TEMA 2º: TOPOLOGÍA DE LA RECTA REAL

1. Entornos, conjuntos abiertos y cerrados

Consideremos la recta real y un punto x de ella. Sea h un número real positivo. El intervalo $]x-h, x+h[$ lo denotaremos por $B(x,h)$ y el intervalo cerrado $[x-h, x+h]$ lo denotaremos por $B^*(x,h)$.

DEFINICIÓN: Sea x un punto de la recta real. Al punto x se le asocia una familia $\mathcal{F}(x)$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Diremos que un subconjunto $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}$ pertenece a $\mathcal{F}(x)$ si existe un $h>0$ tal que $B(x,h)\subset \mathcal{U}$. A la familia $\mathcal{F}(x)$ se le llama familia de entornos del punto x en $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{U}\in\mathcal{F}(x) \overset{def}{\iff} \exists h>0 \,/\, B(x,h)\subset\mathcal{U}.$$

1.1. TEOREMA: Para los elementos de la familia $\mathcal{F}(x)$ se verifican las siguientes propiedades:

① Si $\mathcal{U}\in\mathcal{F}(x) \Rightarrow x\in\mathcal{U}$

② Si $\mathcal{U}\in\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{U}\subset V \Rightarrow V\in\mathcal{F}(x)$.

③ Si $\mathcal{U}_1\in\mathcal{F}(x) \wedge \mathcal{U}_2\in\mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\in\mathcal{F}(x)$

④ Si $x\neq y$, con $x,y\in\mathbb{R}$ entonces $\exists\, \mathcal{U}\in\mathcal{F}(x)$ y $\exists\, V\in\mathcal{F}(y)$ tal que $\mathcal{U}\cap V=\phi$.

Esta propiedad se enuncia diciendo que $\mathbb{R}$ es separado.

Demostr.: ① $\mathcal{U}\in\mathcal{F}(x) \Rightarrow \exists\, B(x,h) \,/\, x\in B(x,h)\subset\mathcal{U} \Rightarrow x\in\mathcal{U}$

② Si $x\in B(x,h)\subset\mathcal{U}\subset V \Rightarrow V\in\mathcal{F}(x)$, pues $B(x,h)\subset V$.

③ $\mathcal{U}_1\in\mathcal{F}(x) \Rightarrow \exists\, h_1>0 \,/\, B(x,h_1)\in\mathcal{F}(x)$.

$\mathcal{U}_2\in\mathcal{F}(x) \Rightarrow \exists\, h_2>0 \,/\, B(x,h_2)\in\mathcal{F}(x)$.

Llamemos $h_3=\inf(h_1,h_2)$, $h_3>0$. Luego: $B(x,h_3)\subset B(x,h_1)$ y $B(x,h_3)\subset B(x,h_2)$

Luego $x\in B(x,h_3)\subset B(x,h_1)\cap B(x,h_2)\subset\mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2 \Rightarrow \mathcal{U}_1\cap\mathcal{U}_2\in\mathcal{F}(x)$.

④ $x\neq y \Rightarrow x-y\neq 0 \Rightarrow |x-y|>0$. Sea $h=\frac{1}{3}|x-y|>0$.

Consideremos entonces los entornos $\mathcal{U}=B(x,h)\in\mathcal{F}(x)$ y $V=B(y,h)\in\mathcal{F}(y)$.

$\mathcal{U}\cap V=\phi$ pues de lo contrario se deduce que

$\exists\, z\in\mathcal{U}\cap V \Rightarrow z\in\mathcal{U}\wedge z\in V \Rightarrow d(x,z)<h \wedge d(z,y)<h$

Como $|x-y|\leq|x-z|+|z-y|$ se deduciría que

$3h < h+h = 2h$ lo cual es absurdo, luego $\mathcal{U}\cap V=\phi$.

La propiedad tercera se puede generalizar por inducción para el caso de que se trate de una intersección finita de entornos de x. La intersección infinita de entornos de un punto no tiene porqué ser entorno de dicho punto.

Contraejemplo: Consideremos la familia de entornos del punto 0 siguiente:

$$\mathcal{F}(0)=\{\,]-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}[\,/\, n\in\mathbb{N}\}=\{B(0,\tfrac{1}{n})\,/\,n\in\mathbb{N}\}$$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(0,\frac{1}{n})=\{0\}$ que no es entorno de cero, pues no contiene a ningún intervalo $B(0,h)$ ya que h es estrictamente mayor que cero. Veamos que efectivamente

Si $x>0 \Rightarrow 0<x<\frac{1}{n}, \forall n\in\mathbb{N}$ lo cual no es cierto, pues por la propiedad arquimediana $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $1<n_0x \Rightarrow \frac{1}{n_0}<x$. Análogamente se razona para $x<0$.

