: $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 = \sup(n_0', n_0'')$ tal que $n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n y_n - x_m y_m| \leq$
$\leq |x_n| \cdot |y_n - y_m| + |y_m| \cdot |x_n - x_m| \leq K' \cdot \frac{r}{2K'} + K'' \cdot \frac{r}{2K''} = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$, c.s.q.d.

4. Conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales: Construcción.

Llamemos S al conjunto de las sucesiones de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

Desde luego $S \neq \emptyset$, pues sea x un número racional y (x_n) una sucesión tal que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = x$. (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{Q}$ pues $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| = 0 \leq r$. (Es suficiente hacer $n_0 = 1$).

Vamos a dar una relación ρ en S definida del siguiente modo:

Sean $(x_n) \in S$ e $(y_n) \in S$: $(x_n) \rho (y_n) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - y_n| \leq r$.

Esta relación cumple, evidentemente, las propiedades reflexiva ($|x_n - x_n| = 0 \leq r$) y simétrica (pues si $|x_n - y_n| \leq r \Rightarrow |y_n - x_n| \leq r$). Veamos que también cumple la transitiva: $(x_n) \rho (y_n) \wedge (y_n) \rho (z_n) \Rightarrow (x_n) \rho (z_n)$.

Demostración: $(x_n) \rho (y_n) \Leftrightarrow \forall \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0' \in \mathbb{N}; n \geq n_0' \Rightarrow |x_n - y_n| \leq \frac{r}{2}$

$(y_n) \rho (z_n) \Leftrightarrow \forall \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0'' \in \mathbb{N}; n \geq n_0'' \Rightarrow |y_n - z_n| \leq \frac{r}{2}$

$\leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$. Luego $(x_n)\ \rho\ (z_n)$.

Por tanto la relación ρ es de equivalencia.

Al conjunto cociente S/ρ de las clases de equivalencia se le denomina conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales. Un número real será una clase de equivalencia de una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

$$[(x_n)] \in \mathbb{R}.$$

Una vez que tenemos construido el conjunto vamos a construir sobre él una estructura algebraica, definiendo para ello dos leyes de composición interna: la adición y el producto:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R} \qquad\qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R} \xrightarrow{\times} \mathbb{R}$$

$$([(x_n)],[(y_n)]) \longrightarrow ([(x_n+y_n)] \qquad ([(x_n)],[(y_n)]) \longrightarrow ([(x_n\cdot y_n)])$$

4.1. TEOREMA: Propiedad Uniforme: La suma de dos números reales no depende de los representantes elegidos.

Si $(x_n)\ \rho\ (x'_n)$ y $(y_n)\ \rho\ (y'_n) \Rightarrow (x_n+y_n)\ \rho\ (x'_n+y'_n)$

Demostr.: $(x_n)\ \rho\ (x'_n) \Leftrightarrow \forall \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}^+, \exists n'_0 \in \mathbb{N} / n \geq n'_0 \Rightarrow |x_n - x'_n| \leq \frac{r}{2}$

$(y_n)\ \rho\ (y'_n) \Leftrightarrow \forall \frac{r}{2} \in \mathbb{Q}^+, \exists n''_0 \in \mathbb{N} / n \geq n''_0 \Rightarrow |y_n - y'_n| \leq \frac{r}{2}$

Luego: $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 = \sup(n'_0, n''_0), n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n+y_n) - (x'_n+y'_n)| =$

$= |(x_n - x'_n) + (y_n - y'_n)| \leq |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_n+y_n)\ \rho\ (x'_n+y'_n)$.

<u>PROPIEDADES DE $(\mathbb{R},+)$</u>

- Asociativa: $\forall x,y,z \in \mathbb{R},\ (x+y)+z = x+(y+z)$.

Demostr.: $x = [(x_n)]$ $\quad y = [(y_n)]$ $\quad z = [(z_n)]$

$x+y = [(x_n+y_n)]$; $(x+y)+z = [((x_n+y_n)+z_n)]$

siendo $x_n, y_n, z_n \in \mathbb{Q}$ verifican la propiedad asociativa, luego:

$(x+y)+z = [(x_n+(y_n+z_n))] = x+(y+z)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Conmutativa: $\forall x,y \in \mathbb{R},\ x+y = y+x$. Se demuestra análogamente.
- Elemento neutro: $\exists 0 \in \mathbb{R},\ x+0 = 0+x = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demostr.: $0 \in \mathbb{Q}$, luego la sucesión (e_n), tal que $e_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. A la clase $[(e_n)] = [(0)]$ se le llama cero de $\mathbb{R}$. Entonces: $x+0 = [(x_n)] + [(0)] = [(x_n+0)] = [(x_n)] = x$

$0+x = x+0 = x$ por la conmutatividad.

- Elemento simétrico: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists -x \in \mathbb{R},\ x+(-x) = 0$.

Demostr.: Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, veamos que también lo es $(-x_n)$

$(x_n) \in S \Rightarrow \forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n,m \geq n_0,\ |x_n - x_m| \leq r$

Si $(-x_n) \in S \Rightarrow \forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n,m \geq n_0,\ |(-x_n) - (-x_m)| \leq r$

Luego $(-x_n) \in S$.

Luego $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = [(x_n)]$, $\exists -x \in \mathbb{R}$, $-x = [(-x_n)]$ tal que

$x + (-x) = [(x_n + (-x_n))] = [(0)] = 0 \in \mathbb{R}$.

Luego $\mathbb{R}$ es un grupo aditivo.

El producto se definió de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de modo que al par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde $x \cdot y = [(x_n \cdot y_n)]$. Luego es interna en $\mathbb{R}$.

4.2 TEOREMA: Propiedad uniforme: El producto de dos números reales no depende de los representantes elegidos para efectuarlo.

