TEMA 4º: LIMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

1. Limite de una función en un punto

DEFINICION: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A y $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de A en $\mathbb{R}$. Se dice que λ es el limite de f en el punto x_0 si y solo si para cualquier ε positivo, existe un $\delta > 0$, función de ε, tal que si $|x - x_0| \leq \delta$, $x \in A \wedge x \neq x_0$, entonces $|f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$.

Se utilizan las notaciones siguientes:

$$\lambda = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) \quad , \quad \lambda = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A, x \neq x_0}} f(x) \quad , \quad \lambda = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Entonces, por definición:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A, x \neq x_0}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon \right)$$

OBSERVACIONES: a) Se impone la condición de que $x_0 \in A'$ por que en este caso $\forall V \in \mathcal{F}(x_0)$, $(V - \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$, o bien $\forall \delta > 0, ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ lo cual garantiza la existencia de puntos x que verifican que $|x - x_0| \leq \delta$.

b) Tengase en cuenta que x_0 no tiene porque pertenecer a A.

c) De la definición se deduce inmediatamente que:

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \neq x_0}{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A} \Rightarrow f(x) \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \right) \iff$$

$$\iff \forall V \in \mathcal{F}(\lambda), \exists W \in \mathcal{F}(x_0) \,/\, f[(W - \{x_0\}) \cap A] \subset V$$

Nuevamente se observa la necesidad de que $x_0 \in A'$, para que $(W - \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.

1.1. TEOREMA: Si $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene limite en el punto x_0, este es único.

Demostr.: Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda_1$ y que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda_2$.

Probaremos que $\lambda_1 = \lambda_2$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda_1 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \,/\, \underset{x \in A, x \neq x_0}{|x - x_0| \leq \delta_1} \Rightarrow |f(x) - \lambda_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda_2 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \,/\, \underset{x \in A, x \neq x_0}{|x - x_0| \leq \delta_2} \Rightarrow |f(x) - \lambda_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2)$. Siendo x_0 punto de acumulación de A se deduce que $\exists x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\}) \cap A$, es decir, $\exists x \in A \,/\, x \neq x_0 \wedge |x - x_0| \leq \delta$.

Entonces $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq |\lambda_1 - f(x)| + |f(x) - \lambda_2|$

$|x - x_0| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - \lambda_1| \leq \varepsilon/2$

$|x - x_0| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - \lambda_2| \leq \varepsilon/2$

Luego $|\lambda_1 - \lambda_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, luego $\lambda_1 = \lambda_2$ c.s.q.d.

2. Limites laterales

EJEMPLO: Sea $A = [a, b]$ intervalo en la recta real. Consideremos la función $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Podemos hablar entonces de $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ y $\lim_{\substack{x \to b \\ x \in A}} f(x)$

Siendo $x \in A$ se deduce para el primer caso que $x > a$, pues $x \neq a$, y para el segundo, $x < b$, pues $x \neq b$. Entonces:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \,/\, \underset{x>a}{x - a \leq \delta_1} \Rightarrow |f(x) - \lambda_1| \leq \varepsilon\right)$$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x \in A}} f(x) = \lambda_2 \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \,/\, \underset{x<b}{b - x \leq \delta_2} \Rightarrow |f(x) - \lambda_2| \leq \varepsilon\right)$$

Este ejemplo se generaliza en el concepto de límite lateral.

DEFINICIONES: ⓐ LIMITE POR LA DERECHA: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x > x_0,\, x \in I}{x - x_0 \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon\right)$$

ⓑ LIMITE POR LA IZQUIERDA: Analogamente

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x < x_0,\, x \in I}{x_0 - x \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon\right)$$

Se suele utilizar las notaciones siguientes:

a) $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lambda$ b) $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lambda$

2.1. TEOREMA: Si $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene por límite λ en el punto x_0, los límites laterales existen y son iguales a λ. Recíprocamente, si los límites laterales existen y coinciden, entonces existe el límite de la función y coincide con aquellos.

Demostr.: N| $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \neq x_0}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x > x_0, \text{ entonces } x - x_0 \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+} f(x) = \lambda. \\ (x < x_0, \text{ entonces } x_0 - x \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lambda \end{cases}$$

S| Si $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lambda \Rightarrow$

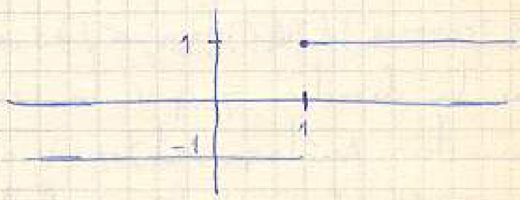
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \begin{cases} x - x_0 \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon & (x > x_0) \\ x_0 - x \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon & (x < x_0). \end{cases}$$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \neq x_0}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$

De donde se deduce que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

EJEMPLOS: ① Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} = 1 \text{ si } x \geq 1 \\ = -1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$

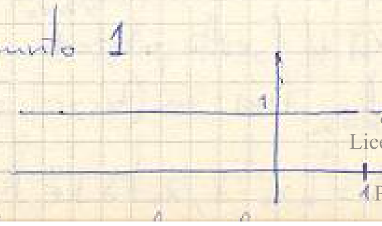


Evidentemente $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1 \wedge \lim_{x \to 1-} f(x) = -1$

Luego la función no posee límite en el punto 1.

