TEMA 3º: SUCESIONES EN $\mathbb{R}$

1. Sucesiones. Convergencia de sucesiones.

Definición: Una sucesión en $\mathbb{R}$ es una aplicación:

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto x(n) = x_n$$

La sucesión se representa por (x_n).

Consideremos una aplicación creciente de $\mathbb{N} \xrightarrow{s} \mathbb{N}$ que a cada K de $\mathbb{N}$ le haga corresponder un $s(K) = n_K$. Luego $n_1 < n_2 < \ldots < n_K < \ldots$

Componiendo la aplicación s con la aplicación x obtenemos la aplicación

$$x \circ s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$K \longmapsto x_{n_K}$$

Se nos forma así una subsucesión de (x_n) que representaremos por (x_{n_K}).

SUCESION CONVERGENTE: Definición: Una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ se dice que converge (o tiene por limite) hacia $x \in \mathbb{R}$ si para todo ε número real positivo existe un natural n_0 (dependiente de ε) tal que si $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x| \leq \varepsilon$.

$$(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \ (\text{o} \lim x_n = x) \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| \leq \varepsilon.$$

1.1. TEOREMA: Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) $\lim x_n = x$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] = B'(x,\varepsilon)$

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[= B(x,\varepsilon)$

d) $\forall V \in \mathcal{F}(x), \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

Demostracion: $\boxed{a) \iff b)}$ $|x_n - x| \leq \varepsilon \iff x - \varepsilon \leq x_n \leq x + \varepsilon \iff x_n \in B'(x,\varepsilon)$.

$\boxed{b) \iff c)}$ c) $\Rightarrow$ b) pues $B(x,\varepsilon) \subset B'(x,\varepsilon) \Rightarrow$ si $x_n \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow x_n \in B'(x,\varepsilon), \forall \varepsilon > 0$.

b) $\Rightarrow$ c) Consideremos el numero real positivo $\varepsilon/2$, luego $B'(x,\frac{\varepsilon}{2}) \subset B(x,\varepsilon)$.

Si $x_n \in B'(x,\frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$ (n_0 existe para $B'(x,\frac{\varepsilon}{2})$, luego existe para $B(x,\varepsilon)$).

$\boxed{c) \iff d)}$ d) $\Rightarrow$ c) pues $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{F}(x)$.

c) $\Rightarrow$ d) Sea $V \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow \exists B(x,h) \subset V$. Tomando $\varepsilon \leq h \Rightarrow B(x,\varepsilon) \subset B(x,h) \subset V$.

Luego si $x_n \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow x_n \in V$.

1.2. TEOREMA: Unicidad del limite: Si una sucesión en $\mathbb{R}$ converge hacia un punto (punto de convergencia o limite) este punto es único.

$$(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \ \wedge \ (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y \Rightarrow x = y.$$

Demostr.: $(x_n) \longrightarrow x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0' \in \mathbb{N} / n \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$(x_n) \longrightarrow y \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0'' \in \mathbb{N} / n \geq n_0'' \Rightarrow |x_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Luego como $|x-y| \leq |x - x_n| + |x_n - y|$, se verifica que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \sup(n_0', n_0'') / n \geq n_0 \Rightarrow |x-y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Luego $|x-y| = 0$, pues si $|x-y| > 0$ podemos encontrar un número real $\varepsilon>0$ tal que $0<\varepsilon<|x-y|$, por la densidad del orden en $\mathbb{R}$, en contra de que $\forall\varepsilon>0$, $|x-y|\leq\varepsilon$. Luego $|x-y|=0 \Rightarrow x=y$ csqd.

1.3. TEOREMA: Si una sucesión es convergente en $\mathbb{R}$, está acotada.

Es decir si $(x_n)\to x \Rightarrow \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado ($\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ = rango de (x_n)).

Demostr.: $(x_n)\to x \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0 / n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x|\leq\varepsilon \Leftrightarrow x_n\in[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$.

Luego $\{x_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}$ está contenido en un intervalo cerrado, luego está acotado. Los términos restantes $\{x_1,\dots,x_{n_0-1}\}$ forman un conjunto finito y por tanto están acotados. Luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{x_n\}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ n\geq n_0}}\cup\{x_1,\dots,x_{n_0-1}\}$ es acotado. csqd.

El recíproco, en general, no es cierto. Consideremos p. ej. la sucesión de término general $x_n=(-1)^n$ que es acotada, pero no convergente.

1.4. TEOREMA: Si una sucesión (x_n) tiene límite x entonces toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) tiene por límite x.

Demostr.: $(x_n)\to x \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x|\leq\varepsilon$. (I)

$n_0\in\mathbb{N} \Rightarrow \exists K_0\in\mathbb{N} / n_{K_0}\geq n_0$

Luego $\forall\varepsilon>0, \exists K_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} / K\geq K_0 \Rightarrow |x_{n_K}-x|\leq\varepsilon$

lo cual es cierto, pues si $K\geq K_0 \Rightarrow n_K\geq n_{K_0}\geq n_0 \Rightarrow n_K\geq n_0$ y verifica la condición (I). Luego $(x_{n_K})\to x$. csqd.

El recíproco no es cierto, pues si una sucesión tiene subsucesiones convergentes no tiene porque ser convergente. Sirve de contraejemplo la sucesión $x_n=(-1)^n$.

1.5. PROPOSICIÓN: Sea x un número real tal que $x=[(x_n)]$, donde (x_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$. Entonces $(x_n)\xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

Demostr.: Si $x_n\in\mathbb{Q} \Rightarrow x_n\in\mathbb{R}$, luego (x_n) es una sucesión en $\mathbb{R}$.

Por la densidad del orden, $\forall\varepsilon>0, \varepsilon\in\mathbb{R}, \exists r\in\mathbb{Q}^+ / 0<r<\varepsilon$.

Si (x_n) es de Cauchy, dado $r>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N} / n,m\geq n_0 \Rightarrow |x_n-x_m|\leq r \Rightarrow$
$\Rightarrow x_m-r\leq x_n\leq x_m+r$. Fijemos el $m\geq n_0$ y consideremos las sucesiones constantes (x_m-r) y (x_m+r). Luego $x_m-r\leq x\leq x_m+r \Rightarrow$
$\Rightarrow |x_m-x|\leq r$. (Esto en virtud del corolario 8.2., Tema 1º: Si $\exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0$; $x_n\leq y_n \Rightarrow x\leq y$, $[(x_n)]=x$, $[(y_n)]=y$)

Luego $\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon) / m\geq n_0 \Rightarrow |x_m-x|\leq r<\varepsilon \Rightarrow |x_m-x|<\varepsilon$.

Luego $(x_n)\xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

1.6. TEOREMA: Caracterización de la adherencia de un conjunto por sucesiones.

Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces un punto x de $\mathbb{R}$ es adherente a M si y solo si existe una sucesión de puntos de M que converge hacia x en $\mathbb{R}$.

$$x\in\overline{M} \Leftrightarrow \exists(x_n) / \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset M \wedge (x_n)\xrightarrow{\mathbb{R}} x$$

Demostr.: $x\in\overline{M} \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{F}(x)$, $V\cap M\neq\emptyset$

Un sistema fundamental de entornos numerable de x son los intervalos cerrados $B^*(x,\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$

Luego: $\forall n\in\mathbb{N}$, $B^*(x,\frac{1}{n})\cap M\neq\emptyset$.

Es decir: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in B^*(x, \frac{1}{n}) \cap M$.

$\underset{\Rightarrow}{N}$| $x \in \overline{M}, \Rightarrow \exists (x_n), \{x_n\} \subset M \,/\, x_n \in B^*(x, \frac{1}{n})$

Luego $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - x| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

$\underset{\Leftarrow}{S}$| Sea $x \in \mathbb{R} \,/\, (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \wedge \{x_n\} \subset M$.

Hemos de probar que $x \in \overline{M}$. Pero, $\forall V \in F(x), \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow x_n \in V$ pues $(x_n) \rightarrow x$. Como $x_n \in M$ se deduce que $V \cap M \neq \emptyset$. Luego $x \in \overline{M}$.

<u>1.7. Corolario:</u> Un conjunto M de números reales es cerrado si y solo si contiene los límites de todas las sucesiones convergentes contenidas en M.

Demostr.: $\underset{\Rightarrow}{N}$| Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado.

Sea (x_n) una sucesión convergente hacia x tal que $\{x_n\} \subset M$.

Por el teorema anterior, $x \in \overline{M}$; pero como M es cerrado $\overline{M} = M \Rightarrow x \in M$.

$\underset{\Leftarrow}{S}$| Hemos de probar que $\overline{M} = M$. Se verifica siempre que $M \subset \overline{M}$, luego queda probar que $\overline{M} \subset M$.

Sea $x \in \overline{M}$. Entonces por el teorema anterior $\exists (x_n), \{x_n\} \subset M / (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$

Como por hipótesis, M contiene los límites de cualquier sucesión convergente de puntos de M, se deduce que $x \in M$. Luego $\overline{M} \subset M$. c.s.q.d.