Si $(x_n) \rho (x'_n) \wedge (y_n) \rho (y'_n) \Rightarrow (x_n \cdot y_n) \rho (x'_n \cdot y'_n)$.

Demostr.: Hemos de demostrar que: $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n y_n - x'_n y'_n| \leq r$

Si (x_n) es de Cauchy, $\exists K' \in \mathbb{Q}^+ / \forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leq K'$

Si (y_n) es de Cauchy, $\exists K'' \in \mathbb{Q}^+ / \forall n \in \mathbb{N}$, $|y_n| \leq K''$

Si $(x_n) \rho (x'_n) \Rightarrow \forall \frac{r}{2K''} \in \mathbb{Q}^+, \exists n'_0 \in \mathbb{N}, n \geq n'_0 \Rightarrow |x_n - x'_n| \leq \frac{r}{2K''}$

Si $(y_n) \rho (y'_n) \Rightarrow \forall \frac{r}{2K'} \in \mathbb{Q}^+, \exists n''_0 \in \mathbb{N}, n \geq n''_0 \Rightarrow |y_n - y'_n| \leq \frac{r}{2K'}$

Como: $|x_n y_n - x'_n y'_n| = |x_n(y_n - y'_n) + (x_n - x'_n) y'_n| \leq |x_n| \cdot |y_n - y'_n| + |x_n - x'_n| \cdot |y'_n| \leq$
$\leq K' \cdot \frac{r}{2K'} + \frac{r}{2K''} K'' = r$, $\forall r \in \mathbb{Q}^+$

Basta tomar un $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 = \sup(n'_0, n''_0)$, tal que $n \geq n_0$.

PROPIEDADES DEL PRODUCTO:

- Asociativa: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $\quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- Conmutativa: $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $\quad x \cdot y = y \cdot x$

Se demuestran análogamente que para la suma.

- Elemento unidad: $\exists 1 \in \mathbb{R}$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demostr.: $\exists 1 \in \mathbb{Q}$, luego $(u_n) = (1)$ es de Cauchy. A la clase $[(u_n)] = [(1)]$ se le llama elemento unidad de $\mathbb{R}$. $[(1)] = 1 \in \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot 1 = [(x_n)] \cdot [(1)] = [(x_n \cdot 1)] = [(x_n)] = x$, pues en $\mathbb{Q}$ $x_n \cdot 1 = x_n$.

Antes de demostrar la existencia del elemento inverso vamos a demostrar un teorema muy importante.

4.3 TEOREMA: Sea x un elemento de $\mathbb{R}$ distinto de cero. Entonces se puede elegir una sucesión (x_n) representante de x y un número racional $K>0$ de forma que:

① $x_n \geq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ó ② $x_n \leq -K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

En cualquier caso se verifica que $|x_n| \geq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostr.: Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Si $x = [(x_n)]$, como $x \neq 0$ se verificará que $(x_n) \not\rho (0)$. Esto significa que:

$\exists K' \in \mathbb{Q}^+ / \forall n \in \mathbb{N}, \exists n_0 \geq n$ tal que $|x_{n_0}| > K'$ [I]

Haciendo $K = \frac{K'}{2} \Rightarrow K' = 2K$

Luego $|x_{n_0}| > 2K$

Pero (x_n) es una sucesión de Cauchy, luego:

Dado $K \in \mathbb{Q}^+, \exists n'_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n'_0 \Rightarrow |x_n - x_m| \leq K$ [II]

La relación [I] se verifica $\forall n \in \mathbb{N}$; siendo $n'_0 \in \mathbb{N}$, también se verifica para él:

$\exists K' \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 \geq n'_0$ tal que $|x_{n_0}| > 2K$

Además, según [II]: si $n \geq n'_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_0}| \leq K$

Esto lo podemos hacer pues [II] se verifica para todo $m \geq n'_0$, y $n_0 \geq n'_0$.

Si $n \geq n'_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_0}| \leq K \Rightarrow x_n - x_{n_0} \leq K \wedge x_{n_0} - x_n \leq K$

Luego: $x_{n_0} - K \leq x_n \leq x_{n_0} + K$ [III]

Ahora pueden suceder dos casos:

a) $x_{n_0} \geq 0 \Rightarrow |x_{n_0}| = x_{n_0} > 2K$ [IV]

Como $x_n \geq x_{n_0} - K$ según [III] y $x_{n_0} > 2K$ según [IV] podemos poner:

$n \geq n'_0 \Rightarrow x_n \geq 2K - K = K$

Luego a partir del término n'_0 se verifica la condición ①: $x_n \geq K$.

En los términos anteriores no sabemos si se verificará, pero se pueden reemplazar desde x_1 hasta $x_{n'_0-1}$ por el valor de la constante K y la condición se verifica para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión obtenida: $K, K, \ldots, K, x_{n'_0}, x_{n'_0+1}, \ldots$ es equivalente a (x_n) pues a partir del término n'_0, los términos de ambas sucesiones son iguales.

b) $x_{n_0} < 0 \Rightarrow n_0 \geq n'_0$, $|x_{n_0}| = -x_{n_0} > 2K \Rightarrow x_{n_0} < -2K$

Según [III]: $x_n \leq x_{n_0} + K$

Luego: $x_n < -2K + K \Leftrightarrow x_n < -K$, para $n \geq n'_0$

Luego a partir del natural n'_0 se verifica la condición ②: $x_n \leq -K$

Los términos anteriores los haremos iguales a $-K$ y se forma la sucesión:

$-K, -K, \ldots, -K, x_{n'_0}, x_{n'_0+1}, \ldots$

que es equivalente a (x_n).

Luego el teorema queda demostrado.