② La función

$$f(x) = \begin{cases} = 1 \text{ si } x > 1 \\ = 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$$



3. Continuidad de una función en un punto

DEFINICION: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de A. Sea la función $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es continua en el punto x_0 si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| \leq \delta$, $x \in A$, entonces $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

f continua en $x_0 \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon\right)$ (I)

OBSERVACION: Si x_0 es un punto aislado de A se verifica trivialmente que f es continua en x_0, pues si x_0 es aislado, $\exists \delta > 0 \,/\, B(x_0, \delta) \cap A = \{x_0\}$.

Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

pues si $x \in B(x_0, \delta) \cap A$, se deduce que $x = x_0$. Luego $f(x) = f(x_0)$, de donde $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

3.1. TEOREMA: Sea A subconjunto de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de acumulación de A, $x_0 \in A$ y $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces:

f es continua en $x_0 \iff \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$

Demostr: $\underline{N}$ | Si f es continua, según (I) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$

Pues si $x = x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 0 \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

y si $x \neq x_0$ se tiene la definición de límite en x_0.

$\underline{S}$ | Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = f(x_0)$ entonces, por definición

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \neq x_0,\, x \in A}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

Lo cual nos dice que f es continua en el punto x_0, c.s.q.d.

Analogamente, podemos hablar de la continuidad lateral:

- f es continua por la derecha en $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x > x_0,\, x \in A}{x - x_0 \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
- f es continua por la izquierda en $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x < x_0,\, x \in A}{x_0 - x \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

3.2. TEOREMA: Una función es continua en un punto si y solo si es continua por la derecha y por la izquierda en dicho punto.

Demostr: Análoga al teorema 2.1.

3.3. TEOREMA: Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de A. Supongamos que existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. Entonces

$\exists V \in \mathcal{F}(x_0) \,/\, f$ está acotada en $(V - \{x_0\}) \cap A$.

Demostr: $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A,\, x \neq x_0}{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \Rightarrow f(x) \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]\right)$

Si $\exists \delta > 0$, $\exists V = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que

$\forall x \in (V-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$

Luego $\lambda+\varepsilon$ es una cota superior de $f(x)$, $\forall x \in (V-\{x_0\}) \cap A$, y $\lambda-\varepsilon$ es una cota inferior. Es decir, la función está acotada localmente. c.s.q.d.

3.4 COROLARIO: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en el punto x_0 de A. Entonces $\exists\, V \in \mathcal{F}(x_0)$ / f está acotada en $V \cap A$.

Demostr.: Si x_0 es un punto aislado de A existe un entorno V de x_0 tal que $V \cap A = \{x_0\}$. Entonces si $x \in V \cap A$, $x = x_0$ luego $f(x) = f(x_0)$ el cual existe pues f es continua en x_0. Luego f está acotada en $V \cap A$.

Si x_0 es un punto de acumulación de A, por el teorema anterior, f está acotada en $(V-\{x_0\}) \cap A$ para un cierto $V \in \mathcal{F}(x_0)$. Solo queda probar que en x_0 la función está acotada, lo cual es trivial, pues f está definida en x_0, por ser continua en dicho punto. Luego $f(x_0) \in \mathbb{R}$ y por tanto está acotado.

3.5. TEOREMA: Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in A'$. Supongamos que existe $\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Sea α un número real; entonces si $\lambda < \alpha$

$\exists\, V \in \mathcal{F}(x_0)$ / $f(x) < \alpha$, $\forall x \in (V-\{x_0\}) \cap A$.

Análogamente, si $\lambda > \alpha$

$\exists\, V \in \mathcal{F}(x_0)$ / $f(x) > \alpha$, $\forall x \in (V-\{x_0\}) \cap A$.

Demostr.: Si $\lambda < \alpha$ entonces $\alpha - \lambda > 0$.

Consideremos un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < \alpha - \lambda$. Siendo $\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x)$ se deduce que $\exists\, \delta > 0$ / $\underset{x \neq x_0}{x \in} [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap A \Rightarrow f(x) \leq \lambda + \varepsilon$

Pero $\lambda + \varepsilon < \lambda + (\alpha - \lambda) = \alpha$. Por tanto:

$\exists\, V = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ / $x \in (V-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) < \alpha$.

Si $\lambda > \alpha \Rightarrow \lambda - \alpha > 0$. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}$ / $0 < \varepsilon < \lambda - \alpha$.