<u>Consecuencia:</u> Sabemos que existe una aplicación inyectiva que sumerge los números racionales en $\mathbb{R}$. Entonces $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, es decir, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Se tiene que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \subset \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$. Queda probar que $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

Sea $\overset{x \in \mathbb{R}}{x} = [(x_n)]$. Por la proposición 1.5. $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. Luego (x_n) es una sucesión en $\mathbb{Q}$, y por tanto en $\mathbb{R}$, que converge hacia x.

Por teorema 1.6., $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Luego $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Por tanto $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. c.s.q.d.

<u>EJEMPLO TEORICO DE CONVERGENCIA</u>

a) Toda sucesión monótona creciente acotada superiormente tiene límite.

b) Toda sucesión monótona decreciente acotada inferiormente tiene límite.

Demostr.: a) Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ tal que $x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \ldots$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotado superiormente en $\mathbb{R}$.

Luego existe $x = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Vamos a probar que $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, x - \varepsilon < x_{n_0}$

pues de no ser así $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ / \forall n \in \mathbb{N}, x - \varepsilon \geq x_n$

Entonces $x - \varepsilon$ sería cota superior de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, lo cual es absurdo pues $x - \varepsilon < x$ y $x = \sup\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / x - \varepsilon < x_{n_0}$

Como (x_n) es creciente, si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}$

Luego $x - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq x < x + \varepsilon$. Luego: $n \geq n_0$, $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$

Luego: $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$

b) Se procede análogamente. El límite es ínf $\{x_n\}$

2. Sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$. Criterio de convergencia de Cauchy

Definición: Una sucesión (x_n) de números reales es de Cauchy si:
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$.

2.1. Teorema: Una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$ es convergente si y solo si es una sucesión de Cauchy.

Este criterio de convergencia de Cauchy nos permite decidir si una sucesión es convergente sin conocer el punto de convergencia o límite de la misma.

Demostr.: $\boxed{\text{N}\Rightarrow}$ Si (x_n) es convergente, $\exists x \in \mathbb{R} / (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$

Entonces $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Por consiguiente, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0, |x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Luego (x_n) es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{S}\Leftarrow}$ Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, es decir, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \mathbb{R}$.

Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists r_n \in \mathbb{Q} / |x_n - r_n| \leq \frac{1}{n}$ (I) pues entre x_n y $x_n + \frac{1}{n}$ existe siempre un racional, luego $r_n \in B^*(x_n, \frac{1}{n}), \forall n \in \mathbb{N}$.

Consideremos la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y veamos que es de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

$|r_n - r_m| = |r_n - x_n + x_n - x_m + x_m - r_m| \leq |r_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - r_m|$

Si (x_n) es de Cauchy, $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0' \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \frac{r}{3}$

y $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0'' \in \mathbb{N} / n \geq n_0'' \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{r}{3}$, por la propiedad arquimediana.

Según (I), $|r_n - x_n| \leq \frac{1}{n}$ y $|r_m - x_m| \leq \frac{1}{m}$

Luego $\forall r \in \mathbb{Q}^+, \exists n_0 = \sup(n_0', n_0'') / n, m \geq n_0 \Rightarrow |r_n - r_m| \leq |r_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - r_m| \leq$
$\leq \frac{1}{n} + |x_n - x_m| + \frac{1}{m} \leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r$.

Luego (r_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$.

Luego se puede hablar del número real $x = [(r_n)]$

Probemos ahora que $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$

Si $x = [(r_n)] \Rightarrow (r_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ (Proposición 1.5.)

$|x_n - x| \leq |x_n - r_n| + |r_n - x|$

Pero $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \begin{cases} \exists N_0' \in \mathbb{N} / n \geq N_0' \Rightarrow |r_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists N_0'' \in \mathbb{N} / n \geq N_0'' \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - r_n| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists N_0 = \sup(N_0', N_0'') / n \geq N_0 \Rightarrow |x_n - x| \leq |x_n - r_n| + |r_n - x| \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Luego $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$, es decir, (x_n) es convergente. c.s.q.d.

Esto en $\mathbb{Q}$ no es cierto. Por esto se dice que $\mathbb{R}$ es <u>completo</u>.

3. Cálculo de límites

3.1. Teorema Sean (x_n) e (y_n) sucesiones en $\mathbb{R}$.

Entonces:

a) Si $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \wedge (y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y \Rightarrow (x_n + y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x+y$

b) Si $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \wedge (y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y \Rightarrow (x_n \cdot y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \cdot y$

Demostr.: a) $(x_n) \longrightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0' \in \mathbb{N} / n \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$(y_n) \longrightarrow y \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0'' \in \mathbb{N} / n \geq n_0'' \Rightarrow |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 = \sup(n_0', n_0'') / n \geq n_0 \Rightarrow |(x_n + y_n) - (x+y)| =$

$= |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n + y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} (x+y)$

b) $|x_n y_n - xy| = |(x_n - x) y + x_n (y_n - y)| \leq |x_n - x| \cdot |y| + |x_n| \cdot |y_n - y|, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Si $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$, $\exists K \in \mathbb{R} / |x_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$ (Teorema 1.3.)

Si $y \neq 0$, $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$, $\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2|y|}, \exists n_0' \in \mathbb{N} / n \geq n_0' \Rightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot |y|}$

$(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$, $\forall \varepsilon > 0, \frac{\varepsilon}{2K}, \exists n_0'' \in \mathbb{N} / n \geq n_0'' \Rightarrow |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2K}$.

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 = \sup(n_0', n_0'') / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n y_n - xy| \leq$

$\leq |x_n - x| \cdot |y| + |x_n| \cdot |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot |y|} |y| + K \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot K} = \varepsilon$.

Si $y = 0 \Rightarrow (y_n) \rightarrow 0$. Hay que probar que $(x_n \cdot y_n) \longrightarrow 0$.

$(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} / |x_n| \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$.

$(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \frac{\varepsilon}{K}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{K}$

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n \cdot y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$. csqd.

3.2. Corolario: Si $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$, entonces $(\lambda x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda x, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Basta considerar la sucesión convergente $(\lambda) \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda$. Luego:

$(\lambda x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda \cdot x$.

CONSECUENCIA: EL CONJUNTO DE SUCESIONES CONVERGENTES TIENE ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL.

3.3. TEOREMA: Sea (y_n) una sucesión en $\mathbb{R}$ que converge hacia y. Supongamos que $y \neq 0$ e $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\left(\frac{1}{y_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{1}{y}$

Demostr.: $\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|}$

Si $y \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}|y| = \varepsilon' > 0$. $(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y \Rightarrow \forall \varepsilon' \in \mathbb{R}^+, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |y_n - y| \leq \frac{1}{2}|y|$

$|y| - |y_n| \leq ||y| - |y_n|| \leq |y - y_n| \leq \frac{1}{2}|y| \Rightarrow |y_n| \geq \frac{1}{2}|y|, \ \forall n \geq N$

Luego $\frac{1}{|y_n|} \leq \frac{2}{|y|}$.

Por tanto $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{|y - y_n|}{|y_n| \cdot |y|} \leq \frac{2 \cdot |y - y_n|}{|y| \cdot |y|}$

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \frac{\varepsilon}{2}|y|^2 > 0, \exists N' \in \mathbb{N} / n \geq N' \Rightarrow |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2}|y|^2$

En definitiva $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 = \max(N, N') / n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{2 \cdot |y - y_n|}{|y|^2} \leq \frac{2 \cdot \frac{\varepsilon}{2}|y|^2}{|y|^2} = \varepsilon$

3.4. TEOREMA: Si $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ e $(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$ de modo que $y \neq 0$ e $y_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{x}{y}$

Demostr.: $(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y \Rightarrow \left(\frac{1}{y_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{1}{y}$

Luego $\left(x_n \cdot \frac{1}{y_n}\right) = \left(\frac{x_n}{y_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{x}{y}$

Observación: En los dos teoremas anteriores se admitió por hipótesis que $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pero es suficiente para que $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \xrightarrow{\mathbb{R}} \frac{x}{y}$ que $y \neq 0$, pues en este caso existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se verifica que $y_n \neq 0$.

Demostr.: Si $y \neq 0 \Rightarrow |y| > 0$. Luego $\exists \rho \in \mathbb{R} / 0 < \rho < |y|$

$(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$, dado $\rho > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow y_n \in [y-\rho, y+\rho]$

Probemos que $0 \notin [y-\rho, y+\rho]$ con lo cual si $n \geq N \Rightarrow y_n \neq 0$.

- Si $y > 0 \Rightarrow 0 < \rho < y \Rightarrow y - \rho > 0 \Rightarrow 0 \notin [y-\rho, y+\rho]$.
- Si $y < 0 \Rightarrow 0 < \rho < -y \Rightarrow y + \rho < 0 \Rightarrow 0 \notin [y-\rho, y+\rho]$

Luego $y_n \neq 0$, para $n \geq N$.

3.5. TEOREMA: a) Supongamos que $(x'_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ y $(x''_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$, y que existe (x_n) en $\mathbb{R}$ tal que a partir de un natural N, $x'_n \leq x_n \leq x''_n$. Entonces:

$$(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$$

b) Supongamos que $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$ e $(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$, y que a partir de un N natural $x_n \leq y_n$. Entonces $x \leq y$.