4.4. TEOREMA: Existencia del elemento inverso: Si x es un número real, $x \neq 0$, entonces existe un $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$

Demostr.: Sea $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. x es la clase de una sucesión (x_n) de Cauchy, $x = [(x_n)]$.

Además, por el teorema anterior, $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \geq K$.

Los x_n pertenecen a $\mathbb{Q}$, y como $x_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, existe $x_n^{-1} = \frac{1}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces podemos construir la sucesión $\left(\frac{1}{x_n}\right)$. Veamos que es de Cauchy:

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_m}\right| = \left|\frac{x_m-x_n}{x_n\cdot x_m}\right| = \frac{|x_m-x_n|}{|x_n|\cdot|x_m|}$$

Pero $|x_n|$ y $|x_m|$ están acotados inferiormente por K, luego:

$$\left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_m}\right| = \frac{|x_m-x_n|}{|x_n|\,|x_m|} \leq \frac{|x_m-x_n|}{K^2}$$

Pero además (x_n) es una sucesión de Cauchy, luego:

$\forall r\in\mathbb{Q}^+, \exists n_0\in\mathbb{N} / n,m\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x_m|=|x_m-x_n|\leq r\cdot K^2$

Luego para $n,m\geq n_0$, podemos acotar superiormente $|x_m-x_n|$ por $r\cdot K^2$:

Es decir: $\forall r\in\mathbb{Q}^+, \exists n_0\in\mathbb{N} / n,m\geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_m}\right|\leq\frac{r\cdot K^2}{K^2}=r$

Por tanto $\exists\, x^{-1}=[(\frac{1}{x_n})]$, $\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$, tal que:

$x\cdot x^{-1}=[(x_n)]\,[(\frac{1}{x_n})]=[(x_n\frac{1}{x_n})]=[(1)]=1\in\mathbb{R}$.

Por todo esto, $(\mathbb{R},\times)$ es un grupo abeliano.

Además se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma:

– $\boxed{D}$ $(x+y)\cdot z = x\cdot z+y\cdot z$

Demostr.: $x=[(x_n)]$ $y=[(y_n)]$ $z=[(z_n)]$

$x+y=[(x_n+y_n)]$, $(x+y)\cdot z=[(x_n+y_n)]\cdot[(z_n)]=[((x_n+y_n)\cdot z_n)]$

Pero x_n, y_n y z_n son elementos de $\mathbb{Q}$ y verifican la distributividad, luego:

$(x+y)\cdot z=[((x_n+y_n)\cdot z_n)]=[(x_n\cdot z_n+y_n\cdot z_n)]=[(x_n\cdot z_n)]+[(y_n\cdot z_n)]=xz+yz$

Por todo ello $(\mathbb{R},+,\times)$ tiene estructura de cuerpo conmutativo.

<u>Proposición</u> Como todo cuerpo, $\mathbb{R}$ no tiene divisores de cero.

$$x\cdot y=0 \iff (x=0 \vee y=0)$$

Demostr.: Si $x\neq 0$, $\exists (x_n)$ tal que $x=[(x_n)]$, y $\exists K\in\mathbb{Q}^+$ tal que $|x_n|\geq K, \forall n\in\mathbb{N}$, según el teorema 4.3. Si $y\neq 0$, $\exists (y_n)$ tal que $y=[(y_n)]$ y $\exists K'\in\mathbb{Q}^+$ tal que $|y_n|\geq K', \forall n\in\mathbb{N}$

Luego $x\cdot y=[(x_n\cdot y_n)]\neq 0=[(0)]$

es decir $(x_n\cdot y_n)\not\sim(0)$, pues $\exists K\cdot K'\in\mathbb{Q}^+$ tal que $|x_n y_n-0|\geq KK', \forall n\in\mathbb{N}$.

5. Orden en $\mathbb{R}$

<u>DEFINICION</u>: Sean $x,y\in\mathbb{R}$. Se dice que $x\leq y$ si y $y-x$ posee una sucesión representante (r_n) tal que $r_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

5.1. <u>TEOREMA</u>: La relación $\leq$ así definida es una relación de orden total en $\mathbb{R}$.

Demostr.: – Reflexiva: $\forall x\in\mathbb{R}$, $x\leq x$, pues $x-x=[(x_n-x_n)]=[(0)]=0$

Si llamamos (r_n) a (x_n-x_n) se verifica que $r_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

– Transitiva: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, $x\leq y \wedge y\leq z \Rightarrow x\leq z$.

Hemos de encontrar una sucesión representante de $z-x$ en la que todos los

$z-x=(z-y)+(y-x)$

Siendo $y\leq z \Rightarrow z-y=[(s_n)]$, $s_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Siendo $x\leq y \Rightarrow y-x=[(t_n)]$, $t_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Luego $z-x=[(s_n+t_n)]=[(r_n)]$, donde $r_n=s_n+t_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

- Antisimétrica: $x\leq y \wedge y\leq x \Rightarrow x=y$.

$x\leq y \Rightarrow \exists (r_n)$, $r_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, tal que $y-x=[(r_n)]$

$y\leq x \Rightarrow \exists (s_n)$, $s_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, tal que $x-y=[(s_n)]$

Si $x-y=[(s_n)] \Rightarrow y-x=[(-s_n)]=[(r_n)]$

Es decir $(r_n)\,\rho\,(-s_n) \Leftrightarrow \forall r\in\mathbb{Q}^+, \exists n_0\in\mathbb{N}, n\geq n_0 \Rightarrow |r_n-(-s_n)|=|r_n+s_n|\leq r$

Como $r_n\geq 0$ y $s_n\geq 0$, será $r_n+s_n\geq 0 \Rightarrow |r_n+s_n|\geq |r_n| \Rightarrow$

$\Rightarrow |r_n|\leq r \Rightarrow (r_n)\,\rho\,(0) \Rightarrow [(r_n)]=[(0)]=0$

Luego $y-x=0 \Rightarrow x=y$.