Entonces $\exists\, \delta > 0$ / $\underset{x \neq x_0}{x \in} [x_0-\delta, x_0+\delta] \cap A \Rightarrow \lambda - \varepsilon \leq f(x)$

Luego $\exists\, V = [x_0-\delta, x_0+\delta]$ / $x \in (V-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow \lambda - \varepsilon \leq f(x)$

Pero $\lambda - \varepsilon > \lambda - (\lambda - \alpha) = \alpha$. Luego $f(x) > \alpha$. c.s.q.d.

3.6. TEOREMA: Supongamos que $\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x)$, con $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces si $\lambda \neq 0$, existe $V \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que f tiene en $(V-\{x_0\}) \cap A$ el mismo signo que λ.

Demostr.: Si $\lambda \neq 0$ se verifica que $\lambda > 0 \vee \lambda < 0$.

Si $\lambda > 0$, según el teorema anterior, $\exists\, V \in \mathcal{F}(x_0)$ / $f(x) > 0$, $\forall x \in (V-\{x_0\}) \cap A$

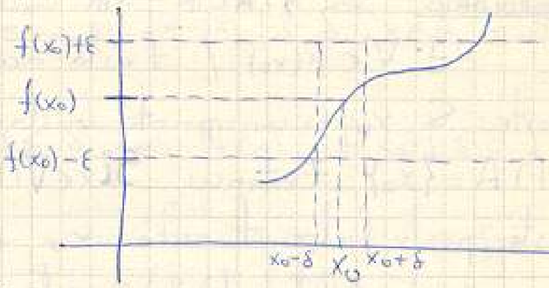
Si $\lambda < 0$, $\exists\, V \in \mathcal{F}(x_0)$ / $x \in (V-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) < 0$. c.s.q.d.

3.7. COROLARIO: Si $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in A$ y $f(x_0) \neq 0$ entonces existe $V \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que en $V \cap A$ la función no se anula y todos sus valores tienen el mismo signo que f en el punto de x_0.

Demostr: Si x_0 es un punto aislado, existe $V \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que si $x \in V \cap A \Rightarrow x = x_0$. Luego $f(x) = f(x_0)$.

Si x_0 es un punto de acumulación de A, por la continuidad de f en x_0

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lambda$;



Por el teorema anterior

$\exists V \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que f tiene en $(V - \{x_0\}) \cap A$ el mismo signo que $f(x_0)$; y en x_0 f está definida. Luego en $V \cap A$ f tiene el mismo signo que $f(x_0)$. csqd

<u>3.8. TEOREMA</u>: Sean f, g y h funciones definidas de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea x_0 un punto de acumulación de A. Supongamos que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$. Entonces, si $(\exists V \in \mathcal{F}(x_0) / x \in (V - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x))$ se verifica que $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda$.

Es decir, si $h(x)$ es una función localmente intermedia entre dos funciones f y g que tienen el mismo límite en x_0, entonces existe $\lim_{x \to x_0} h(x)$ y coincide con $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$.

Demostr:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / x \in ([x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon])$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 / x \in ([x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow g(x) \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]).$$

Además, por hipótesis: $\exists V \in \mathcal{F}(x_0) / x \in (V - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

O bien $\exists \delta_3 > 0 / x \in ([x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

Sea $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in ([x_0 - \delta, x_0 + \delta] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow \lambda - \varepsilon \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) \leq \lambda + \varepsilon$$

Luego $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lambda$. csqd.

<u>3.9. TEOREMA</u>: Sean f y g funciones de $A \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y supongamos que existe $V \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que si $x \in (V - \{x_0\}) \cap A$ entonces $f(x) \leq g(x)$. Supongamos además que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = \mu$.

Entonces $\lambda \leq \mu$.

Demostr: Si no fuese cierta la tesis sería $\lambda > \mu$. Podemos considerar entonces el número real positivo $\frac{\lambda - \mu}{2}$ y un $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \varepsilon < \frac{\lambda - \mu}{2}$.

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / x \in ([x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \mu \Leftrightarrow (\varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 / x \in ([x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow g(x) \in [\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$

Además, por hipótesis: $\exists \delta_3 > 0 / x \in ([x_0 - \delta_3, x_0 + \delta_3] - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \leq g(x)$

Sea $\delta = \inf(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$

Si $x \in ([x_0-\delta, x_0+\delta]-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow \begin{cases} x \in ([x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \geq \lambda-\varepsilon \\ x \in ([x_0-\delta_2, x_0+\delta_1]-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow g(x) \leq \mu+\varepsilon \\ x \in ([x_0-\delta_3, x_0+\delta_3]-\{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \leq g(x) \end{cases}$

Si $g(x) \leq \mu+\varepsilon \Rightarrow g(x) \leq \mu+\varepsilon < \mu + \frac{\lambda-\mu}{2} = \frac{\lambda+\mu}{2} < \lambda-\varepsilon \leq f(x)$

Luego sería $g(x) < f(x)$, lo cual contradice que $f(x) \leq g(x)$.
Debe verificarse entonces que $\lambda \leq \mu$.