1.2 ~~PROPO~~ PROPOSICION: $V\in\mathcal{F}(x) \Leftrightarrow \exists k>0 \,/\, B^*(x,k)\subset V$

Demostr: $\underline{N}$] Si $V\in\mathcal{F}(x)$, $\exists h>0 \,/\, B(x,h)\subset V$

Considerese la bola cerrada $B^*(x,r)$ donde $r=\frac{h}{2}>0$; evidentemente

$V\in\mathcal{F}(x) \Rightarrow \exists r>0 \,/\, B^*(x,r)\subset V$, pues $B^*(x,r)\subset B(x,h)\subset V$.

$\underline{S}$] Si $\exists k>0 \,/\, B^*(x,k)\subset V$, como $B(x,k)\subset B^*(x,k)$ se verifica que $\exists k>0 / B(x,k)\subset V \Rightarrow V\in\mathcal{F}(x)$.

DEFINICION: Se dice que un conjunto A, $A\subset\mathbb{R}$, es un conjunto abierto si es el vacío o verifica que:

$\forall x\in A, \exists h>0 \,/\, B(x,h)\subset A$.

Consecuencia inmediata: A es abierto sii $A=\emptyset$ ó $\forall x\in A, \exists V\in\mathcal{F}(x) / V\subset A$.

$\Rightarrow$] Si A abto, $\exists h>0 \,/\, B(x,h)\subset A$. Pero $B(x,h)\in\mathcal{F}(x)$, luego $\exists V\in\mathcal{F}(x)/V\subset A$.

$\Leftarrow$] Si $\exists V\in\mathcal{F}(x) / V\subset A$, como $\exists h>0/ B(x,h)\subset V$ se verifica que

$\forall x\in A, \exists h>0 / B(x,h)\subset V\subset A \Rightarrow A$ abto.

1.3. TEOREMA: Se verifican las siguientes propiedades para los conjuntos abiertos:

a) Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de abiertos. Entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

b) Sea (A_i), $i\in\{1,\dots,n\}$, una familia finita de abiertos. Entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.

Demostración: a) $\forall x\in\bigcup_{i\in I} A_i$, $\exists h>0 / B(x,h)\subset A_i\subset\bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i$ es abierto.

Esto es debido a que $\forall x\in\bigcup_{i\in I} A_i$, $\exists i\in I/x\in A_i$. Como A_i abto, $\forall i$, existe un $h>0$ tal que $B(x,h)\subset A_i$.

b) Sea $x\in\bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow x\in A_i, \forall i\in\{1,\dots,n\}$. Como A_i abto, existe un $h_i>0$

$B(x,h_i)\in A_i$. Como tenemos un conjunto finito $\{h_1,\dots,h_n\}$ podemos considerar el mínimo; sea $h=\min(h_1,\dots,h_n)$. Luego

$B(x,h)\subset\bigcap_{i=1}^{n} B(x,h_i)\subset\bigcap_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abto.

Contraejemplo: La intersección infinita de abiertos no tiene porque ser abierto.

Sea la familia $A_n=\{]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[/ n\in\mathbb{N}\}$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{0\}$ que no es abto, pues $\{0\}$ no es entorno de 0.

Hemos construido un ESPACIO TOPOLOGICO $(\mathbb{R},\mathcal{T})$, $\mathcal{T}$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.

1.4 PROPOSICION: a) $]a,b[\in\mathcal{T}$, es decir es abierto

Sea $x\in]a,b[\Rightarrow a<x<b \Rightarrow b-x>0 \wedge x-a>0$

Llamando $h'=\min(b-x,x-a)>0$ y $h=\frac{h'}{2}$ se verifica que

$]x-h, x+h[\subset]a,b[$, pues $h<h' \Rightarrow x+h < x+h'$

como $h' \leq b-x \Rightarrow x+h < x+b-x = b \Rightarrow x+h<b$.

Tambien se verifica que $a < x+h'$, luego $a<x-h<x+h<b$. c.s.q.d.

b) tambien son abiertos $]-\infty, a[$, $]b,+\infty[$ y $\mathbb{R}$.

DEFINICION: Un conjunto $F \subset \mathbb{R}$ se dice cerrado si su complementario es abierto.

Por paso a complementario se deduce fácilmente que la unión finita de cerrados es un cerrado, y que la intersección cualquiera de cerrados es un cerrado.