- El orden es total: $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $x\leq y \vee y\leq x$.

Si $x=y$, la demostración es trivial.

Si $x\neq y$, el número $x-y$ es distinto de cero, luego, según el teorema 4.3, existe una sucesión (r_n) representante de $x-y$ con $r_n>0, \forall n\in\mathbb{N}$, ó $r_n<0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. En el primer caso es $y\leq x$ y en el segundo $x\leq y$.

5.2. TEOREMA: La relación de orden $\leq$ es compatible con la estructura de cuerpo.

a) $x\leq y \Rightarrow x+z\leq y+z$, $\forall z\in\mathbb{R}$

b) $x\leq y \Rightarrow x\cdot z\leq y\cdot z$, $\forall z\in\mathbb{R}^+$

Demostr.: a) Hay que demostrar que $(y+z)-(x+z)$ tiene una sucesión representante (r_n), tal que $r_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Pero $(y+z)-(x+z)=y-x=[(r_n)]$ tal que $r_n\geq 0$, pues $x\leq y$.

b) $y\cdot z-x\cdot z=(y-x)\cdot z$. Pero $y-x=[(r_n)]$, $r_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, pues $x\leq y$.

$z=[(s_n)]$, $s_n\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pues $z\geq 0$.

Luego $(y-x)z=[(r_n s_n)]$, $r_n s_n\geq 0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, luego $xz\leq y z$

6. Los números reales como ampliación de los racionales

Consideremos la aplicación f definida del siguiente modo:

$$f:\ \mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longrightarrow f(x)=[(x)]$$

Es decir, que cada número racional se transforma por f en la clase de la sucesión constante (x). Veamos algunas propiedades interesantes de f:

- f es inyectiva: $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$, es decir, $[(x)]=[(y)] \Rightarrow x=y$.

Demostr.: Si $[(x)]=[(y)] \Rightarrow (x)\,\rho\,(y) \Rightarrow \forall r\in\mathbb{Q}^+$, $|x-y|\leq r$.

Si $x\neq y \Rightarrow x-y\neq 0 \Rightarrow |x-y|>0$

Pero $|x-y|$ y 0 son números racionales, luego existe, por ser $\mathbb{Q}$ denso, un r_0

$\exists r_0 \in \mathbb{Q}^+ / 0 < r_0 < |x-y|$, por tanto (x) e (y) no estarían relacionadas, contra la hipótesis. Debe ser, entonces, $x = y$.

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$, es decir: $[(x+y)] = [(x)] + [(y)]$, lo cual es cierto por definición de suma en $\mathbb{R}$.
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, es decir: $[(x \cdot y)] = [(x)] \cdot [(y)]$.
- f conserva el orden: $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ (*)

es decir $x < y \Rightarrow [(x)] < [(y)]$

$[(x)] < [(y)] \Leftrightarrow [(y)] - [(x)]$ admite una sucesión representante (r_n), $r_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Pero $[(y)] - [(x)] = [(y-x)]$ que sí admite como representante (r_n), $r_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, pues $x < y$ por hipótesis.

Si llamamos $\mathbb{R}^0$ a $f(\mathbb{Q})$ tendremos una biyección de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^0$, quedando los números racionales sumergidos en los números reales.

7. Propiedad arquimediana en $\mathbb{R}$

Sea y un número real y x un número real positivo $(x > 0)$

Luego $\frac{y}{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y}{x} = [(s_n)]$ donde (s_n) es una sucesión de Cauchy.

Luego (s_n) está acotada, es decir: $\exists K \in \mathbb{Q}^+$ tal que $|s_n| \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Y también: $\exists K \in \mathbb{Q}^+$ tal que $s_n \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Luego: $\exists K \in \mathbb{Q}^+$, $[(s_n)] \leq [(K)]$

Por tanto $\frac{y}{x} \leq [(K)]$

Aplicando la propiedad arquimediana en $\mathbb{Q}$ a los números racionales 1 y K:

$\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $K < 1 \cdot n = n \Rightarrow [(K)] < [(n)]$

Luego $\frac{y}{x} < [(n)] \Rightarrow y < [(n)] \cdot x$

Pero $[(n)] = f(n)$ que convendremos en notar simplemente por n:

Luego $\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N} \ / \ y < n \cdot x$

7.1 Corolario: Si $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_0$, se verifica que $\frac{1}{2^n} < x$.

Demostr.: Hay que demostrar que $1 < 2^n x$, para $n \geq n_0$.

Aplicando la propiedad arquimediana a 1 y a x, $x > 0$:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n_0 x$. Si $n \geq n_0 \Rightarrow 1 < n x$

Pero $n < 2^n$, luego $1 < 2^n x \Rightarrow \frac{1}{2^n} < x$, $n \geq n_0$.

8. Valor absoluto de un número real

Se define el valor absoluto de un número real como una aplicación definida del siguiente modo:

$|\;|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\quad x \longrightarrow |\;|(x) = |x| = \sup(x, -x)$

Evidentemente, si $x > 0$, $|x| = x$ y si $x < 0$, $|x| = -x$

El valor absoluto de un número real cumple las siguientes propiedades:

① $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$, pues uno de los números x y $-x$ es positivo o nulo. Luego $|x| = \sup(x, -x)$ es positivo o nulo.

② $|x| = 0 \iff x = 0$, pues $\sup(x, -x) = 0 \iff x = 0$.