3.10. TEOREMA DE CARACTERIZACION DEL LIMITE Y LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCION POR SUCESIONES

a) Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces λ es el límite de f en el punto x_0 si y solo si para cualquier sucesión de puntos de A distintos de x_0 convergente hacia x_0 se verifica que la sucesión de los transformados converge hacia λ.

$$\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow [\forall (x_n)_n, \{x_n\}_n \subset A \wedge x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N} \wedge (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0 \Rightarrow (f(x_n))_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda]$$

b) $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en el punto $x_0 \in A$ si y solo si para cualquier sucesión de puntos de A convergente hacia x_0 se verifica que la sucesión de los transformados converge hacia $f(x_0)$.

Demostración: a) $\underline{N}|$ Si $\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x)$, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x \in A, x \neq x_0}{|x-x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$.

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de A, con $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$.
Hemos de probar que $(f(x_n))_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda$, o bien $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - \lambda| \leq \varepsilon$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 / \underset{x \in A, x \neq x_0}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$ (I)
Si $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$, dado $\delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \underset{x_n \in A, x_n \neq x_0}{|x_n - x_0| \leq \delta}$ (II)

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |f(x_n) - \lambda| \leq \varepsilon$,
pues los x_n tales que $n \geq N$ verifican (I), según (II).

$\underline{S}|$ Supongamos que $\lambda \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$

Entonces $\exists \varepsilon > 0 / \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in A, x_\delta \neq x_0 / |x_\delta - x_0| \leq \delta \wedge |f(x_\delta) - \lambda| > \varepsilon$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$, luego según lo anterior:
$\exists x_n \in A, x_n \neq x_0 / |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - \lambda| > \varepsilon$

Tenemos entonces una sucesión $(x_n)_n$ tal que $\{x_n\}_n \subset A$, $x_n \neq x_0, \forall n \in \mathbb{N}$ y $(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$, pues $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| \leq \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

Según la hipótesis debe ser
$(f(x_n))_n \xrightarrow{\mathbb{R}} \lambda$, lo cual contradice que:
$\exists \varepsilon > 0 / \forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n) - \lambda| > \varepsilon$. Luego $\lambda = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

b) Se demuestra análogamente a a), solo hay que tener en cuenta la observación de que $x_0 \in A$ y que x_n no tiene porque ser distinto de x_0.

4. CRITERIO DE CAUCHY PARA FUNCIONES

Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de A.
La función f tiene límite en el punto x_0 si y solo si se verifica
$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, \begin{matrix}|x-x_0|\leq\delta \\ |y-x_0|\leq\delta \\ x,y\in A, x\neq x_0, y\neq x_0\end{matrix} \Longrightarrow |f(x)-f(y)|\leq\varepsilon.$$

Demostración: $\boxed{N}$ Sea $\lambda = \lim_{x\to x_0} f(x)$, entonces $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \underset{x\in A, x\neq x_0}{|x-x_0|\leq\delta} \Rightarrow |f(x)-\lambda|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Entonces $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \,/\, \underset{x\in A, x\neq x_0}{|x-x_0|\leq\delta} \wedge \underset{y\in A, y\neq x_0}{|y-x_0|\leq\delta} \Rightarrow |f(x)-f(y)|\leq|f(x)-\lambda|+|\lambda-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

$\boxed{S}$ Sea (x_n) una sucesión de puntos de A tal que $\forall n\in\mathbb{N}, x_n\neq x_0$ y $(x_n)\xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$
Entonces dado $\delta>0$, $\exists N\in\mathbb{N} / n > m \geq N \Rightarrow \underset{x_n\in A, x_n\neq x_0}{|x_n-x_0|\leq\delta} \wedge \underset{x_m\in A, x_m\neq x_0}{|x_m-x_0|\leq\delta}$

En estas condiciones, según la hipótesis: $|f(x_n)-f(x_m)|\leq\varepsilon$.
Por tanto $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$; luego
$$\exists\lambda\in\mathbb{R} \,/\, \lambda = \lim_{x_n\to x_0} f(x_n).$$