2. Interior y adherencia de un conjunto

DEFINICION: Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$; entonces el interior de M se define como

$$\mathring{M} = \bigcup_{\substack{A \subset M \\ A\, abto}} A$$

Se define la adherencia del conjunto M como $\overline{M} = \bigcap_{C \supset M} C$, C cerrado

Siempre se verifica que $\mathring{M} \subset M$ y que $M \subset \overline{M}$. Esto se deduce inmediatamente de la definición.

2.1. TEOREMA: Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$. Se verifica entonces que:

a) M es abierto si y solo si $M = \mathring{M}$

b) M es cerrado si y solo si $M = \overline{M}$

Demostración: a) $\overset{S}{\Leftarrow}$ $\mathring{M}$ es la unión de abiertos, luego es abierto. Si $M=\mathring{M}$, M es abto.

$\overset{N}{\Rightarrow}$ Si M es abto, M es un abto contenido en M, luego $M \subset \bigcup_{A \subset M} A$ abto $\Rightarrow M \subset \mathring{M}$

Como $\mathring{M} \subset M$, se verifica que $\mathring{M} = M$.

b) $\overset{S}{\Leftarrow}$ $\overline{M}$ es cerrado, pues es la intersección de cerrados. Si $M=\overline{M} \Rightarrow M$ es cerrado.

$\overset{N}{\Rightarrow}$ Si M es cerrado, M es un cerrado que contiene a M, luego $\bigcap_{C \supset M} C = \overline{M} \subset M$

Como $\overline{M} \supset M$ se verifica que $\overline{M} = M$.

2.2. TEOREMA: Sea M una parte de $\mathbb{R}$, entonces un punto x es interior a M sii existe un entorno de x contenido en M y un punto x es adherente a M sii todo entorno de x corta a M. Es decir:

a) $x \in \mathring{M} \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{F}(x) / V \subset M$

b) $x \in \overline{M} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{F}(x) ; V \cap M \neq \phi$.

Demostración: a) $\overset{N}{\Rightarrow}$ Si $x \in \mathring{M} \Rightarrow x \in \bigcup_{A \subset M} A \Rightarrow \exists A$ abto $\subset M / x \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{F}(x) / V \subset A \subset M$. Es suficiente tomar $V = A$.

$\overset{S}{\Leftarrow}$ Si $\exists V \in \mathcal{F}(x) / V \subset M \Rightarrow \exists h>0 / B(x,h) \subset V \Rightarrow B(x,h) \subset M$, luego como $B(x,h)$ es abto contenido en M se verifica por definición que $x \in \mathring{M}$

b) $\overset{N}{\Rightarrow}$ Supongamos $\exists V \in \mathcal{F}(x) / V \cap M = \phi$. Veremos que $x \notin \overline{M}$

…, luego $\complement B(x,h)$ es cerrado.

Si $B(x,h)\cap M=\emptyset \Rightarrow M \subset \complement B^{(x,h)} = C$. Luego existe un cerrado C que contiene a M, tal que $x\notin C \Rightarrow x\notin \overline{M}$. $\overset{\Leftarrow}{\supseteq}$ Si $x\notin\overline{M} \Rightarrow \exists \overset{\text{cerrado}}{C}\supset M / x\notin C \Rightarrow x\in \complement C$, abto $\Rightarrow \exists h>0 / B(x,h)\subset\complement C$

Si $M\subset C \Rightarrow \complement C\subset\complement M$. Luego $B(x,h)\subset\complement M \Rightarrow B(x,h)\cap M=\emptyset$, lo cual contradice la hipótesis.

Se verifica que el interior es el mayor abierto contenido en M y que la adherencia es el menor cerrado que contiene a M.

3. Puntos de acumulación

Sea M una parte de $\mathbb{R}$. Se dice que un punto $x\in\mathbb{R}$ es punto de acumulación de M si todo entorno de x corta a M en puntos distintos del x. Se llama conjunto derivado M' al conjunto de los puntos de acumulación de M. Entonces:

$$x\in M' \iff \forall V\in\mathcal{F}(x);\ (V-\{x\})\cap M\neq\emptyset.$$

Los puntos de M que no son de acumulación se dicen aislados.

Se deduce fácilmente que $\overline{M}=M'\cup M$.

3.1. TEOREMA: Un conjunto M es cerrado si y solo si contiene a sus puntos de acumulación.

Demostración: Si M es cerrado $\Rightarrow M=\overline{M}$. Como $M'\subset\overline{M} \wedge \overline{M}=M$ se verifica que $M'\subset M$.

Recíprocamente, si $M'\subset M \Rightarrow M\cup M'\subset M \Rightarrow \overline{M}\subset M$. Como siempre se verifica que $\overline{M}\supset M$, se deduce que $M=\overline{M}$, es decir, M es cerrado.