Demostr.: a) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \begin{cases} \exists N' \in \mathbb{N} / n \geq N' \Rightarrow x'_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon], \text{ pues } (x'_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \\ \exists N'' \in \mathbb{N} / n \geq N'' \Rightarrow x''_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon], \text{ pues } (x''_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \end{cases}$

Luego $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 = \max(N', N'', N) / n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in [x'_n, x''_n] \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$

Luego $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$. csqd.

b) Supongamos que $x > y$; entonces $\varepsilon = \frac{x-y}{3} > 0$

Dado $\varepsilon > 0, \begin{cases} \exists N' \in \mathbb{N} / n \geq N' \Rightarrow x_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \\ \exists N'' \in \mathbb{N} / n \geq N'' \Rightarrow y_n \in [y-\varepsilon, y+\varepsilon] \end{cases}$

Pero $y + \varepsilon < y + 2\varepsilon = y + \frac{2x-2y}{3} = \frac{2x+y}{3} = x - \frac{x-y}{3} = x - \varepsilon \Rightarrow y + \varepsilon < x - \varepsilon$

Luego $n \geq \max(N', N'') \Rightarrow y_n < x_n$

y también $n \geq \max(N, N', N'') \Rightarrow y_n < x_n$

lo cual es absurdo pues si $n \geq N$, $x_n \leq y_n$, por hipótesis. Luego debe ser $x \leq y$. csqd.

4. Sucesiones de números complejos

* En $\mathbb{R}$ teníamos definido el valor absoluto de un número real del siguiente modo $|x| = \sup\{-x, x\}$ que verifica que:

① $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

② $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$

③ $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

norma en $\mathbb{R}$, y $\mathbb{R}$ se dice que es un espacio vectorial normado.
El par $(E, |\cdot|)$ se dice un espacio vectorial normado si E es espacio vectorial y $|\cdot|$ es una norma en E.
En $\mathbb{C}$, conjunto de los números complejos, podemos definir una norma del siguiente modo:

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$z \longmapsto |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Evidentemente $|\cdot|$ es una norma en $\mathbb{C}$, pues $\forall \lambda, z \in \mathbb{C}$:

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Luego $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ es un espacio vectorial normado (o simplemente espacio normado).

* Espacios de Banach: (se llaman también espacios completos). Un conjunto se dice un espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy definida en él es convergente. $\mathbb{R}$ es un espacio de Banach.
Trataremos de probar que $\mathbb{C}$ también lo es.
Las sucesiones en $\mathbb{C}$ se definen, análogamente a $\mathbb{R}$, como una aplicación de los números naturales en $\mathbb{C}$.

<u>DEFINICION</u>: Sea (z_n) una sucesión en $\mathbb{C}$.
a) La sucesión (z_n) converge hacia $z \in \mathbb{C}$ o tiene por límite z sii:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \,/\, n \geq N \Rightarrow |z_n - z| \leq \varepsilon$$
b) La sucesión (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{C}$ sii:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| \leq \varepsilon$$

<u>4.1. TEOREMA</u>: Sea (z_n) una sucesión en $\mathbb{C}$, con $z_n = x_n + iy_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:
a) La sucesión $(z_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} z = x+iy \iff (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \wedge (y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$
b) (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{C}$ sii (x_n) e (y_n) son de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Demostr.: a) $\underline{\overset{N}{\Rightarrow}}$ | $(z_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} z \Rightarrow (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \wedge (y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$
$$(z_n) \to z \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow |z_n - z| \leq \varepsilon)$$
$$|z_n - z| = \sqrt{(x_n-x)^2 + (y_n-y)^2} \Rightarrow |x_n - x| \leq |z_n - z| \wedge |y_n - y| \leq |z_n - z|$$
Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N \Rightarrow \begin{cases} |x_n - x| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon \Rightarrow (x_n) \to x \\ |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq \varepsilon \Rightarrow (y_n) \to y \end{cases}$

$\underline{\overset{S}{\Leftarrow}}$ | $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - x| \leq \frac{\varepsilon}{2})$
$(y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N_2 \Rightarrow |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2})$
Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max(N_1, N_2) \,/\, n \geq N \Rightarrow |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
Luego $(z_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} z$

b) $\underline{\overset{N}{\Rightarrow}}$ | (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{C}$, luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| \leq \varepsilon$
Pero $z_n - z_m = (x_n - x_m) + i(y_n - y_m)$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n,m \geq N \Rightarrow \begin{cases} |x_n - x_m| \leq |z_n - z_m| \leq \varepsilon \Rightarrow (x_n) \text{ de Cauchy en } \mathbb{R} \\ |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| \leq \varepsilon \Rightarrow (y_n) \text{ de Cauchy en } \mathbb{R}. \end{cases}$

$\underline{\overset{S}{\Leftarrow}}|$ (x_n) de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N' / n,m \geq N' \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon/2$

(y_n) de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N'' / n,m \geq N'' \Rightarrow |y_n - y_m| \leq \varepsilon/2$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \sup(N', N'') / n,m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| \leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Luego (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{C}$.

- CRITERIO DE CAUCHY EN $\mathbb{C}$:

4.2. TEOREMA: Una sucesion (z_n) en $\mathbb{C}$ es convergente si y solo si es de Cauchy.

Dem: $\underline{\overset{N}{\Rightarrow}}|$ Sea z el punto de convergencia de la sucesión (z_n). Entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n,m \geq N \Rightarrow \begin{cases} |z_n - z| \leq \varepsilon/2 \\ |z - z_m| \leq \varepsilon/2 \end{cases}$$

Siendo $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m|$, será:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n,m \geq N \Rightarrow |z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z - z_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Luego (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{C}$.

$\underline{\overset{S}{\Leftarrow}}|$ Si (z_n) es de Cauchy en $\mathbb{C}$ y $z_n = x_n + y_n i$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces por el teorema anterior (x_n) e (y_n) son de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Por el criterio de Cauchy en $\mathbb{R}$, (x_n) e (y_n) son convergentes en $\mathbb{R}$, es decir:

$$(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \quad \wedge \quad (y_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} y$$

Por el teorema anterior $(z_n) \longrightarrow z = x + iy$, luego (z_n) es convergente csqd

5. Valor adherente de una sucesión en $\mathbb{R}$

DEFINICION: Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Un punto $x \in \mathbb{R}$ se dice que es valor adherente de la sucesión (x_n) si:

$$\forall V \in \mathcal{F}(x) \wedge \forall n \in \mathbb{N}, \exists K \geq n, K \in \mathbb{N} / x_K \in V.$$

DEFINICION Equivalente: Sea una sucesión (x_n) en $\mathbb{R}$, y A_1 el rango de la sucesión, es decir, $A_1 = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

Sea $A_2 = \{x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$.

Analogamente $A_n = \{x_n, \dots, x_m, \dots\}$.

Tenemos, por tanto, una familia numerable de conjuntos de puntos de la sucesión. Podemos hablar entonces de la adherencia de estos conjuntos y de la intersección de sus adherencias, es decir, de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$

Veamos que si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n$, x es valor adherente de (x_n), y viceversa.

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in \bar{A}_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall V \in \mathcal{F}(x), V \cap A_n \neq \phi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall V \in \mathcal{F}(x), \exists K \geq n / x_K \in V$$

esta última equivalencia es cierta pues si $x_K \in V \wedge K \geq n$, por la construción de la familia (A_n), se verifica que $x_K \in V \wedge x_K \in A_n \Rightarrow V \cap A_n \neq \phi$.

Luego decir que x es valor adherente a (x_n) equivale a decir que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$

<u>5.1. TEOREMA</u>: Si x es valor adherente de la sucesión (x_n), x es un punto adherente del rango de (x_n), $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostr.: Si $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n \Rightarrow x \in \overline{A}_1 = \overline{\{x_n\}}_{n\in\mathbb{N}}$, luego x es punto adherente del conjunto de puntos de la sucesión.

El recíproco no es cierto.

- Contraejemplo: Sea la sucesión (x_n), $x_n = n$

El punto $1 \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un punto adherente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pero no es valor adherente, pues $1 \notin \overline{A}_2 \Rightarrow 1 \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.

<u>5.2. TEOREMA</u>: Un punto es valor adherente de una sucesión (x_n) si y sólo si existe una subsucesión de la sucesión inicial que converge hacia ese punto.

x valor adherente de $(x_n) \Longleftrightarrow \exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \,/\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{R}} x$

Demostr.: <u>Condición necesaria</u>: x es valor adherente; es decir, $\forall V \in \mathcal{F}(x) \wedge \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n \,/\, x_k \in V$

entonces podemos considerar la bola $B(x,1) \in \mathcal{F}(x)$ y sabemos que ($\cancel{\text{Si}}$ $n_1 \geq 1$)

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \,/\, x_{n_1} \in B(x,1)$$

Consideremos la bola $B(x,\frac{1}{2}) \in \mathcal{F}(x)$, luego tomando un $n_2 \geq n_1 + 1$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \,/\, x_{n_2} \in B(x,\tfrac{1}{2})$$

Para $B(x,\frac{1}{3}) \in \mathcal{F}(x)$, $\exists n_3 \geq n_2 + 1 \,/\, x_{n_3} \in B(x,\frac{1}{3})$

Así sucesivamente, para

$$B(x,\tfrac{1}{k}) \in \mathcal{F}(x), \exists n_k \geq n_{k-1} + 1 \,/\, x_{n_k} \in B(x,\tfrac{1}{k})$$

Hemos formado una subsucesión de (x_n), $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, pues $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$

luego la función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que nos da la subsucesión es creciente (estrictamente).