Si probamos que λ no depende de la sucesión (x_n) habremos probado que $\forall (x_n)$ sucesión de puntos de A distintos de x_0 y convergente hacia x_0 $(f(x_n))_n\to\lambda$. Entonces según el teorema 3.10 λ será el límite de la función en el punto x_0.
Consideremos otra sucesión (x'_n) tal que $\{x'_n\}_n\subset A$, $x'_n\neq x_0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ y $(x'_n)\xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$. Probemos que $(f(x'_n))_n\xrightarrow{\mathbb{R}}\lambda$.
Sabemos que $\exists\lambda'\in\mathbb{R} / (f(x'_n))_n\xrightarrow{\mathbb{R}}\lambda'$ según lo probado anteriormente. Se trata de probar que $\lambda'=\lambda$.
Consideremos una nueva sucesión (x''_n) tal que $x''_n=x_n$ si n es par y $x''_n=x'_n$ si n es impar. Entonces $\{x''_n\}_n\subset A$, $x''_n\neq x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $(x''_n)_n\xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$.
Por tanto $(f(x''_n))_n$ es de Cauchy y convergente.
Luego $\exists\lambda''\in\mathbb{R} / (f(x''_n))_n\xrightarrow{\mathbb{R}}\lambda''$
La sucesión (x''_n) está formada por una subsucesión de (x_n) y otra de (x'_n). Luego $(f(x_n))_n\to\lambda'' \wedge (f(x'_n))_n\to\lambda''$
Por tanto $\lambda=\lambda'=\lambda''$ por la unicidad del límite. c.s.q.d.

5. CALCULO DE LIMITES FUNCIONALES

5.1. TEOREMA: Sean f y g funciones definidas de $A\subset\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de A. Sea $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x)=\lambda_1$ y $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} g(x)=\lambda_2$.
Entonces $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lambda_1+\lambda_2$ y $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lambda_1\cdot\lambda_2$

Demostr.: Según teorema 3.10.
$\forall (x_n) / x_n\in A \wedge x_n\neq x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, tal que $(x_n)\to x_0$ se tiene que $(f(x_n))\to\lambda_1$ y $(g(x_n))\to\lambda_2$

Según el cálculo de límite de sucesiones:

$((f+g)(x_n))_n = (f(x_n)+g(x_n))_n \longrightarrow \lambda_1+\lambda_2 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lambda_1+\lambda_2$

y también $((f\cdot g)(x_n))_n = (f(x_n)\cdot g(x_n))_n \longrightarrow \lambda_1\cdot\lambda_2$

Luego $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lambda_1\lambda_2$. csqd.

- Si α es un número real, como consecuencia de este teorema

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha f)(x) = \alpha\lim_{x\to x_0} f(x)$$

5.2. TEOREMA: Sea una función $f: A\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y un punto $x_0\in A'$. Supongamos que $\forall x\in A, f(x)\neq 0$ y que $\lim_{x\to x_0, x\in A} f(x)=\lambda$, con $\lambda\neq 0$.

Entonces $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}$

Demostr.: La función $\frac{1}{f}$ está definida para todo x de A, pues $\forall x\in A, f(x)\neq 0$.

Sea la sucesión $(x_n)_{x_n\in A} \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$. Entonces $(f(x_n))_n\longrightarrow\lambda$.

$\forall n\in\mathbb{N}, f(x_n)\neq 0$. Luego $\left(\frac{1}{f(x_n)}\right)_n\longrightarrow\frac{1}{\lambda}$ según una propiedad de sucesiones convergentes.

Luego $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lambda}$ csqd.

5.3. TEOREMA: Sean f y g funciones de $A\subset\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $x_0\in A$. Si f y g son funciones continuas en x_0, entonces:

1. $f+g$ es continua en x_0 y $f\cdot g$ es continua en x_0.
2. Si $f(x)\neq 0, \forall x\in A$, entonces $\frac{1}{f}$ es continua en x_0.
3. Si $f(x)\neq 0, \forall x\in A$ y continua en x_0, y g es continua en x_0, entonces $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}$

Demostr.: 1. Si x_0 es un punto aislado la demostración es trivial.

Si $x_0\in A'$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$

Entonces $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = (f+g)(x_0)$

y $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = (fg)(x_0)$, que prueba que $f+g$ y fg son continuas.

2. Si $f(x)\neq 0, \forall x\in A$, como $x_0\in A$ se deduce que $f(x_0)\neq 0$.

Según el teorema 5.2.

$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x_0) = \frac{1}{f(x_0)}$. Luego $1/f$ es continua en x_0.

3. $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}$ es una consecuencia de 2 y del teorema 5.1.

OBSERVACION: En el teorema 5.3 aptdo ② se ha supuesto que $f(x) \neq 0, \forall x \in A$.
Es suficiente para que $1/f$ sea continua en $x_0 \in A$ que $f(x_0) \neq 0$ y $f(x)$ continua en $x_0 \in A$.

Si f es continua en x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 \,/\, \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Si $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta' > 0 \,/\, |x - x_0| \leq \delta' \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)|$

Siendo $|f(x_0)| - |f(x)| \leq \big||f(x_0)| - |f(x)|\big| \leq |f(x_0) - f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)|$ se deduce que $|f(x_0)| - |f(x)| \leq \frac{1}{2}|f(x_0)| \Rightarrow |f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$

Entonces en $[x_0 - \delta', x_0 + \delta'] \cap A$ la función f no se anula. Podemos definir entonces la función $1/f$ en esta parte de $A \subset \mathbb{R}$.