3.2. TEOREMA: Sea M una parte de $\mathbb{R}$ y x un punto de acumulación de M. Entonces todo entorno de x corta a M en una infinidad de puntos distintos de x.

Demostración: Supongamos que $\exists V\in\mathcal{F}(x) / (V-\{x\})\cap M=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Si $V\in\mathcal{F}(x)$, $\exists s>0 / B(x,s)\subset V \Rightarrow (B(x,s)-\{x\})\cap M=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$ donde los $\{y_i\}_1^m\subset\{x_i\}_1^n$, e $y_i\neq x$, $\forall i\in\{1,\dots,m\}$. Luego $|x-y_i|>0$, $\forall i$.

Sea $r'=\inf\{|x-y_i|\}$, $1\leq i\leq m$; luego $r'>0$, pues se trata de un conjunto finito de puntos distintos de 0.

Llamaremos h' al inferior de los números r' y s y tomaremos un $h>0$ de modo que $0<h<h'$.

Podemos construir por tanto la bola $B(x,h)$. Consideremos entonces la intersección $(B(x,h)-\{x\})\cap M$ y supongamos que es no vacía. Existiría entonces un $y\in(B(x,h)-\{x\})\cap M$, luego $y\in B(x,h)$, $y\neq x$, e $y\in M$. Como $B(x,h)\subset B(x,s)$, se deduce que $y\in B(x,s)$, $y\neq x$ e $y\in M$, luego $y\in(B(x,s)-\{x\})\cap M \Rightarrow y\in\{y_1,\dots,y_m\}$, lo cual es absurdo pues $y\in B(x,h)-\{x\} \Rightarrow |y-x|<h<\inf\{|x-y_i|\}=r'$

Entonces $\forall i$, $|y-x|<h<|x-y_i| \Rightarrow y_i\notin B(x,h)$

Luego $y\neq y_i$, $\forall i$. Por tanto $(B(x,h)-\{x\})\cap M=\emptyset$. Siendo $B(x,h)\in\mathcal{F}(x)$ se deduce que x no es de acumulación contra la hipótesis, luego se verifica la tesis. c.s.q.d.

El recíproco también es cierto, trivialmente, pues si todo entorno de x corta a M en una infinidad de puntos distintos de x, lo corta en algún punto distinto de x.

4. Teorema de Bolzano-Weierstrass

"Todo conjunto infinito acotado en $\mathbb{R}$ tiene al menos un punto de acumulación".

Demostración: Si M es un conjunto acotado, está totalmente contenido en un intervalo cerrado $[a,b]$, donde a es una cota inferior de M y b una cota superior. Consideremos los subintervalos de $[a,b]$ siguientes:

$[a, \frac{a+b}{2}]$ y $[\frac{a+b}{2}, b]$. Uno de los dos al menos contiene infinitos puntos de M, pues de lo contrario M no sería infinito. Si es el primero el que contiene infinitos elementos de M llamaremos $a_1 = a$ y $b_1 = \frac{a+b}{2}$ y si es el segundo haremos $a_1 = \frac{a+b}{2}$ y $b_1 = b$. En cualquier caso $[a_1, b_1] \cap M$ es un conjunto infinito y $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Analogamente se considera el conjunto infinito $[a_2, b_2]$ de modo que $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$. Así sucesivamente obtendríamos un intervalo $[a_n, b_n]$ donde $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Se formaría entonces un encaje de intervalos

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$$

donde $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n]$ contiene infinitos puntos de M. Según el teorema 10.1 (Tema 1º):

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$. Luego $\exists x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$

Veamos que x es un punto de acumulación de M.

$\forall V \in \mathcal{F}(x)$, $\exists h > 0 \,/\, B(x,h) \subset V$.

Podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{b-a}{2^{n_0}} < h/2$, $\frac{h}{2} > 0$.

Luego si $n \geq n_0 \Rightarrow b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \frac{h}{2}$

Veamos que si $n \geq n_0$, $[a_n, b_n] \subset B(x,h)$.

Si $x \in [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow b_n - x \leq b_n - a_n < \frac{h}{2} < h \Rightarrow b_n < x+h$

además $x - a_n \leq b_n - a_n < \frac{h}{2} < h \Rightarrow x - h < a_n$

Luego $[a_n, b_n] \subset]x-h, x+h[= B(x,h) \Rightarrow [a_n, b_n] \subset V$.

Luego $\forall V \in \mathcal{F}(x)$, $(V - \{x\})$ contiene infinitos puntos de M, luego x es punto de acumulación de M.