Además $(x_{n_k}) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$, pues

$$\forall k \in \mathbb{N},\ x_{n_k} \in B(x,\tfrac{1}{k}) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |x_{n_k} - x| < \tfrac{1}{k}$$

Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \,/\, \frac{1}{k_0} < \varepsilon$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} \,/\, k \geq k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - x| < \frac{1}{k} < \varepsilon$.

<u>Condición suficiente</u>: Supuesto que existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) que converge hacia x, hemos de probar que x es valor adherente de (x_n).

$(x_{n_k}) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \Longleftrightarrow \forall V \in \mathcal{F}(x), \exists k'_0 \in \mathbb{N} \,/\, k \geq k'_0 \Rightarrow x_{n_k} \in V$

Siendo la sucesión (n_k) en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente, pues (x_{n_k}) es subsucesión se verifica: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k''_0 \in \mathbb{N} \,/\, n_{k''_0} \geq n$.

Sea $K_0 = \max\{K_0', K_0''\}$, entonces:

$K_0 \geq K_0' \Rightarrow x_{n_{K_0}} \in V$

$K_0 \geq K_0'' \Rightarrow n_{K_0} \geq n_{K_0''} \geq n$

Luego: $\forall V \in \mathcal{F}(x)$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists m = n_{K_0} \geq n \,/\, x_m \in V$

Luego x es un punto adherente de (x_n), csqd.

5.3. COROLARIO: Si (x_n) es una sucesión convergente hacia x en $\mathbb{R}$, entonces x es el único valor adherente de (x_n).

Demostr.: Si $(x_n) \to x$, toda subsucesión (x_{n_K}) converge hacia x, luego x es valor adherente de (x_n), por el teorema anterior.

Supongamos que existe otro valor adherente y de (x_n). Entonces existe una subsucesión (x_{n_K}) que converge hacia y. Pero además (x_{n_K}) converge hacia x, por ser subsucesión de (x_n). Teniendo en cuenta la unicidad del límite de una sucesión se deduce que $x = y$. Luego x es el único valor adherente de (x_n), csqd.

5.4. COROLARIO: Si (x_n) posee una subsucesión (x_{n_K}) que tiene un valor adherente, entonces dicho valor es valor adherente de (x_n)

Demostr.: Si x es valor adherente de la subsucesión (x_{n_K}) existe una subsucesión de ésta $(x_{n_{K_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ que converge hacia x.

Pero $(x_{n_{K_p}})_{p\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de (x_n) pues la composición de dos aplicaciones crecientes $s_2 \circ s_1 : \mathbb{N} \xrightarrow{s_1} \mathbb{N} \xrightarrow{s_2} \mathbb{N}$, $n \longmapsto n_K \longmapsto n_{K_p}$ es una aplicación creciente. Luego x es valor adherente de (x_n), según el teorema 5.2.

EJEMPLOS: ① Sea la sucesión (x_n), $x_n = (-1)^n$. Esta sucesión tiene dos subsucesiones convergentes: $(x_{2n}) \to 1 \wedge (x_{2n+1}) \to -1$. Por tanto 1 y -1 son valores adherentes de (x_n).

② Si una sucesión tiene un solo valor adherente, éste no tiene porqué ser el punto de convergencia, es decir, el recíproco del COROLARIO 5.3., en general, no es cierto. Consideremos la sucesión (x_n), donde $x_{2n} = 1/n$ y $x_{2n+1} = n$ es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$, $x_5 = 3$, $x_6 = \frac{1}{3}$, $x_7 = 4$, ...

La subsucesión (x_{2n}) converge hacia 0, luego 0 es valor adherente, y además el único, de (x_n) y sin embargo no es punto límite de la misma.

5.6. TEOREMA: Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si M es compacto toda sucesión contenida en M posee un valor adherente perteneciente a M.

Demostr.: Sea M un conjunto compacto y (x_n) una sucesión de puntos de M. Hemos de probar que $\exists x \in M \,/\, x$ es valor adherente de (x_n).

Si esto no fuese cierto se verificaría que $\forall x \in M$, x no es valor adherente de (x_n)

lo cual quiere decir que $\forall x \in M, \exists V^x \in \mathcal{F}(x)$ y $\exists n_x \in \mathbb{N} / \forall K \geq n_x, x_K \notin V^x$ (I)

No se pierde ninguna generalidad al considerar V^x abierto, pues si $V^x \in \mathcal{F}(x)$ existe un abierto contenido en él que contiene a x y que verifica la misma propiedad.

Luego a cada $x \in M$ le asociamos un V^x abierto, es decir:

$$M \subset \bigcup_{x \in M} V^x$$

Tenemos entonces un recubrimiento por abiertos de M, del cual, por ser M compacto, se puede extraer un recubrimiento finito. Luego:

$$M \subset \bigcup_{j=1}^{m} V^{x_j}$$

Por otro lado, al punto x_1 se le asocia un natural n_{x_1}, al punto x_2, el natural n_{x_2}, y, ~~así suce~~sivamente, al punto x_m, le corresponde el natural n_{x_m}. Podemos considerar entonces el natural $K \geq \sup\{n_{x_1}, \dots, n_{x_m}\}$

Según (I), por ser $K \geq n_{x_1}$ se verifica que $x_K \notin V^{x_1}$

y también $K \geq n_{x_2} \Rightarrow x_K \notin V^{x_2}, \dots, K \geq n_{x_m} \Rightarrow x_K \notin V^{x_m}$

Luego $x_K \notin \bigcup_{j=1}^{m} V^{x_j} \Rightarrow x_K \notin M$

lo cual es contradicción, pues (x_n) es una sucesión de puntos de M, por hipótesis. Luego (x_n) debe poseer un valor adherente perteneciente a M. csqd.

5.7. COROLARIO: Sea M un conjunto compacto en $\mathbb{R}$. Entonces toda sucesión de puntos de M posee una subsucesión convergente hacia un punto de M.

Demostr.: Si M es compacto, toda sucesión contenida en M posee un valor adherente perteneciente a M, según el teorema anterior. Por tanto, según el teorema 5.2. existe una subsucesión convergente hacia dicho punto. csqd.

Antes de ver un teorema muy importante, llamado de Bolzano-Weierstrass, veremos un lema preliminar.

5.8. LEMA: "Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$, de modo que de toda sucesión infinita contenida en M sea posible extraer una subsucesión convergente hacia un punto de M. Si $(A_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento por abiertos de M, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in M$, la bola $B(x, \varepsilon)$ está contenida en alguno de los A_i."

Téngase en cuenta que este ε es válido para cualquier punto x de M.

Si $M \subset \mathbb{R}$ es tal que de toda sucesión infinita contenida en M sea posible extraer una subsucesión convergente hacia un punto de M, se dice que M posee la propiedad (B-W) de Bolzano-Weierstrass.

Demostr.: Supongamos que la tesis es falsa, es decir, que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in M / B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset A_i, \forall i \in I$$

Afirmar esto equivale a decir que
$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in M$ / $B(x_n,\frac{1}{n})$ no está contenida en ninguno de los A_i
pues $\forall \varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbb{N}$ / $\frac{1}{n}<\varepsilon$.
A cada n natural le asociamos, por tanto, un punto de M. Luego tenemos una sucesión (x_n) de puntos de M. Esta sucesión es infinita, pues de ser finita existiría un $p\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq p$, $x_n=x_p$.
Pero $x_p\in M\subset\bigcup_{i\in I}A_i \Rightarrow \exists i\in I / x_p\in A_i$
Siendo A_i abierto, $\exists \varepsilon'>0$ / $B(x_p,\varepsilon')\subset A_i$
Pero si $\varepsilon'>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ / $n\geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon'$
Tomando un natural $n\geq \max(p,n_0)$ se verifica que $x_n=x_p \wedge \frac{1}{n}<\varepsilon'$, entonces sería $B(x_n,\frac{1}{n})=B(x_p,\frac{1}{n})\subset B(x_p,\varepsilon')\subset A_i$
es decir $B(x_n,\frac{1}{n})\subset A_i$ en contra de lo que se supuso de que $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subset A_i$ para cualquier natural n y para cualquier índice i. Luego (x_n) debe ser infinita.
Como, por hipótesis, M cumple la propiedad B-W:
$\exists (x_{n_K})_{K\in\mathbb{N}}$ / $(x_{n_K})\xrightarrow{\mathbb{R}} x\in M$
Si $x\in M\subset\bigcup_{i\in I}A_i$, $\exists i_0\in I / x\in A_{i_0}$. Como A_{i_0} es abierto:
$\exists h>0$ / $B(x,h)\subset A_{i_0}$ (I)
Consideremos entonces la bola $B(x,h/2)\in\mathcal{F}(x)$
Como $(x_{n_K})\xrightarrow{\mathbb{R}} x$, $\exists K_0\in\mathbb{N}$ / $K\geq K_0 \rightarrow x_{n_K}\in B(x,h/2)\Rightarrow |x_{n_K}-x|<h/2$
Probemos ahora que para $K\geq K_0$, $B(x_{n_K},h/2)\subset B(x,h)$:
$\forall y\in B(x_{n_K},\frac{h}{2}) \Rightarrow |y-x_{n_K}|<h/2$. Luego
$|y-x|\leq|y-x_{n_K}|+|x_{n_K}-x|<\frac{h}{2}+\frac{h}{2}=h$, para $K\geq K_0 \Rightarrow y\in B(x,h)$.