Veamos que $\frac{1}{f}$ es continua en x_0.

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| = \left|\frac{f(x_0) - f(x)}{f(x_0)\, f(x)}\right| = \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|f(x_0)| \cdot |f(x)|}$$

$$x \in B(x_0, \delta') \cap A \Rightarrow |f(x)| \geq \frac{1}{2}|f(x_0)| \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{2}{f(x_0)}\right|$$

Luego $\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| \leq \frac{2\,|f(x) - f(x_0)|}{|f(x_0)|^2}$, para $x \in B(x_0, \delta') \cap A$.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos considerar el numero positivo $\varepsilon' = \frac{|f(x_0)|^2}{2}\varepsilon$

Dado $\varepsilon' > 0$, $\exists \delta'' > 0 \,/\, |x - x_0| \leq \delta'' \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon'$

Sea $\delta = \inf(\delta', \delta'') > 0$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}\right| \leq \frac{2\,|f(x) - f(x_0)|}{|f(x_0)|^2} \leq$$

$$\leq \frac{2\,\frac{|f(x_0)|^2}{2}\varepsilon}{|f(x_0)|^2} = \varepsilon$$

Luego $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x_0)}$ c.s.q.d.

5.4. TEOREMA: Sean las funciones $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g: f(A) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si f es continua en $x_0 \in A$ y g es continua en $f(x_0) \in f(A)$, entonces $(g \circ f)$ es continua en x_0.

Es decir, LA COMPOSICION DE DOS FUNCIONES CONTINUAS TAMBIEN ES CONTINUA.

Demostr.: Si g es continua en $f(x_0) = y_0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta' > 0 \,/\, \underset{y \in B = f(A)}{|y - y_0|} \leq \delta' \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| \leq \varepsilon$$

Si f es continua en x_0, dado $\delta' > 0$, $\exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \delta'$

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / |x-x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \le \delta' \Rightarrow$
$\quad x\in A \qquad\qquad f(x)\in B=f(A)$

$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| \le \varepsilon$

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / \underset{x\in A}{|x-x_0|} \le \delta \Rightarrow |(g\circ f)(x) - (g\circ f)(x_0)| \le \varepsilon$

lo que significa que $g\circ f$ es continua en el punto $x_0 \in A$. c.s.q.d.

6. Continuidad de las funciones monótonas

6.1. TEOREMA: (A) Sea $f:]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente.

A.1) Si f está acotada superiormente, entonces existe $\displaystyle\lim_{\substack{x\to d \\ x\in]c,d[}} f(x) = \sup_{x\in]c,d[} f(x)$

A.2) Si f está acotada inferiormente, $\exists \displaystyle\lim_{\substack{x\to c \\ x\in]c,d[}} f(x) = \inf_{x\in]c,d[} f(x)$.

(B) Si $f:]c,d[\to \mathbb{R}$ es una función monótona decreciente, entonces:

B.1) Si f está acotada superiormente, $\exists \displaystyle\lim_{x\to c} f(x) = \sup_{x\in]c,d[} f(x)$

B.2) Si f está acotada inferiormente, $\exists \displaystyle\lim_{x\to d} f(x) = \inf_{x\in]c,d[} f(x)$

Demostr.: (A) A.1) Si f está acotada superiormente para valores de $x\in]c,d[$ según el teorema fundamental del orden $\exists \displaystyle\sup_{x\in]c,d[} f(x) = \lambda$

Entonces $\forall \varepsilon>0, \exists x' \in]c,d[/ \lambda - \varepsilon < f(x')$ (I)

pues si $\exists \varepsilon>0 / \forall x' \in]c,d[, \lambda-\varepsilon \ge f(x')$

sería $\lambda-\varepsilon$ una cota superior de f y menor que $\lambda = \displaystyle\sup_{x\in]c,d[} f(x)$, lo cual es absurdo.

Si $x'\in]c,d[\Rightarrow x'<d \Rightarrow d-x'>0$. Sea $\delta = d-x'>0$.

Sea $x\in]c,d[/ x'<x<d$. Entonces $d-x < d-x' = \delta$; y, además, por ser f creciente, siendo $x'<x$ se deduce que $f(x') \le f(x)$, y $f(x) \le \lambda = \displaystyle\sup_{x\in]c,d[} f(x)$.

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists \delta = d-x'>0 / \underset{x\in]c,d[}{d-x<\delta} \Rightarrow |f(x)-\lambda| < \varepsilon$,

pues $\lambda-\varepsilon < f(x') \le f(x) \le \lambda < \lambda+\varepsilon$.

Luego $\displaystyle\lim_{\substack{x\to d \\ x\in]c,d[}} f(x) = \lim_{x\to d-} f(x) = \lambda$.