5. Recubrimiento de un conjunto

Definición: Sea A una parte de $\mathbb{R}$. Un recubrimiento de A es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $F = \{F_i\}_{i\in I}$, $F_i \subset \mathbb{R}$, de forma que

$$A \subset \bigcup_{i\in I} F_i$$

Si el conjunto de índices I es el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales, el recubrimiento F es numerable.

Se dice que el recubrimiento F es abierto si $\forall i \in I$, F_i es un abierto.

tituye un recubrimiento por cerrados de $\mathbb{R}$.

② $]0,1[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, para $n \geq 2$. Luego los intervalos abiertos de la forma $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$, constituyen un recubrimiento numerable por abiertos del intervalo $]0,1[$.

5.1. TEOREMA: Sea B un conjunto abierto en $\mathbb{R}$ y x un elemento de B. Consideremos la familia $F = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde los A_n son de la forma $B(y,r)$ tales que $y\in\mathbb{Q}$ y $r\in\mathbb{Q}^+$. Entonces existe un $A_K \in F$ tal que $x \in A_K \subset B$.

Demostr.: (Observación: F es numerable pues es una familia numerable de conjuntos numerables; pues los conjuntos de la forma $B(y,r)$, $y\in\mathbb{Q}$, $r\in\mathbb{Q}^+$ son numerables ya que si fijamos el centro de la bola y, r recorre $\mathbb{Q}^+$ que es numerable, y dado un r, y recorre $\mathbb{Q}$ que es numerable, luego $\{B(y,r) / y\in\mathbb{Q}, r\in\mathbb{Q}^+\}$ es numerable pues es una familia numerable de conjuntos numerables. Por tanto, también F es numerable.)

Si $x\in B$, como B es abto es entorno de x, luego:

$$\exists h>0, h\in\mathbb{R} / B(x,h) \subset B$$

Consideremos los números reales $x-\frac{h}{4}$ y $x+\frac{h}{4}$. Entre ambos existe un racional y: $\exists y \in\mathbb{Q} / x-\frac{h}{4} < y < x+\frac{h}{4} \Rightarrow |y-x| < \frac{h}{4}$

Consideremos también los números $\frac{h}{4}$ y $\frac{h}{2}$. Luego:

$$\exists r\in\mathbb{Q}^+ / \frac{h}{4} < r < \frac{h}{2}$$

Podemos hablar entonces de la bola $B(y,r)$ que pertenece a F pues $y\in\mathbb{Q}$ y $r\in\mathbb{Q}^+$.

Veamos que el conjunto $B(y,r)$ es el A_K que estábamos buscando. Es decir, habrá que probar que $x\in B(y,r) \subset B(x,h)$.

Como $|y-x| < \frac{h}{4} < r \Rightarrow |y-x| < r \Rightarrow x \in B(y,r)$.

$\forall z \in B(y,r) \Rightarrow |z-y| < r$. Hay que probar que $z\in B(x,h)$:

$$|z-x| \leq |z-y| + |y-x| < r + \frac{h}{4} < \frac{h}{2} + \frac{h}{4} < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h$$

Luego $|z-x| < h \Rightarrow z \in B(x,h)$.

Por tanto: $x \in B(y,r) \subset B(x,h) \subset B$. Es decir $\exists A_K = B(y,r) \in F / x\in A_K \subset B$.

5.2. TEOREMA DE RECUBRIMIENTO DE LINDELÖF:

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces de todo recubrimiento por abiertos de A es posible extraer un recubrimiento numerable.

Demostración: Sea $F = \{B_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de A. ~~Sea x el~~

Sea $x\in A \Rightarrow x \in \bigcup_{i\in I} B_i \Rightarrow \exists B_i \in F / x\in B_i$. Según el teorema anterior, siendo B_i abierto, para cada x de A existe un $K\in\mathbb{N}$ función de x ($K = K(x)$)

tal que: $x \in A_K \subset B_i$

A todo punto $x \in A$ se le asocia, por tanto, un A_K. Luego los A_K recubren A. Si a cada A_K le asociamos un único B_{i_K} tal que $A_K \subset B_{i_K}$ tenemos que $\{B_{i_K}\}_{K \in \mathbb{N}}$, subfamilia de F, recubre A y además es numerable. c.s.q.d.

5.3 TEOREMA DE ENCAJES DE CANTOR:

Sea $(Q_K)_{K \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos no vacíos tales que:

a) Q_1 es acotado y $\forall K \in \mathbb{N}$, Q_K es cerrado.

b) Se verifica que $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_K \supset Q_{K+1} \supset \dots$

Entonces $\bigcap_{K \in \mathbb{N}} Q_K$ es cerrado y no vacío.

Demostr.: Que $\bigcap_{K \in \mathbb{N}} Q_K$ es cerrado es inmediato pues Q_K es cerrado, $\forall K \in \mathbb{N}$.