Luego si $K\geq K_0 \Rightarrow B(x_{n_K},h/2)\subset B(x,h)$
Siendo la sucesión (n_K) creciente y $h/2>0$ se verifica que
$\exists K_0'\in\mathbb{N}$ / $K\geq K_0' \Rightarrow \frac{1}{n_K}<\frac{h}{2}$

Tomando entonces $K\geq\max(K_0,K_0')$ se verifica que:
$K\geq K_0' \Rightarrow B(x_{n_K},\frac{1}{n_K})\subset B(x_{n_K},\frac{h}{2})$
$K\geq K_0 \Rightarrow B(x_{n_K},h/2)\subset B(x,h)$

y según (I) $B(x,h)\subset A_{i_0}$
Luego $B(x_{n_K},\frac{1}{n_K})\subset A_{i_0}$

Si hacemos $m=n_K\in\mathbb{N}$, se deduce que $\exists m\in\mathbb{N}$ / $B(x_m,\frac{1}{m})\subset A_{i_0}$
lo cual contradice la hipótesis de que $\forall n\in\mathbb{N}$, $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subset A_i$, $\forall i\in I$.
Luego debe verificarse la tesis. csqd.

5.9. TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS:

Sea M un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces M es compacto si y solo si $\forall (x_n)$ sucesión infinita en M, $\exists (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de (x_n) / $(x_{n_k}) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \in M$.

Demostr.: * Condición necesaria: Trivial por el corolario 5.7.

* Condición suficiente: El conjunto M verifica la propiedad B-W. Hemos de probar que M es compacto. Sea $(A_i)_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de M. Se trata de probar que podemos extraer de $(A_i)_{i\in I}$ un recubrimiento finito.

Por el lema anterior, $\forall x\in M$, $\exists \varepsilon>0$ / $B(x,\varepsilon)$ está contenido en algún A_i.

Sea $x_1 \in M$; entonces podemos hablar de la bola $B(x_1,\varepsilon)$.

Pueden suceder dos casos: a) $M\subset B(x_1,\varepsilon)$ b) $M \not\subset B(x_1,\varepsilon)$.

Si $M \subset B(x_1,\varepsilon)$, por el lema 5.8, $B(x_1,\varepsilon)\subset A_{i_1}$. Entonces $M\subset A_{i_1}$, y hemos encontrado un subrecubrimiento finito de M, extraído de $(A_i)_{i\in I}$.

Si $M\not\subset B(x_1,\varepsilon)$, entonces $\exists x_2\in M$ / $x_2\notin B(x_1,\varepsilon)$, es decir, tal que $|x_2-x_1|\geq\varepsilon$

Al punto x_2 se le asocia la bola $B(x_2,\varepsilon)$. Nos preguntamos ahora si $M\subset B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)$. Si esto es cierto como $B(x_1,\varepsilon)\subset A_{i_1} \wedge B(x_2,\varepsilon)\subset A_{i_2}$, en virtud del lema, habremos obtenido un recubrimiento finito de M extraído de $(A_i)_{i\in I}$: $M\subset A_{i_1}\cup A_{i_2}$.

Si $M\not\subset B(x_1,\varepsilon)\cup B(x_2,\varepsilon)$, $\exists x_3\in M$ / $|x_1-x_3|\geq\varepsilon \wedge |x_2-x_3|\geq\varepsilon$

Y así procederíamos sucesivamente.

Pero este proceso de fabricación es finito, es decir, encontraremos un $x_p\in M$ talque: $M\subset B(x_1,\varepsilon)\cup\ldots\cup B(x_p,\varepsilon)\subset \bigcup_{j=1}^{p} A_{i_j}$

pues si el proceso fuese infinito tendríamos una sucesión (x_n) de puntos de M talque $|x_p-x_q|\geq\varepsilon$, $\forall p,q\in\mathbb{N}$, en cuyo caso ninguna subsucesión de (x_n) sería de Cauchy, y, por tanto, ninguna subsucesión de (x_n) sería convergente, en contra de que M tiene la propiedad B-W.

Luego $M\subset \bigcup_{j=1}^{p} A_{i_p}$

Es decir, hemos extraído de $(A_i)_{i\in I}$ un recubrimiento finito de M. Luego M es compacto. csqd ■

Se puede afirmar aún más: "M es compacto si y solo si para cualquier sucesión de puntos de M, existe una subsucesión de ella que converge hacia un punto de M".

La condición necesaria está ~~ex~~ demostrada en el corolario 5.7.

La condición suficiente, para el caso de que la sucesión sea infinita está demostrada en el teorema de Bolzano-Weierstrass. Si la sucesión es finita, a partir de un término la sucesión se estabiliza, y por tanto converge hacia un punto de M, luego todos los puntos de convergencia pertenecen a M, y por tanto M es cerrado, y además acotado, pues toda sucesión convergente de puntos de M es acotada. Luego M es compacto.

6. LA RECTA REAL AMPLIADA

Se considera la recta real y se introducen dos elementos nuevos que representaremos por $-\infty$ y $+\infty$. Al conjunto

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

se le llama recta real ampliada. Los dos nuevos elementos no pertenecen a $\mathbb{R}$, es decir: $\mathbb{R} \cap \{-\infty, +\infty\} = \phi$.

Vamos a definir un orden $\leq$ en $\overline{\mathbb{R}}$ del siguiente modo:

① $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \iff x \lessdot y$, donde $\lessdot$ es la relación de orden en $\mathbb{R}$.

② Si $x \in \mathbb{R}$, entonces, por definición: $x \leq +\infty \wedge x \neq +\infty \Rightarrow x < +\infty$

y $-\infty \leq x \wedge -\infty \neq x \Rightarrow -\infty < x$

③ Por definición, $-\infty \leq +\infty \wedge -\infty \neq +\infty \Rightarrow -\infty < +\infty$.

Facilmente se comprueba que $(\overline{\mathbb{R}} \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

Podemos, entonces, hablar de intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$:

$[a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a \leq x \leq +\infty\}$

$[-\infty, a] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / -\infty \leq x \leq a\}$

$[-\infty, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / -\infty \leq x \leq +\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

$]a, +\infty] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} / a < x \leq +\infty\}$

6.1. TEOREMA: En $\overline{\mathbb{R}}$ todo conjunto no vacío A posee extremo superior y extremo inferior.

Demostr.: $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ se verifica que $-\infty \leq x \leq +\infty$

Luego todo subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ está acotado.

Veamos los casos siguientes:

- Si $A = \{+\infty\}$, $\sup A = +\infty$
- Si $A = \{-\infty\}$, $\sup A = -\infty$
- Si $A = \{+\infty, -\infty\}$, siendo $-\infty < +\infty$ se deduce que $\sup A = +\infty$.
- Si A no es de la forma de los conjuntos anteriores, existe al menos un real a perteneciente a A, es decir $\exists a \in \mathbb{R} / a \in A$.

Consideramos el conjunto A y el $A' = A \cap [a, +\infty]$

Evidentemente, el supremo de ambos conjuntos es el mismo, en el caso de que exista.

a) Supongamos que $\exists m \in \mathbb{R}$ que es un mayorante de A'. Entonces $A' \subset \mathbb{R}$ y por tanto, por el teorema fundamental del orden existe el supremo de A', y, en consecuencia, el supremo de A.

b) Si ningún número real es cota superior de A', se verifica entonces que la única cota superior de A' es $+\infty$. Por tanto el supremo de A' en $\overline{\mathbb{R}}$ es $+\infty$, y, por consiguiente, el supremo de A existe y es $+\infty$.

Para el extremo inferior se razona de modo análogo.

- <u>Operaciones algebraicas en $\overline{\mathbb{R}}$</u>:

<u>Definiciones</u>: a) Para números reales, las operaciones se definen del mismo modo que en $\mathbb{R}$.

b) Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces, por definición:

- $x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \ \wedge \ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty$
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty \ \wedge \ (-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- $\dfrac{x}{+\infty} = \dfrac{x}{-\infty} = 0.$

c) • $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x > 0 \ : \ x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \ \wedge x(-\infty) = (-\infty) x = -\infty$

• $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, x < 0 \ : \ x(+\infty) = (+\infty) x = -\infty \ \wedge x(-\infty) = (-\infty) x = +\infty$

Como vemos, éstas operaciones no están definidas para todos los elementos de $\overline{\mathbb{R}}$, pues no se ha definido, por ejemplo: $0 \cdot (+\infty)$, $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, $(+\infty) + (-\infty)$, ...