③ $|x+y| \leq |x| + |y|$

Demostr.: Veamos previamente que $|x| \leq z \iff -z \leq x \leq z$

$|x| \leq z \iff x \leq z \wedge -x \leq z \iff x \leq z \wedge x \geq -z \iff -z \leq x \leq z$

$x \leq |x| \Rightarrow x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|$, pues $y \leq |y|$, luego $x + y \leq |x| + |y|$

$x \leq |x| \wedge y \leq |y| \Rightarrow -|x| \leq |x| \wedge -|y| \leq |y| \Rightarrow -(|x|+|y|) \leq |x| + |y|$

Luego $x + y \leq |x| + |y| \wedge -(x+y) \leq |x| + |y| \Rightarrow |x+y| \leq |x| + |y|$

④ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Demostr.: Hay cuatro casos:

a) $x \geq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x = |x| \wedge y = |y| \Rightarrow |x \cdot y| = x \cdot y = |x| \cdot |y|$, pues $x \cdot y \geq 0$

b) $x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0 \Rightarrow |x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y) = |x| \cdot |y|$, pues $-x = |x|$, $-y = |y|$ ya que $x \leq 0$ e $y \leq 0$.

c) $x \leq 0 \wedge y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \leq 0 \Rightarrow |x \cdot y| = -x \cdot y = (-x) \cdot y = |x| \cdot |y|$.

d) $x \geq 0 \wedge y \leq 0$ (es análogo al c)).

8.1 Teorema: Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Entonces si (x_n) es una sucesión representativa de x se verifica que existe un n_0 natural tal que $x_n > 0$, $\forall n \geq n_0$.

Demostr.: $x > 0 \Rightarrow x \neq 0$ entonces, por Teorema 4.3, existe una sucesión (y_n) tal que $[(y_n)] = x$ y existe un número K racional positivo de forma que:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq K$ ó $y_n \leq -K$

La segunda alternativa no se puede dar pues entonces sería $x \leq 0$, ya que $0 - x = -x = [(-y_n)]$, pero $y_n \leq -K < 0 \Rightarrow y_n < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -y_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, luego $-x > 0 \Rightarrow x < 0$ encontra de que $x > 0$

Luego $y_n \geq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (1)

Por tanto $x = [(x_n)] = [(y_n)] \Rightarrow (x_n) \,\rho\, (y_n)$

lo que quiere decir que: Dado $K/2$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - y_n| \leq K/2$ (2)

Pero $x_n = (x_n - y_n) + y_n \overset{(1)}{\geq} x_n - y_n + K$

Según (2): $y_n - x_n \leq K/2 \Rightarrow x_n - y_n \geq -K/2$, $n \geq n_0$

Luego: si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq (x_n - y_n) + K \geq -\frac{K}{2} + K = \frac{K}{2} > 0$ c.s.q.d.

8.2. Corolario: Sean x e y números reales y (x_n), (y_n) sucesiones representantes de x e y, respectivamente. Si existe $n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$, para $n \geq n'_0$ entonces $x \leq y$.

Demostr.: Supongamos que no se verifica que $x \leq y$, luego será $x > y$. Es decir, $x - y > 0$. Tomando $x - y = [(x_n - y_n)] > 0$ ~~de~~ de aquí se deduce que a partir de un natural n_0, $x_n > y_n$. Pero por hipótesis, a partir del natural n'_0 se verifica $x_n \leq y_n$, luego a partir de $\sup(n_0, n'_0)$ se verifica que $x_n > y_n$ y que $x_n \leq y_n$, luego hemos llegado a una contradicción. Entonces será $x \leq y$, csqd.

9. TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ORDEN EN $\mathbb{R}$

a) Todo conjunto de números reales acotado superiormente posee extremo superior.

b) Todo conjunto acotado inferiormente de números reales posee extremo inferior.

DEMOSTRACION: a) Sea $M \subset \mathbb{R}$ tal que M está acotado superiormente, es decir
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq \lambda$, $\forall x \in M$.

Por el axioma de Arquímedes, aplicado a 1 y a λ, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda < 1 \cdot n_0 = n_0$

Luego si $K = n_0$ se verifica: $\forall x \in M$, $x < K$.

Además existe un entero H que es ~~menor~~ que es menor ~~de~~ que un punto de M, pues si $x \in M$, $-x \in \mathbb{R}$. Por la propiedad ~~ar~~ arquimediana en $\mathbb{R}$: $-x < 1 \cdot m_0$, $m_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow -m_0 < x$. Si $H = -m_0$ se verifica que $H < x$, para algún $x \in M$.

Luego $H < K$.

Para todo número natural n se puede formar una sucesión finita de la forma:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H < H + \frac{1}{2^n} < \dots < H + \frac{i}{2^n} < \dots < K \qquad (I)$$

Pues si $H \in \mathbb{Z}$ y $K \in \mathbb{Z}$ hay un número finito de enteros. A medida que aumenta el valor de n, la sucesión tiene más términos.

Al menos un término de la sucesión (I) es cota superior de M, pues K lo es; puede haber más cotas.

Sea x_n un elemento de la sucesión que sea cota de M y que sea la menor. La menor cota existe pues se trata de un conjunto finito. Luego el término anterior $x_n - \frac{1}{2^n}$ ya no es cota de M.

Si tomamos un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq n$, entonces $x_m \leq x_n$, pues ~~por~~ la sucesión en m tendrá todos los términos de (I) y algunos más intercalados entre los anteriores. x_m es cota superior, luego $x_n - \frac{1}{2^n} < x_m$ pues $x_n - \frac{1}{2^n}$ no es cota de M.

En definitiva queda $x_n - \frac{1}{2^n} < x_m \leq x_n$, $m \geq n$. (II)

Consideremos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$, pues $H \in \mathbb{Z}$ y $H + \frac{i}{2^n} \in \mathbb{Q}$

Veamos que (x_n) es una sucesión de Cauchy:

y también $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 ; n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < r$ (según el COROLARIO de la pregunta 7).