Para probar que es no vacío distinguiremos dos casos:

– $\exists K \in \mathbb{N} / Q_K = \{x_1, \dots, x_p\}$, es decir, existe al menos un Q_K finito: entonces puede suceder que $Q_{K+1}, Q_{K+2}, \dots$ tengan el mismo número de elementos que Q_K o menor (pues $Q_K \supset Q_{K+1} \supset Q_{K+2} \supset \dots$). Si $Q_{K+1}, Q_{K+2}, \dots$ tienen el mismo número de elementos $\{x_1, \dots, x_p\}$ se verifica que $\bigcap_{K \in \mathbb{N}} Q_K = \{x_1, \dots, x_p\}$ que es no vacío. Si Q_{K+1} tiene menos elementos que Q_K se procede análogamente hasta encontrar un $Q_n = \{x_1, \dots, x_r\}$, $r \leq p$, tal que $Q_n = Q_{n+1} = \dots$

En cuyo caso $\bigcap_{K \in \mathbb{N}} Q_K = \{x_1, \dots, x_r\} \neq \emptyset$, pues $\forall K \in \mathbb{N}, Q_K \neq \emptyset$

– $\forall K \in \mathbb{N} / Q_K$ es infinito. Entonces podemos formar un conjunto infinito $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ tal que $x_K \in Q_K$, $\forall K \in \mathbb{N}$. Entonces $x_1 \in Q_1$; podemos encontrar un $x_2 \in Q_2$ tal que $x_2 \neq x_1$, pues Q_2 es infinito. Análogamente, se puede hallar un $x_K \in Q_K$ tal que $x_K \neq x_1, x_K \neq x_2, \dots$

$\forall K \in \mathbb{N}$, $x_K \in Q_K \subset Q_1 \Rightarrow x_K \in Q_1, \forall K \in \mathbb{N} \Rightarrow A \subset Q_1$.

Siendo Q_1 acotado se deduce que $A \subset Q_1$ tambien es acotado. Como además es infinito, por el teorema de Bolzano-Weiestrass, existe un punto x que es de acumulación de A.

Veamos que x es tambien punto de acumulación de Q_K, $\forall K \in \mathbb{N}$.

Si $x \in A'$ (conj. de ptos de acumulación de A), $\forall V \in \mathcal{F}(x)$, $V \cap A$ es infinito.

Es decir, en todo entorno de x hay infinitos puntos de A, luego en todo entorno de x hay infinitos puntos de Q_K, $\forall K \in \mathbb{N}$, pues si hay infinitos puntos de A y $A \subset Q_1$ habrá infinitos puntos de Q_1. Si hay infinitos puntos de A habrá infinitos puntos de $A - \{x_1\} = \{x_2, \dots, x_n, \dots\}$, pero $A - \{x_1\} \subset Q_2$, luego hay infinitos puntos de Q_2. Análogamente, habrá infinitos puntos de $A - \{x_1, \dots, x_{K-1}\} \subset Q_K \Rightarrow V$ corta a Q_K en infinitos puntos, $\forall K \in \mathbb{N}$

Luego $\bigcap_{K \in \mathbb{N}} Q_K \neq \emptyset$, pues x es punto de acumulación de Q_K, $\forall K \in \mathbb{N}$

5.4. TEOREMA DE HEINE - BOREL

Sea A un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}$, tal que A está acotado. Entonces de todo recubrimiento por conjuntos abiertos de A se puede extraer un recubrimiento finito.

Este teorema afina más que el de Lindelöf; éste decía que de todo recubrimiento se puede extraer un recubrimiento numerable; aquí se asegura la existencia de un recubrimiento finito, para conjuntos cerrados y acotados.

Demostr.: Sea $\mathcal{F}$ un recubrimiento por abiertos de A. Entonces por el teorema de Lindelöf, existe un recubrimiento numerable de A que podemos extraer de F. Es decir: $\exists \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}, I_n \in F / A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$

Consideremos una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$, $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$S_m = \bigcup_{n=1}^{m} I_n$$

Entonces $S_1 \subset \ldots \subset S_m \subset S_{m+1} \subset \ldots$

Podemos formar entonces la familia $(Q_m)_{m\in\mathbb{N}}$ del siguiente modo:

$$Q_1 = A, \quad Q_2 = A\cap(\mathbb{R}-S_2), \ldots, Q_m = A\cap(\mathbb{R}-S_m), \ldots$$

$Q_1 = A$ es cerrado y acotado. $\forall K\in\mathbb{N}$, Q_K es cerrado, pues S_K es abierto pues es unión de abiertos, luego su complementario $\mathbb{R}-S_K$ es cerrado y $Q_K = A\cap(\mathbb{R}-S_K)$ también es cerrado.