Estos son los llamados casos de indeterminación.

- <u>Topología en $\overline{\mathbb{R}}$</u>:

Recordemos que para definir una estructura de espacio topológico sobre un conjunto, hemos de asignar a cada elemento del conjunto una familia, no vacía, de entornos de dicho elemento que verifique una serie de propiedades. (que se enunciaron en el Tema 2°, apartado 1). En $\overline{\mathbb{R}}$ podemos definir una topología del siguiente modo:

Sea V un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ y x un ~~pu~~ punto de $\overline{\mathbb{R}}$. Consideremos los casos siguientes: a) $x \in \mathbb{R}$ b) $x = +\infty$ c) $x = -\infty$

Para cada uno de estos casos se define:

a) $V \in \mathcal{F}(x) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists r > 0 \, / \,]x-r, x+r[\subset V$

b) $V \in \mathcal{F}(+\infty) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists A \in \mathbb{R} \, / \, [A, +\infty] \subset V$ (o bien $]A, +\infty] \subset V$)

c) $V \in \mathcal{F}(-\infty) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists A \in \mathbb{R} \, / \, [-\infty, A] \subset V$ (o bien $[-\infty, A[\subset V$)

Trivialmente se verifican las propiedades siguientes:

1°) $\forall V \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow x \in \mathcal{F}(x)$ $(+\infty \in [A, +\infty] \subset V)$

2°) $\forall V \in \mathcal{F}(x), W \supset V \Rightarrow W \in \mathcal{F}(x)$

3°) $V_1 \in \mathcal{F}(x) \wedge V_2 \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathcal{F}(x)$

4) $\forall V \in \mathcal{F}(x), \exists W \in \mathcal{F}(x) / V \in \mathcal{F}(y), \forall y \in W.$

7. <u>Convergencia en $\overline{\mathbb{R}}$</u>

Sea (x_n) una sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$.

Se dice que (x_n) converge hacia $x \in \overline{\mathbb{R}}$ si:

$$\forall V \in \mathcal{F}(x), \exists N \in \mathbb{N} \, / \, n \geq N \Rightarrow x_n \in V$$

- <u>Casos particulares</u>: a) $(x_n) \xrightarrow{\overline{\mathbb{R}}} +\infty \Longleftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow x_n \geq A$ (ó $x_n > A$)

pues decir que $\forall V \in \mathcal{F}(+\infty)$ se verifica que $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow x_n \in V$ equivale a decir que $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow x_n \geq A$, pues si $V \in \mathcal{F}(+\infty)$, $\exists A \in \mathbb{R} / [A, +\infty] \subset V$

y decir que $x_n \geq A$ significa que $x_n \in [A, +\infty] \subset V \Rightarrow x_n \in V$.

b) $(x_n) \xrightarrow{\overline{\mathbb{R}}} -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow x_n \leq A$.

– PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES EN $\overline{\mathbb{R}}$

7.1. TEOREMA: Sea (x_n) una sucesión acotada superiormente en $\mathbb{R}$ (resp. inferiormente). Entonces (x_n) no converge hacia $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Demostr.: Si (x_n) es acotada superiormente en $\mathbb{R}$, entonces: $\exists B \in \mathbb{R} / x_n \leq B, \forall n \in \mathbb{N}$.
Tomando entonces un $A \in \mathbb{R}$ de modo que $A > B$, se verifica que

$$x_n \notin [A, +\infty] \quad , \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $\exists V \in \mathcal{F}(+\infty) / x_n \notin V, \forall n \in \mathbb{N}$, luego (x_n) no converge hacia $+\infty$.
Demostrado análogo para una sucesión acotada inferiormente.

[redacted] El contrario no es cierto, es decir, si una sucesión no está acotada superiormente, no tiene porque converger hacia $+\infty$.
Por ejemplo la sucesión de término general $x_n = (-1)^n \cdot n$ no está acotada superiormente en $\mathbb{R}$, pues para cualquier número real se puede encontrar un $2n \in \mathbb{N}$ tal que $x_{2n} = 2n$ sea mayor que dicho real. Sin embargo, no existe ningún natural a partir del cual todos los términos de la sucesión estén contenido en cualquier entorno de $+\infty$, pues la sucesión va tomando alternativamente valores positivos y negativos.

7.2. TEOREMA: Sea (x_n) una sucesión de puntos de $\mathbb{R}$ no acotada superiormente (resp. inferiormente). Si (x_n) es creciente (resp. decreciente) entonces (x_n) converge hacia $+\infty$ en $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. hacia $-\infty$)

Demostr.: Si (x_n) no está acotada superiormente

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / x_{n_0} \geq A$$

Siendo (x_n) creciente, si $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq x_{n_0}$

Luego $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow x_n \geq A$

Luego $(x_n) \xrightarrow{\overline{\mathbb{R}}} +\infty$

Consecuencias inmediatas: ① Si $(x_n) \longrightarrow +\infty$ y existe una sucesión (y_n) tal que $y_n \geq x_n$, para $n \geq n_0$, entonces $(y_n) \longrightarrow +\infty$.

D.: Si $(x_n) \longrightarrow +\infty \Rightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N} / n \geq N_0 \Rightarrow x_n \geq A$.
Tomando $N = \max(N_0, n_0)$ resulta que $y_n \geq x_n \geq A$. Luego:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow y_n \geq A$$

Luego $(y_n) \longrightarrow +\infty$

② Si $(x_n) \longrightarrow -\infty$ y existe (y_n) tal que $n \geq n_0 \Rightarrow y_n \leq x_n$, entonces $(y_n) \longrightarrow -\infty$.

8. Límite superior y límite inferior

Sea (x_n) una sucesión de números reales. Consideremos los conjuntos $A_1=\{x_1,x_2,\dots,x_n,\dots\}$, $A_2=\{x_2,x_3,\dots,x_n,\dots\}$, $\dots$, $A_K=\{x_K,x_{K+1},\dots,x_n,\dots\}$, $\dots$

Es decir, tenemos una familia $(A_K)_{K\in\mathbb{N}}$, donde $A_K=\{x_n / n\geq K\}$.

Sea X_1 el supremo de A_1 en $\overline{\mathbb{R}}$, X_2 el supremo de A_2 en $\overline{\mathbb{R}}$, $\dots$, $X_K=\sup A_K$, en $\overline{\mathbb{R}}$, $\dots$

Análogamente, sean $Y_1, Y_2,\dots, Y_K,\dots$ los ínfimos de $A_1, A_2,\dots,A_K,\dots$ en $\overline{\mathbb{R}}$

Tenemos entonces dos sucesiones nuevas, las sucesiones de los supremos y los ínfimos de A_K: $(X_K)_{K\in\mathbb{N}}$ y $(Y_K)_{K\in\mathbb{N}}$

Estas sucesiones tienen supremo e ínfimo en $\overline{\mathbb{R}}$; en particular, existen en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\inf_{K\in\mathbb{N}} X_K \quad \text{y} \quad \sup_{K\in\mathbb{N}} Y_K$$

Es decir, existen: $\inf\limits_{K\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\geq K} x_n$ y $\sup\limits_{K\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n\geq K} x_n$. Entonces:

DEFINICION: Se llama límite superior de la sucesión x_n y escribiremos $\overline{\lim}\, x_n$ a $\inf\limits_{K\in\mathbb{N}} X_K$, y límite inferior de la sucesión x_n, $\underline{\lim}\, x_n$, a $\sup\limits_{K\in\mathbb{N}} Y_K$.

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_{K\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq K} x_n \qquad \underline{\lim}\, x_n = \sup_{K\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq K} x_n$$

8.1. TEOREMA: Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. Entonces

$$\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$$

Demostr.: Si probamos que $\forall p,q\in\mathbb{N}$ se verifica que $Y_p\leq X_q$, tendremos, fijando p, que $Y_p \leq \inf\limits_{q\in\mathbb{N}} X_q = \overline{\lim}\, x_n$

ya que Y_p es una cota inferior de los X_q, $q\in\mathbb{N}$, y, por tanto, será menor o igual que el ínfimo. Como esto se verifica $\forall p\in\mathbb{N}$ tendremos que:

$$\sup_{p\in\mathbb{N}} Y_p \leq \inf_{q\in\mathbb{N}} X_q \Rightarrow \underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n.$$

Probaremos entonces que $\forall p,q\in\mathbb{N}$, $Y_p\leq X_q$.

$\forall p,q\in\mathbb{N}$ $Y_p\leq Y_{p+q}$, pues $A_{p+q}\subset A_p$ (por construcción de A_K), entonces el $\inf A_p\leq \inf A_{p+q}$, pues todos los elementos de A_{p+q} están en A_p, y algunos más, entre los cuales puede existir un elemento menor que el ínfimo de A_{p+q}.