A.2) Se demuestra análogamente a A.1).

(B) Demostraremos B.2). El apartado B.1) se demuestra de modo análogo a B.2).

B.2) Si f está acotada inferiormente, $\exists \displaystyle\inf_{x\in]c,d[} f(x) = \mu$.

Entonces $\forall \varepsilon>0$, $\mu+\varepsilon$ no es cota inferior de $\{f(x) / x\in]c,d[\}$.

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists x'\in]c,d[/ f(x') < \mu+\varepsilon$.

Si $x'\in]c,d[\Rightarrow x'<d$. Sea $\delta = d-x'>0$.

Sea $x\in]c,d[$ / $d-x\le\delta=d-x' \Rightarrow x'\le x$. Siendo f decreciente, se tiene que: $f(x)\le f(x')$. Luego $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0 / \underset{x\in]c,d[}{d-x\le\delta} \Rightarrow |f(x)-\mu|<\epsilon$

pues si $d-x\le\delta$, $f(x)\le f(x')<\mu+\epsilon$, y $f(x)\ge\mu>\mu-\epsilon$, ya que $\mu=\inf\limits_{x\in]c,d[} f(x)$.
Luego, dado $\epsilon>0$, si $d-x\le\delta$, $x\in]c,d[$, entonces $\mu-\epsilon<f(x)<\mu+\epsilon$.

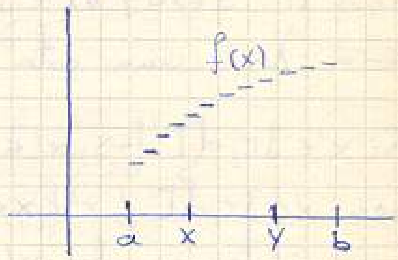
OBSERVACION: Para el teorema siguiente se utilizarán las notaciones $f(x-)$ y $f(x+)$ para representar, en el caso de funciones monótonas acotadas, los límites a la izquierda y a la derecha de la función en el punto x.
Si $x\in]a,b[$, podemos considerar ~~los~~ intervalos $]a,x[$ y $]x,b[$. Entonces si f es creciente:

$$f(x-)=\lim_{\substack{t\to x\\ t\in]a,x[}} f(t)=\sup_{t\in]a,x[} f(t) \quad ; \quad f(x+)=\lim_{\substack{t\to x\\ t\in]x,b[}} f(t)=\inf_{t\in]x,b[} f(t)$$

6.2. TEOREMA: Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Entonces en todo punto $x\in]a,b[$ se verifica $f(x-)\le f(x)\le f(x+)$. Además si $x,y\in]a,b[$ son tales que $x<y$, entonces $f(x+)\le f(y-)$.
Demostr.: * $f(x-)=\sup\limits_{t\in]a,x[} f(t)$

$\forall t\in]a,x[$, $t<x$. Luego, por ser f creciente: $\forall t\in]a,x[$, $f(t)\le f(x)$
Luego $f(x)$ es una cota superior de $\{f(t)/t\in]a,x[\}$. Será entonces:
$\sup\limits_{t\in]a,x[} f(t)=f(x-)\le f(x)$. Analogamente $f(x)\le f(x+)$.

* $f(x+)=\inf\limits_{t\in]x,b[} f(t)$ $\quad f(y-)=\sup\limits_{t\in]a,y[} f(t)$



Segun la figura, siendo f creciente:

$$\inf_{t\in]x,b[} f(t)=\inf_{t\in]x,y[} f(t) \quad y \quad \sup_{t\in]a,y[} f(t)=\sup_{t\in]x,y[} f(t)$$

Como $\inf\limits_{t\in]x,y[} f(t)\le\sup\limits_{t\in]x,y[} f(t)$ se deduce que: $f(x+)\le f(y-)$. csqd.

6.3. TEOREMA: Sea $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Entonces el conjunto de puntos de discontinuidad de f es, a lo sumo numerable.
Demostr.: Sea E el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Trataremos de definir una inyección de E en $\mathbb{Q}$ con lo cual quedara probado el teorema, pues $\mathbb{Q}$ es numerable.
Sabemos que $f(x-)\le f(x+)$. Si $x\in E$, entonces $f(x-)<f(x+)$, pues si $f(x-)=f(x+)$, existen los limites laterales y coinciden, luego la función tendría límite en el punto x y sería $f(x)$, en contra de que x es punto de discontinuidad. Luego $f(x-)<f(x+)$

Entonces $x \in E \Rightarrow \exists r_x \in \mathbb{Q} \,/\, f(x-) < r_x < f(x+)$.

A cada x de E le asociamos uno y solo un $r_x \in \mathbb{Q}$. Veamos que esta aplicación es inyectiva. Hemos de probar que si $r_x = r_y$ entonces $x = y$, o bien, que si $x \neq y \Rightarrow r_x \neq r_y$.