Luego: $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 / m \geq n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{1}{2^n} < r$

Luego (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{Q}$

Por tanto la clase de la sucesión (x_n) es un número real que llamaremos x_0, luego $x_0 = [(x_n)] \in \mathbb{R}$

Comprobemos ahora que x_0 es cota superior de M, es decir que $x_n - \frac{1}{2^n} \leq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$

Para todo natural n se puede construir la sucesión constante $(x_n - \frac{1}{2^n})$

Pero según (2) $x_n - \frac{1}{2^n} \leq x_m, \forall m \geq n$

Pero la sucesión (x_m) es un representante de x_0. Luego según el corolario 8.2.

$$x_n - \frac{1}{2^n} \leq x_0 \qquad (\mathrm{III})$$

Luego x_0 es cota superior de M, pues si x_0 no fuera cota superior de M $\exists y \in M$ tal que $x_0 < y \Rightarrow y - x_0 > 0$, y según el corolario 7.1 $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^p} < y - x_0$, y según (III) $x_p - \frac{1}{2^p} \leq x_0$. Sumando estas desigualdades se obtiene que $x_p < y$, lo que es una contradicción pues, por hipótesis, $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n es cota superior de M, luego x_p es cota superior de M y será $x_p > y$. Por tanto, x_0 es cota superior de M.

Veamos por último que x_0 es extremo superior, es decir, que es la menor de las cotas superiores. Supongamos que existe una cota superior x'_0 tal que $x'_0 < x_0$. Luego $x_0 - x'_0 > 0$ y por tanto $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^p} < x_0 - x'_0$ (IV)

Como $x_p - \frac{1}{2^p}$ no es cota superior será: $x_p - \frac{1}{2^p} < x'_0$ (V).

Sumando las desigualdades (IV) y (V) se obtiene que $x_p < x_0$

Lo cual es una contradicción pues $x_p = [(x_p)]$ y (x_p) es una sucesión constante, luego a partir de un $n'_0 \geq p$, $n \geq n'_0 \Rightarrow [\{x_n\}] \leq [\{x_p\}] \Rightarrow x_0 \leq x_p$

Este último razonamiento se basa en (II) y en el corolario 8.2.

Luego no existe x'_0 cota superior tal que $x'_0 < x_0$. Es decir, x_0 es la menor de las cotas superiores, es decir x_0 es extremo superior, csqd.

b) Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Es decir:

$\exists K_0 \in \mathbb{R} / K_0 \leq x, \forall x \in M$. Luego $-x \leq -K_0, \forall x \in M$.

Llamemos $-M$ al conjunto $\{-x / x \in M\}$. Luego $-M$ está acotado superiormente, luego $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 = \sup -M$. Por tanto $-x_0 = \inf M$, pues si $x_0 = \sup -M \Rightarrow -x \leq x_0 \Rightarrow -x_0 \leq x, \forall x \in M$ luego $-x_0$ es cota inferior.

Además, si existiese y_0 cota inferior tal que $-x_0 < y_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow -y_0 < x_0$, luego $-y_0$ sería una cota superior menor que x_0 para $-M$ lo cual es absurdo. Luego $-x_0 = \inf M$.

10. Principio de los intervalos encajados

Sean a y b dos números reales de modo que $a \leq b$. Se llama intervalo cerrado de extremos a y b al conjunto:

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\}$$

Se llama intervalo **abierto** de extremos a y b al conjunto:

$$]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$$

Los intervalos semiabiertos son:

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\} \qquad]a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$

Estos intervalos son conjuntos acotados. Hay intervalos que no son acotados:

$$[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\} \qquad]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}.$$

$\mathbb{R}$ se suele representar por el intervalo $]-\infty,+\infty[$.

Una sucesión de intervalos $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ se dice un encaje de intervalos o una sucesión de intervalos encajados si: $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ Esta inclusión no es estricta.

10.1. TEOREMA: Sea (I_n) un encaje de intervalos cerrados y acotados en $\mathbb{R}$. Entonces se verifica que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$.

Demostración: $I_1 = [a_1,b_1]$, $I_2 = [a_2,b_2], \dots, I_n = [a_n,b_n], \dots$

Luego: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

$\dots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_1$

Se verifica $\forall m,n \in \mathbb{N}$ que $a_n \leq b_m$, pues:

- $n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \Rightarrow a_n \leq b_m$
- $m \leq n \Rightarrow a_n \leq b_n \leq b_m \Rightarrow a_n \leq b_m$

Luego en cualquier caso $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_m$.

Consideremos los conjuntos $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$

El conjunto A está acotado superiormente, pues $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_1$

El conjunto B está acotado inferiormente, pues $\forall m \in \mathbb{N}$, $a_1 \leq b_m$.

Luego $\exists\, a = \sup A$ y $\exists\, b = \inf B$.

Se verifica que $a \leq b$, pues: $\forall m \in \mathbb{N}$, $a \leq b_m$, luego a es cota inferior de B; siendo $b = \inf B$, será: $a \leq b$

Se puede, por tanto, considerar el intervalo $[a,b]$. Veamos que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a,b]$

Sea $x \in [a,b]$, luego $a \leq x \leq b$, pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a \wedge b \leq b_n$, luego:

$a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $x \in [a_n,b_n]$, luego $[a,b] \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Sea $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in I_n$, luego $a_n \leq x \leq b_n$, es decir, x es cota superior de A y cota inferior de B, luego $a \leq x \wedge b \geq x \Rightarrow x \in [a,b]$

Luego: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset [a,b]$. Por tanto $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a,b] \neq \emptyset$ c.q.d.