Tambien $Y_{p+q}\leq X_{p+q}$, pues $\inf A_{p+q}\leq \sup A_{p+q}$,

y $X_{p+q}\leq X_q$ (p. ej. $\sup A_2\leq \sup A_1$, pues $A_2\subset A_1 \Rightarrow \sup A_1$ es cota superior de A_2 y, por tanto, será mayor que $\sup A_2$)

En definitiva queda que: $Y_p\leq Y_{p+q}\leq X_{p+q}\leq X_q$. c.q.d.

8.2. TEOREMA: Sea (x_n) una sucesión en $\mathbb{R}$. La sucesión (x_n) converge en $\mathbb{R}$ si y solo si los límites superior e inferior son números reales y coinciden.

Demostr.: N) Si $(x_n)\xrightarrow{\mathbb{R}} x\in\mathbb{R}$, entonces

$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} / n\geq N \Rightarrow x_n\in[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, es decir, $x-\varepsilon\leq x_n\leq x+\varepsilon$

Luego $A_N=\{x_N, x_{N+1}, \dots\}$ está acotado superiormente por $x+\varepsilon$. Luego $\sup A_N = X_N \leq x+\varepsilon$, por ser $x+\varepsilon$ cota superior de A_N, siendo

$\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k \leq X_N \leq x+\varepsilon$ se deduce que $\overline{\lim}\, x_n \leq x+\varepsilon$

y también $\underline{\lim}\, x_n \leq x+\varepsilon$, pues $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n \leq x+\varepsilon$.

Además, A_N está acotado inferiormente por $x-\varepsilon$, luego:

$$x-\varepsilon \leq \inf A_N = Y_N$$

Siendo $Y_N \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_k = \underline{\lim}\, x_n$

se deduce que $x-\varepsilon \leq \underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n \leq x+\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$.

Por tanto $\underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R} \wedge \overline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$, y por ser $\forall \varepsilon>0$ debe verificarse:

$$\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$$

pues si fuesen distintos siempre se puede encontrar un $\varepsilon>0$ tal que uno de los límites, al menos, no pertenezca a $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ contra lo que se ha probado.

$\Leftarrow$] Sea $\underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = x$. Hemos de probar que (x_n) converge hacia x en $\mathbb{R}$.

Para cualquier $\varepsilon>0$ se verifica que $\overline{\lim}\, x_n < x+\varepsilon$, luego

$$\exists K'_0 \in \mathbb{N} \,/\, X_{K'_0} \leq x+\varepsilon$$

pues si $\forall k\in\mathbb{N} \,/\, X_k > x+\varepsilon$ se deduciría que $x+\varepsilon$ es una cota inferior de todo A_K mayor ~~(que)~~ que $x = \inf X_K$, lo cual es absurdo.

Por tanto, $\exists K'_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq K'_0 \Rightarrow x_n \leq x+\varepsilon$, pues si $n \geq K'_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \in A_{K'_0} \Rightarrow x_n \leq \sup A_{K'_0} = X_{K'_0} \leq x+\varepsilon$

Análogamente: $\forall \varepsilon>0, \exists K''_0 \in \mathbb{N} \,/\, x-\varepsilon \leq Y_{K''_0}$, pues $x = \underline{\lim}\, x_n = \sup Y_K$ y de no existir ningún natural tal que $x-\varepsilon \leq Y_{K''_0}$, sería $x-\varepsilon$ una cota superior de todos los Y_K, $k\in\mathbb{N}$, y menor que $x=\sup Y_K$, lo cual es absurdo.

Entonces, si $n \geq K''_0 \Rightarrow x_n \in A_{K''_0} \Rightarrow x_n \geq Y_{K''_0} = \inf A_{K''_0}$.

Luego $x-\varepsilon \leq x_n$

Tomando $K = \max(K'_0, K''_0)$ se deduce que:

$$\forall \varepsilon>0, \exists K \in \mathbb{N} \,/\, n \geq K \Rightarrow x_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

Luego $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x \in \mathbb{R}$. csqd.

8.3. TEOREMA: Sea (x_n) una sucesión de números reales. Entonces

a) (x_n) está acotada superiormente sii $\overline{\lim}\, x_n < +\infty$.

b) (x_n) está acotada inferiormente sii $\underline{\lim}\, x_n > -\infty$

Demostr.: a) $\Rightarrow$] (x_n) acotada superiormente $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \,/\, x_n \leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

K es una cota superior de $A_1 \Rightarrow X_1 = \sup A_1 \leq K$.

Luego, como $\inf X_k \leq X_1$ se deduce que $\overline{\lim}\, x_n \leq K < +\infty$

S| Si $\overline{\lim}\, x_n < +\infty \Rightarrow P = \overline{\lim}\, x_n = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k \in \mathbb{R}$

Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists K_0 \in \mathbb{N} / X_{K_0} < P+\varepsilon$

pues si $\exists \varepsilon > 0 / \forall K_0 \in \mathbb{N},\ X_K \geq P+\varepsilon$

sería $P+\varepsilon$ cota inferior y P no sería el ínfimo, lo que contradice la hipótesis.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, K_0 \in \mathbb{N} / X_{K_0} < P+\varepsilon$.

Si $n \geq K_0 \Rightarrow x_n \leq X_{K_0}$, pues $x_n \in A_{K_0}$ y $X_{K_0} = \sup A_{K_0}$

Luego a partir de un natural, K_0, todos los términos de la sucesión están acotados por $P+\varepsilon$; los restantes términos de la sucesión, que son un número finito de números reales, tambien están acotados, luego la sucesión está acotada.

b) N| (x_n) acotada inferiormente $\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{R} / x_n \geq C,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Siendo $Y_1 = \inf A_1 = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$ y C una cota inferior de A_1 se deduce que $Y_1 \geq C$. Como $Y_1 \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_K$, se deduce que $C \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_K =$

$= \underline{\lim}\, x_n$, luego $-\infty < \underline{\lim}\, x_n$, pues $C \in \mathbb{R}$.

S| Si $\underline{\lim}\, x_n > -\infty \Rightarrow Q = \underline{\lim}\, x_n \in \mathbb{R}$.

Siendo $Q = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_K$, dado $\varepsilon > 0$ se verifica que $\exists\, K_0 \in \mathbb{N} / Q-\varepsilon < Y_{K_0}$

pues de verificarse lo contrario sería $Q-\varepsilon$ una cota superior de los Y_K mayor o igual que Y_{K_0} y menor estrictamente que Q, lo cual contradice que $Q = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} Y_K$.

Luego $\exists\, K_0 \in \mathbb{N} / Q-\varepsilon < Y_{K_0}$

Si $n \geq K_0 \Rightarrow x_n \in A_{K_0} \Rightarrow x_n \geq Y_{K_0} = \inf A_{K_0}$

Luego $Q-\varepsilon < x_n$, para $n \geq K_0$

Es decir, a partir de un término la sucesión está acotada inferiormente. Los anteriores, que son un número finito de números reales, tambien están acotados inferiormente, luego la sucesión esta acotada inferiormente, c.s.q.d.

9. SUCESIONES DOBLES. LIMITES REITERADOS

DEFINICION: Se llama sucesión doble a una aplicación

$$X : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(m,n) \longmapsto X(m,n) = x_{m,n}.$$

La sucesión la representaremos por $(x_{m,n})$.

DEFINICION: CONVERGENCIA DE SUCESIONES DOBLES:

Sea $(x_{m,n})$ una sucesión doble de números reales. Se dice que $(x_{m,n})$ tiene por límite $x \in \mathbb{R}$ si verifica que

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / m, n \geq N \Rightarrow |x_{m,n} - x| \leq \varepsilon$.

Muchos teoremas de los que se han dado para sucesiones en $\mathbb{R}$ son válidos para sucesiones dobles. Sin embargo, prestaremos mayor atención a otros aspectos totalmente nuevos de las sucesiones dobles.

Una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ se puede expresar como una sucesión doble convergente hacia 0. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy, entonces

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / m, n \geq N \Rightarrow |x_m - x_n| \leq \varepsilon$.

Consideremos una sucesión doble $(y_{m,n})$ cuyo término general es

$y_{m,n} = x_m - x_n$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / m, n \geq N \Rightarrow |y_{m,n}| \leq \varepsilon$

lo que significa que $(y_{m,n}) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$.

LIMITES REITERADOS

Sea $(x_{m,n})$ una sucesión doble en $\mathbb{R}$. Si fijamos el valor del índice m obtenemos una sucesión simple en $\mathbb{R}$: $x_{m,1}, x_{m,2}, \ldots, x_{m,n}, \ldots$ La cual puede ser convergente en $\mathbb{R}$. Es decir, podemos hablar, para cada valor de m, de $y_m = \lim_{n \to \infty} x_{m,n}$ (que representaremos por $\lim_n x_{m,n}$).

Variando la m podemos obtener una sucesión (y_m) en $\mathbb{R}$, la cual puede ser convergente. En caso de que exista $\lim_{m \to \infty} y_m = \lim_m y_m$, le llamaremos primer límite reiterado. Entonces, el primer límite reiterado es:

$$\lim_m y_m = \lim_{m \to \infty} \left(\lim_{n \to \infty} x_{m,n} \right).$$

Analogamente podemos fijar el valor del índice n y obtendremos una sucesión $x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{m,n}, \ldots$ la cual puede converger a un punto z_n. Variando la n podemos considerar la sucesión (z_n). Si existe $\lim_{n \to \infty} z_n = \lim_n z_n$ le llamaremos segundo límite reiterado. Entonces el segundo límite reiterado es:

$$\lim_n z_n = \lim_n \left(\lim_m x_{m,n} \right)$$

Cabe preguntarse, entonces, que relación existe entre los límites reiterados y el límite de la sucesión doble, es decir entre $\lim_m y_m$, $\lim_n z_n$ y $\lim_{(m,n)} x_{m,n}$.