Además se verifica que $Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_K \supset \ldots$, pues (S_m) es creciente, luego $(\mathbb{R}-S_m)$ es decreciente, luego $(A\cap(\mathbb{R}-S_m))$ es decreciente

Luego la sucesión $(Q_K)_{K\in\mathbb{N}}$ verifica las hipótesis del teorema de Cantor.

En principio podemos suponer que se pueden dar dos casos:

- $\exists m_0 \in\mathbb{N} / Q_{m_0} = \emptyset$. Luego $A\cap(\mathbb{R}-S_{m_0}) = \emptyset \Rightarrow A\subset S_{m_0}$
  Luego la familia finita $\{I_n\}_n$, $n\in\{1,\ldots,m_0\}$ ~~que~~ recubre S_{m_0} y por tanto A.
- $\forall K\in\mathbb{N}$, $Q_K\neq\emptyset$. Luego $A\cap(\mathbb{R}-S_K)\neq\emptyset \Rightarrow \exists x\in A\cap(\complement_{\mathbb{R}} S_K) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \exists x\in A / x\notin S_K$, $\forall K\in\mathbb{N}$, lo cual es absurdo pues
  $x\in A\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \Rightarrow \exists m\in\mathbb{N} / x\in I_m \Rightarrow x\in S_m$. Luego algún Q_K debe ser vacío y el teorema queda demostrado. csqd.

6. Conjuntos compactos

DEFINICION: Se dice que una parte M de $\mathbb{R}$ es un conjunto compacto si de todo recubrimiento por abiertos del conjunto M es posible extraer un recubrimiento finito.

6.1. TEOREMA: Sea M una parte de $\mathbb{R}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

a) M es compacto.

b) M es cerrado y acotado.

Demostr.: b) ⇒ a)| Trivial por el teorema de Heine-Borel.

a) ⇒ b)| Hemos de probar que si M es compacto, M es acotado y cerrado.

$\forall x \in M$ podemos considerar la bola abierta $B(x,1)$. Como $x \in B(x,1)$,

$M = \bigcup_{x\in M}\{x\} \subset \bigcup_{x\in M} B(x,1)$.

Luego M está recubierto por conjuntos abiertos.

Como M es compacto podemos extraer un recubrimiento finito, es decir:

$\exists\{x_1,\dots,x_n\} \subset M \,/\, M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,1)$.

El intervalo $B(x_i,1)$ es acotado, luego como la unión finita de conjuntos acotados es acotado, se deduce que M es acotado.

Para probar que M es cerrado, probaremos que $\overline{M} \subset M$, o bien, que si $x \notin M \Rightarrow x \notin \overline{M}$.

Si $x \notin M$, $\forall y \in M \Rightarrow x \neq y$. Como $\mathbb{R}$ es separado,

$\forall y \in M, \exists W_y \in \mathcal{F}(x) \subset \mathbb{R} \wedge \exists W^y \in \mathcal{F}(y) \subset \mathbb{R} \,/\, W_y \cap W^y = \emptyset$

No hay ningún problema en considerar W^y abto, pues si $W^y \in \mathcal{F}(y)$ existe una bola abta de centro y contenida en W^y tal que su intersección con W_y es vacía.

A cada $y \in M$ se le asocia un W^y, luego $M \subset \bigcup_{y\in M} W^y$

Siendo W^y abto tenemos un recubrimiento por abiertos de M, del cual, por ser M compacto, podemos extraer un recubrimiento finito:

Luego: $\exists\{y_1,\dots,y_n\} \subset M \,/\, M \subset \bigcup_{i=1}^{n} W^{y_i}$

Se verifica: $W^{y_i} \cap W_{y_i} = \emptyset$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$

Siendo $W_{y_i} \in \mathcal{F}(x)$, $\forall i \Rightarrow W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i} \in \mathcal{F}(x)$

Luego $\exists W \in \mathcal{F}(x) \,/\, W \cap M = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{M} \Rightarrow \overline{M} \subset M$

$W \cap M = \emptyset$, pues si $\exists z \in W \cap M \Rightarrow z \in W \wedge z \in M$.

$z \in W \Rightarrow z \in \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i} \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}, W_{y_i} \ni z$

$z \in M \Rightarrow z \in \bigcup_{i=1}^{n} W^{y_i} \Rightarrow \exists i \in \{1,\dots,n\} \,/\, z \in W^{y_i}$

Lo cual es absurdo pues $W_{y_i} \cap W^{y_i} = \emptyset$. csqd.