Si no se dan alguna de las hipótesis el teorema no es cierto. Ejemplos:

- Si los intervalos no son cerrados, el teorema no se cumple. Sea la sucesión de intervalos encajados $(I_n)=\{]0,\frac{1}{n}]\,/\,n\in\mathbb{N}\}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\emptyset$ pues si $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow 0<x\leq\frac{1}{n},\ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow nx\leq 1, \forall n\in\mathbb{N}$.

Pero $1\in\mathbb{R}$ y $x>0$, luego $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$, $1<xn_0$, lo cual es una contradicción. Luego $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\emptyset$.

- Si los intervalos no son acotados, el teorema tampoco se cumple. Sea la sucesión de intervalos encajados (I_n), donde $I_n=[n,+\infty[$, $n\in\mathbb{N}$.

Si $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow n\leq x, \forall n\in\mathbb{N}$, lo cual no es cierto, pues cualquier número real se puede mayorar por un natural, luego $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n=\emptyset$.

11. Observaciones en $\mathbb{Q}$

① No existe ningún número racional x tal que $x^2=2$.

Supongamos que: $\exists x\in\mathbb{Q}\,/\,x^2=2$. Luego $x=\frac{p}{q}$, $p,q\in\mathbb{Z}$. Podemos considerar que p y q son primos entre sí, es decir, que p/q es irreducible. Luego: $x^2=2\Rightarrow\frac{p^2}{q^2}=2\Rightarrow p^2=2q^2$, luego p^2 es par; entonces p también es par, pues si p fuese impar, $p=2K+1\Rightarrow p^2=4K^2+4K+1=2(2K^2+2K)+1=2n+1$ $n\in\mathbb{Z}$, es decir, p^2 sería impar. Luego si p^2 es par, p es par, es decir, $p=2K$. Luego: $(2K)^2=2q^2\Rightarrow 4K^2=2q^2\Rightarrow q^2=2K^2$, luego q^2 es par, y, por tanto, q es par, contra la hipótesis de que p y q eran primos entre sí. Luego no existe ningún x de $\mathbb{Q}$, tal que $x^2=2$.

② En $\mathbb{Q}$ hay conjuntos acotados que no tienen supremo. Hasta ahora $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ tenían las mismas propiedades. Es el teorema fundamental del orden lo que va a diferenciar un cuerpo de otro.

Sea el conjunto $M=\{r\in\mathbb{Q}\,/\,r^2<2\}$.

M está acotado, pues $\forall r\in M$, $r^2<2<4\Rightarrow r<2$. Veamos que M no tiene supremo en $\mathbb{Q}$. Supongamos que M tiene supremo. Sea $\mu=\sup M$, donde $\mu\in\mathbb{Q}$. Pueden darse dos casos: ① $\mu\in M$ ② $\mu\notin M$, es decir, $\mu\in\mathbb{Q}-M$

① Si $\mu\in M$, se verifica que $\mu^2<2$. Podemos considerar el número positivo $\frac{2-\mu^2}{2\mu+1}$; este número existe pues si $2\mu+1=0\Rightarrow\mu=-\frac{1}{2}$, pero μ no puede ser $-\frac{1}{2}$ pues $\mu=\sup M$ y $1\in M$ $(1^2<2)$, luego $1<\mu$. Podemos elegir un número racional positivo h menor que $\frac{2-\mu^2}{2\mu+1}$ y que 1 a la vez, el cual existe por las propiedades del orden en $\mathbb{Q}$. Es decir: $0<h<1$ y $0<h<\frac{2-\mu^2}{2\mu+1}\Rightarrow 2-\mu^2>h(2\mu+1)$

Luego $(\mu+h)^2=\mu^2+h^2+2\mu h=\mu^2+h(2\mu+h)<\mu^2+h(2\mu+1)<\mu^2+2-\mu^2=2$, es decir $(\mu+h)^2<2\Rightarrow\mu+h\in M$. Siendo $\mu<\mu+h$, pues $h>0$, no puede ser μ

cota superior de M, en contra de la hipótesis. Luego $\mu \notin M$. Entonces:

② $\mu \in \mathbb{Q}-M \Rightarrow \mu^2 \geq 2$. Pero si $\mu \in \mathbb{Q}$, $\mu^2 \neq 2$, luego $\mu^2 > 2$.

Podemos considerar el número racional positivo $\frac{\mu^2-2}{2\mu}$, el cual existe pues $\mu > 1$. Consideremos el número h de forma que $0<h<\frac{\mu^2-2}{2\mu} \Rightarrow 2\mu h < \mu^2-2$

Luego $(\mu-h)^2 = \mu^2+h^2-2\mu h > \mu^2+h^2+2-\mu^2 = h^2+2 > 2 \Rightarrow (\mu-h)^2 > 2 > r^2, \forall r \in M \Rightarrow$

$\Rightarrow \mu - h > r, \forall r \in M$, luego $\mu-h$ es cota superior de M. Como $\mu-h<\mu$, μ no puede ser extremo superior de M contra la hipotesis. Luego $\mu \notin \mathbb{Q}-M$. Es decir, M no tiene supremo en $\mathbb{Q}$

12. Números irracionales

Veamos que existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x_0^2 = 2$.

Consideremos el conjunto $M' = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 2\}$

M' está acotado superiormente, pues si $x^2 \leq 2 < 4 \Rightarrow x < 2$, $\forall x \in M'$.

Luego M' posee extremo superior, es decir, $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ talque $x_0 = \sup M'$. Probaremos que la solución de la ecuación $x^2=2$ es precisamente x_0.

Supongamos que $x_0^2 \neq 2$. Entonces será: ① $x_0^2 < 2$ V ② $x_0^2 > 2$.

① Si $x_0^2 < 2$ podemos considerar el número positivo $\frac{2-x_0^2}{2x_0+1}$, que existe ya que $x_0 \neq -\frac{1}{2}$, pues $x_0 > 1$ ya que $1 \in M'$ y x_0 es el supremo de M'.