Si $x \neq y$, supongamos que $x < y$. Entonces: $f(x+) \leq f(y-)$. Luego $f(x-) < r_x < f(x+) \leq f(y-) < r_y < f(y+)$. Luego $r_x \neq r_y$. c.s.q.d.

7. Límites funcionales infinitos en un punto

DEFINICIONES: Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de A

a) Se dice que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A}{0 < |x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow f(x) \geq M)$

b) Se dice que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow (\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A}{0 < |x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow f(x) \leq M)$.

7.1. TEOREMA: a) Sea $f:]c,d[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona creciente y no acotada superiormente. Entonces $\lim\limits_{x \to d} f(x) = +\infty$

b) Si f es monotona decreciente y no está acotada inferiormente, entonces $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$.

Demostr: a) Si f no está acotada superiormente

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists x' \in]c,d[\,/\, A < f(x')$$

Sea $\delta = d - x' > 0$; sea $x \in]c,d[\,/\, d - x \leq \delta = d - x' \Rightarrow x' \leq x$.

Luego $f(x') \leq f(x)$, pues f es creciente. Entonces:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in]c,d[}{d - x < \delta} \Rightarrow A < f(x') \leq f(x).$$

Luego $\lim\limits_{x \to d} f(x) = +\infty$.

b) Se demuestra, análogamente.

8. Límites funcionales en el infinito

Definiciones: Sea $f: [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} \,/\, \underset{x \in [a,+\infty[}{x \geq B} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}\; \exists B \in \mathbb{R} \,/\, \underset{x \in [a,+\infty[}{x \geq B} \Rightarrow f(x) \geq A$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \,/\, \underset{x \in [a,+\infty[}{x \geq B} \Rightarrow f(x) \leq A$

Si $f:]-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R} \,/\, \underset{x \in]-\infty, b]}{x \leq B} \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \,/\, \underset{x \in]-\infty, b]}{x \leq B} \Rightarrow f(x) \leq A$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R} \,/\, \underset{x \in]-\infty, b]}{x \leq B} \Rightarrow f(x) \geq A$.

9. Límites y continuidad de las funciones complejas de variable real.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función compleja de variable real. Llamaremos $\operatorname{Re} f$ a la parte real de f y $\operatorname{Im} f$ a la parte imaginaria de f: $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$. Sea $x_0 \in A'$ y λ un número complejo.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = \lambda \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon)$$

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} / \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Entonces:

9.1. TEOREMA: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \in \mathbb{C} \iff \lim_{x \to x_0} \operatorname{Re} f(x) = \lambda_1 \wedge \lim_{x \to x_0} \operatorname{Im} f(x) = \lambda_2$

Demostr.: $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon.$$

Siendo $|\operatorname{Re} f(x) - \lambda_1| \leq |f(x) - \lambda| \wedge |\operatorname{Im} f(x) - \lambda_2| \leq |f(x) - \lambda|$.

Se deduce que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta \Rightarrow \begin{cases} |\operatorname{Re} f(x) - \lambda_1| \leq |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon \\ |\operatorname{Im} f(x) - \lambda_2| \leq |f(x) - \lambda| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Luego $\lim_{x \to x_0} \operatorname{Re} f(x) = \lambda_1$ y $\lim_{x \to x_0} \operatorname{Im} f(x) = \lambda_2$. c.s.q.d.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\lim_{x \to x_0} \operatorname{Re} f(x) = \lambda_1$ y $\lim_{x \to x_0} \operatorname{Im} f(x) = \lambda_2$

Siendo $|f(x) - \lambda| \leq |\operatorname{Re} f(x) - \lambda_1| + |\operatorname{Im} f(x) - \lambda_2|$, y además:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 / 0 < \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta_1 \Rightarrow |\operatorname{Re} f(x) - \lambda_1| \leq \varepsilon/2$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 / 0 < \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta_2 \Rightarrow |\operatorname{Im} f(x) - \lambda_2| \leq \varepsilon/2$$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \inf(\delta_1, \delta_2) > 0 / 0 < \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x) - \lambda| \leq |\operatorname{Re} f(x) - \lambda_1| + |\operatorname{Im} f(x) - \lambda_2| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Luego $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$. c.s.q.d.

El concepto de función continua para funciones complejas es análogo que para las funciones reales

f continua en $x_0 \in A \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x \in A}{|x - x_0|} \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Podemos enunciar un teorema totalmente análogo al 9.1. para la continuidad.

9.2. TEOREMA: La función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en el punto $x_0 \in A$, si y solo si las funciones $\operatorname{Re} f(x)$ y $\operatorname{Im} f(x)$ son continuas en dicho punto.

Si x_0 es aislado la demostración es trivial.

Si x_0 es de acumulación la demostración es análoga a la del teorema 9.1.