Consecuencias inmediatas: ① Toda unión finita de compactos es compacto.

② Todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto.

Demostr.: ① Sean los conjuntos compactos $A_1,\dots,A_n$, luego $\forall i$, A_i es cerrado y acotado, luego $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es cerrado y acotado.

② Si $B \subset A$ y A es acotado, entonces B es acotado. Si B es cerrado, se verifica por el teorema anterior que B es compacto.

6.2. TEOREMA: M es compacto si y solo si todo subconjunto infinito de M tiene un punto de acumulación perteneciente a M.

Demostración: $\boxed{\Rightarrow}$ N) Si M es compacto, es cerrado y acotado.
Sea T un subconjunto infinito de M.
Si M es acotado, T es acotado e infinito, luego por el teorema de Bolzano-Weierstrass, T tiene al menos un punto de acumulación; es decir $\exists y \in T'$. Luego todo entorno de y corta a $T-\{y\}$. Como $T \subset M$, todo entorno de y corta a M en puntos distintos de y. Luego $y \in M'$. Como M es cerrado, $M' \subset M \Rightarrow y \in M$.

$\boxed{\Leftarrow}$ S) Hay que probar que M es acotado y cerrado, basándonos en que todo subconjunto infinito de M tiene un punto de acumulación perteneciente a M.

- Supongamos que M no fuese acotado. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in M / |x_n| > n$.
Luego existe un subconjunto de M, $T=\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$, infinito, pues de lo contrario M sería acotado. Luego T es un subconjunto infinito de M, luego: $\exists y \in T'$, es decir T tiene un punto de acumulación, por hipótesis.
Tomemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > |y|+1 \Rightarrow n-|y| > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x_n - y| \geq |x_n| - |y| > n - |y| > 1$
Luego $|x_n - y| > 1 \Rightarrow x_n \notin B^*(y,1)$
Es decir, x_n y los posteriores a x_n no pertenecen a $B^*(y,1)$. Los anteriores pueden pertenecer a $B^*(y,1)$, pero $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ es un conjunto finito. Luego hemos encontrado un entorno de y que corta T en un número finito de puntos, luego y no es punto de acumulación de T, pues todo entorno de y debería cortar a T en un conjunto infinito de puntos.
Luego M debe ser acotado.

- M es cerrado: Veamos que $\forall x \in M'$, $x \in M$, con lo cual se prueba que M es cerrado.
Si $x \in M'$, todo entorno de x corta a M en una infinidad de puntos. Luego:
$\exists x_1 \in B(x,1) \cap M$, $\exists x_2 \neq x_1 / x_2 \in B(x, \frac{1}{2}) \cap M$, pues $B(x,\frac{1}{2}) \cap M$ es infinito.
Analogamente $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap M$, $x_n \neq x_1, \dots, x_n \neq x_{n-1}, \dots$
Tenemos por tanto $T = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ subconjunto infinito de M.
Luego por hipótesis $\exists y \in T' / y \in M$.
El punto x también es de acumulación de T, pues todo entorno de x, $B(x,r)$ corta a T, ya que podemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < r$
Luego $B(x, \frac{1}{n_0}) \subset B(x,r)$. Esto también se verifica de n_0 en adelante y por la construcción de T, toda bola $B(x, \frac{1}{n})$, $n \geq n_0$ contiene un punto x_n distinto de los anteriores, luego hay infinitos puntos de T en $B(x,r)$.

Si probamos que $y = x$ quedará probado que $x \in M$.

Supongamos que $y \neq x \Rightarrow |y-x| \leq |y-x_K| + |x_K - x| <$

$< |y-x_K| + \frac{1}{K}$, pues $\forall x_K \in T^*$ $|x_K - x| < \frac{1}{K}$

ya que $x_K \in B(x, \frac{1}{K})$

Llamemos $r = \frac{1}{2}|y-x| > 0$. Entonces a partir de un K_0, $\frac{1}{K} < \frac{1}{2}|y-x| = r$, $K \geq K_0$

Luego: $|y-x| < |y-x_K| + \frac{1}{K} < |y-x_K| + \frac{1}{2}|y-x| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}|y-x| < |y-x_K| \Rightarrow |y-x_K| > r$

Es decir, $\forall K \geq K_0$, $x_K \notin B^*(y,r)$, lo cual es absurdo pues y es punto de acumulación de T, y todo entorno de y debe cortar a T en infinitos puntos y $\{x_1, \dots, x_{K_0-1}\}$ es finito.

Luego $x = y \Rightarrow x \in M$. Es decir, $\forall x \in M' \Rightarrow x \in M$. Luego M es cerrado. c.q.d.