Veamos dos teoremas que los relacionan de algun modo.

9.1. TEOREMA: Sea $(x_{m,n})$ una sucesión doble convergente hacia un punto x. Supongamos que existe un natural N' a partir del cual existe $y_m = \lim_n x_{m,n}$. Entonces existe $\lim_m y_m = \lim_m \left(\lim_n x_{m,n} \right)$ y coincide con el límite de $(x_{m,n})$, x. Análogamente, si existe un natural N'' a partir del cual existe $z_n = \lim_m x_{m,n}$, entonces existe $\lim_n z_n$ y vale x

Demostr.: Por hipótesis $\lim_{(m,n)} (x_{m,n}) = x$. Entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / m,n \geq n_0 \Rightarrow |x_{m,n} - x| \leq \varepsilon \qquad (I).$$

Se trata de probar que $\lim_m y_m = x$.

Sabemos, por hipótesis, que: $\exists N' \in \mathbb{N} / m \geq N' \Rightarrow \exists\, y_m = \lim_n x_{m,n}$

Entonces si $m \geq N' \Rightarrow |y_m - x| = |\lim_n x_{m,n} - x| =$

$= |\lim_n (x_{m,n} - x)| = \lim_n |x_{m,n} - x|$ (esto quiere decir que la función valor absoluto es continua, es decir, que $\lim |x_n| = |\lim x_n|$, (lo probaremos más adelante)).

Sea $N = \max(n_0, N')$. Entonces $N \geq n_0 \Rightarrow (m,n \geq n_0 \Rightarrow |x_{m,n} - x| \leq \varepsilon)$

y $N \geq N' \Rightarrow m \geq N' \Rightarrow |y_m - x| = \lim_n |x_{m,n} - x|$

Entonces: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / m,n \geq N \Rightarrow |y_m - x| = \lim_n |x_{m,n} - x| \leq \lim \varepsilon$

la sucesión constante ε tiene por límite ε. Luego:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / m,n \geq N \Rightarrow |y_m - x| \leq \varepsilon$

Lo que significa que $\lim_m y_m = x$

Análogamente: $(\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 = \max(N'', n_0) / m,n \geq N_1 \Rightarrow |z_n - x| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (\lim_n z_n = x)$ c.s.q.d.

NOTA: El valor absoluto transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes.

Es decir si $\lim x_n = x$, entonces $\lim |x_n| = |\lim x_n| = |x|$.

Si $\lim x_n = x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |x_n - x| \leq \varepsilon$.

Siendo $||x_n| - |x|| \leq |x_n - x|$ se deduce que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow ||x_n| - |x|| \leq \varepsilon$

Luego $\lim |x_n| = |\lim x_n|$.

OBSERVACION: El teorema dice que si existe el límite de la sucesión doble, y existen $y_m = \lim_n x_{m,n}$ y $z_n = \lim_m x_{m,n}$ a partir de ciertos números naturales entonces existen los límite reiterados y coinciden con el límite de $(x_{m,n})$. Sin embargo, que existan los límites reiterados no implica que exista el límite de la sucesión doble. Sea, por ejemplo, la sucesión doble $(x_{m,n})$, con $x_{m,n} = \frac{m-n}{m+n}$. Entonces:

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\lim_n x_{m,n} = -1$; luego $\forall m \in \mathbb{N}$, $y_m = -1$. Luego $\lim_m y_m = -1$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_m x_{m,n} = 1$, luego $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 1$ y $\lim_n z_n = 1$.

Sin embargo, no existe $\lim_{(m,n)} x_{m,n}$, pues de existir, en virtud del teorema anterior, tendría que coincidir con los límites reiterados, lo cual no puede ser, pues estos son distintos.

El teorema no asegura tampoco la existencia de $y_m = \lim_n x_{m,n}$ y $z_n = \lim_m x_{m,n}$; afirma que de existir estos límites, los límites reiterados coincidirán con el límite de la sucesión doble. Sea por ejemplo la sucesión: $(x_{m,n})$ tal que $x_{m,n} = (-1)^{m+n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$

Evidentemente $\lim_{(m,n)} x_{m,n} = 0$, pues para valores suficientemente grandes de m y n, $x_{m,n}$ se puede hacer tan pequeño como se quiera en valor absoluto. Sin embargo no existen los límites y_m y z_n, pues si fijamos el índice m, por ejemplo, pongamos $m=m_0$, tendremos que

$$x_{m_0,n}=(-1)^{m_0+n}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{n}\right)$$

y no existe $y_{m_0}=\lim_n (-1)^{m_0+n}\left(\frac{1}{m_0}+\frac{1}{n}\right)$, pues los términos de la sucesión se agrupan en entornos de $-\frac{1}{m_0}$ y $\frac{1}{m_0}$

Tampoco existen los z_n, para ningún $n\in\mathbb{N}$.

9.2. TEOREMA: Sea $(x_{m,n})$ una sucesión de números reales. Supongamos que para cualquier valor natural de m la sucesión $x_{m,1}, x_{m,2}, \dots, x_{m,n}, \dots$ converge uniformemente respecto de m hacia un punto y_m. Supongamos que para cualquier n natural existe $z_n=\lim_m x_{m,n}$ (la convergencia de la sucesión $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{m,n} \dots$ no tiene porque ser uniforme). Entonces existen el límite de la sucesión $(x_{m,n})$ y los límites reiterados, y coinciden.

Demostr.: Decir que $(x_{m,n})$ converge uniformemente respecto de m hacia y_m significa que $\forall\varepsilon>0, \exists N'\in\mathbb{N} / n\geq N' \Rightarrow |x_{m,n}-y_m|\leq\varepsilon$.

– Veamos que existe el primer límite reiterado $\lim_m y_m$. Probaremos, entonces, que (y_m) es una sucesión de Cauchy, con lo cual queda garantizada la convergencia.

Se trata de probar que $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}/ p,q\geq N \Rightarrow |y_p-y_q|\leq\varepsilon$.

$$|y_p-y_q|=|y_p-x_{p,k}+x_{p,k}-z_k+z_k-x_{q,k}+x_{q,k}-y_q|\leq|y_p-x_{p,k}|+|x_{p,k}-z_k|+|z_k-x_{q,k}|+|x_{q,k}-y_q|.$$

$x_{m,1},x_{m,2},\dots,x_{m,n},\dots \xrightarrow{\text{unif.}} y_m \Rightarrow \forall\varepsilon>0, (\frac{\varepsilon}{4}), \exists N'\in\mathbb{N}/p,q\geq N' \Rightarrow \left(|x_{p,k}-y_p|\leq\frac{\varepsilon}{4} \wedge |x_{q,k}-y_q|\leq\frac{\varepsilon}{4}\right)$

Si $\forall n\in\mathbb{N}, \exists z_n=\lim_m x_{m,n} \Rightarrow \forall\varepsilon>0, (\frac{\varepsilon}{4}), \exists N''\in\mathbb{N}/p,q\geq N''\Rightarrow\left(|x_{p,k}-z_k|\leq\frac{\varepsilon}{4} \wedge |x_{q,k}-z_k|\leq\frac{\varepsilon}{4}\right)$

Entonces: $\forall\varepsilon>0, \exists N=\max(N',N'')/p,q\geq N \Rightarrow |y_p-y_q|\leq$

$$\leq|y_p-x_{p,k}|+|x_{p,k}-z_k|+|z_k-x_{q,k}|+|x_{q,k}-y_q|\leq\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Luego $\exists x\in\mathbb{R}/ x=\lim_{m\to\infty} y_m$.

– Veamos que existe $\lim_{(m,n)} x_{m,n}$ y que coincide con x.

$(y_m)\longrightarrow x \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N_0'\in\mathbb{N}/m\geq N_0' \Rightarrow |y_m-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

$x_{m,1},x_{m,2},\dots,x_{m,n},\dots\xrightarrow{\text{unif.}} y_m \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N'\in\mathbb{N}/ n\geq N' \Rightarrow |x_{m,n}-y_m|\leq\frac{\varepsilon}{2}, \forall m\in\mathbb{N}$

Si $N=\max(N_0',N')$, se verifica que:

$\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}/m,n\geq N \Rightarrow |x_{m,n}-x|\leq|x_{m,n}-y_m|+|y_m-x|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$

Luego $\lim_{(m,n)} x_{m,n}=x$.

– Por último, veamos que $\lim z_n = x$.

Por la hipótesis $\forall n\in\mathbb{N}, \exists z_n=\lim_m x_{m,n}$

Por el teorema 9.1. existe el límite de (z_n) y coincide con el límite de la sucesión. Luego $\lim_n z_n=x$. c.s.q.d.