Aplicando la propiedad arquimediana a los números 1 y $\frac{2-x_0^2}{2x_0+1}$ se deduce que $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n \cdot \frac{2-x_0^2}{2x_0+1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \frac{2-x_0^2}{2x_0+1}$

Llamando h al número racional positivo $1/n$ se tiene que $h<1$ y $h < \frac{2-x_0^2}{2x_0+1}$ (1)

Consideremos entonces el número $(x_0+h)^2$.

$(x_0+h)^2 = x_0^2+h^2+2hx_0 = x_0^2+h(2x_0+h) < x_0^2+h(2x_0+1) \overset{(1)}{<} x_0^2+2-x_0^2 = 2$

Luego: $(x_0+h)^2 < 2 \Rightarrow x_0+h \in M'$. Siendo $h>0$, $x_0 < x_0+h$, luego existe un número de M' mayor que x_0 contra la hipótesis de que x_0 era cota

② Si $x_0^2 > 2$ podemos considerar el número positivo $\frac{x_0^2-2}{2x_0}$, pues $x_0 \neq 0$.

Análogamente se puede encontrar un h tal que $0 < h < \frac{x_0^2-2}{2x_0} \Rightarrow 2hx_0 < x_0^2-2$.

Fijémonos en $(x_0-h)^2$:

$(x_0-h)^2 = x_0^2+h^2-2x_0h > x_0^2+h^2+2-x_0^2 = h^2+2 > 2$, pues $h^2>0$ ya que $h \neq 0$.

Siendo $h>0$, $x_0-h < x_0$, luego x_0-h es una cota de M' menor que x_0, en contradicción con que x_0 es el supremo de M'.

Luego debe verificarse que $x_0^2 = 2$ csqd.

Como $x_0 \notin \mathbb{Q} \wedge x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Al conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ se le llama conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales.

13. Densidad del orden en $\mathbb{R}$

13.1. TEOREMA: Si $y \in \mathbb{R}$ entonces existe un entero p tal que $p-1 \leq y < p$.

Demostración: Sea x un número real estrictamente positivo. Por la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$. Podemos asegurar asimismo la existencia de un entero m tal que $mx < y$. En efecto, consideremos el número real $y/x = [(s_n)]$, donde (s_n) es de Cauchy, luego (s_n) está acotada inferiormente, es decir, $\exists K \in \mathbb{Q}^+$ tal que $-K \leq s_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por la propiedad arquimediana en $\mathbb{Q}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K < n_0 \Rightarrow -n_0 < -K$. Haciendo $m = -n_0$ resulta que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m < -K \leq s_n$. Luego $\frac{y}{x} > [(m)] = m \Rightarrow y > mx$.

Luego: $mx < y < nx$. Si hacemos $x = 1$, será: $m < y < n$, $m, n \in \mathbb{Z}$

Luego tenemos una sucesión finita: $m < m+1 < m+2 < \ldots < n-1 < n$ entre dos términos consecutivos de la cual se encuentra y. Llamemos $p-1$ al menor y p al mayor: $p-1 \leq y < p$.

13.2. TEOREMA: Sean x e y números reales tales que $x < y$. Entonces existe un $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x < r < y$, y existe un $\xi \in \mathbb{I}$ tal que $x < \xi < y$.

Demostr.: • $x < y \Rightarrow y - x > 0$. Por la propiedad arquimediana $\exists q \in \mathbb{N}$ tal que $1 < (y-x)q$

Luego $\frac{1}{q} < y - x$. Consideremos el número real qx; según el teorema anterior $\exists p \in \mathbb{Z}$ tal que $p-1 \leq qx < p \Rightarrow \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \leq x < \frac{p}{q}$

Luego: $\frac{p}{q} \leq x + \frac{1}{q} \quad \wedge \quad x < \frac{p}{q}$

Luego $\frac{p}{q} \leq x + \frac{1}{q} < x + y - x = y \Rightarrow \frac{p}{q} < y \;\wedge\; x < \frac{p}{q} \Rightarrow x < \frac{p}{q} < y$, $\frac{p}{q} = r \in \mathbb{Q}$

• Hemos probado que $\exists r \in \mathbb{Q}^*$ tal que $x < r < y$. Entre x y r habrá análogamente otro racional s, luego $x < s < r < y$. Trataremos de hallar un $\xi \in \mathbb{I}$ tal que $s < \xi < r$. Consideremos el real x_0 tal que $x_0^2 = 2$. Entonces se verifica que $x_0 < 2$, pues si $x_0 \geq 2 \Rightarrow x_0^2 \geq 4 > 2$ contra lo supuesto. Consideremos el número

$y_0 = \frac{x_0}{2}(r-s) \Rightarrow 2y_0 = x_0(r-s) < 2(r-s) \Rightarrow y_0 < r - s \Rightarrow y_0 + s < r$

Se ve que $s < y_0 + s < r$, pues y_0 es positivo ya que $x_0 > 0$ y $(r-s) > 0$.

Llamemos $\xi = y_0 + s$. $y_0 \in \mathbb{I}$, pues si $y_0 \in \mathbb{Q}$ sería $x_0 = \frac{2y_0}{r-s} \in \mathbb{Q}$ en contra de que $x_0 \in \mathbb{I}$. Luego $y_0 \in \mathbb{I} \Rightarrow \xi \in \mathbb{I}$, pues si $\xi \in \mathbb{Q}$, $\xi - s = y_0$ pertenecería a $\mathbb{Q}$, ya que $s \in \mathbb{Q}$.

Luego entre cada dos números reales hay ~~al menos~~ un número racional y otro irracional, y, por tanto, infinitos.