TEMA 5°: PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES REALES CONTINUAS

1. FUNCION CONTINUA EN UN CONJUNTO

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice continua en todo A cuando es continua en todos y cada uno de los puntos de A.

1.1. TEOREMA: Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto compacto y sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en A. Entonces $f(A)$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}$.

Demostr.: Daremos dos demostraciones de este teorema, la primera basada en el teorema de Bolzano - Weierstrass (Tema 3°, Th. 5.9) y la segunda basada en la definición de conjuntos compactos por recubrimientos.

1ª Demostración: Probaremos que toda sucesión (y_n) de puntos de $B = f(A)$ posee una subsucesión convergente hacia un punto de B.

Si $(y_n)_n$ es tal que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B \Rightarrow y_n \in B, \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces como $\forall y_n \in B = f(A), \exists x_n \in A / f(x_n) = y_n$, tenemos una sucesion (x_n) de puntos de A.

Siendo A compacto, existe una subsucesión $(x_{n_K})_K$ que converge hacia un punto $x \in A$.

Si f es continua en A, es continua en x. Segun el teorema de caracterización de funciones continuas por sucesiones convergentes, se deduce que si $(x_{n_K})_K \xrightarrow{\mathbb{R}} x \in A$, entonces $(f(x_{n_K}))_K \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \in f(A)$

Por tanto, $\exists (y_{n_K})_K$ subsucesión de (y_n) / $(y_{n_K})_K \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x) \in f(A) = B$

Luego B es compacto.

2ª Demostración: Tengamos en cuenta las siguientes equivalencias:

f continua en $x_0 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x\in A}{|x - x_0| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / f[[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap A] \subset [f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon]) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall V \in \mathcal{F}(f(x_0)), \exists W \in \mathcal{F}(x_0) / f(W \cap A) \subset V)$.

Sea, entonces, $(A_i)_{i\in I}$ un recubrimiento por abiertos de B. Entonces: $B \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Luego:

$\forall x \in A \Rightarrow f(x) \in B = f(A) \Rightarrow \exists i_x \in I / f(x) \in A_{i_x}$ abto.

Entonces $\exists V^{f(x)} \in \mathcal{F}(f(x)) / V^{f(x)} \subset A_{i_x}$.

Si f es continua en A, es continua en $x \in A$. Luego

$\exists W^x \in \mathcal{F}(x) / f(W^x \cap A) \subset V^{f(x)}$

No se pierde ninguna generalidad si consideramos W^x abierto.

Luego $A \subset \bigcup_{x\in A} W^x$. Siendo A compacto, $\exists \{x_1, \dots, x_n\} \subset A / A \subset \bigcup_{K=1}^{n} W^{x_K}$

Si probamos que $f(A) \subset \bigcup_{K=1}^{n} A_{i_{x_K}}$ quedará probado que $f(A)$ es compacto.

$\forall y \in f(A), \exists x \in A / f(x) = y$. Si $x \in A$ entonces $\exists K \in \{1, \dots, n\} / x \in W^{x_K}$

Luego $x \in W^{x_K} \cap A$, de donde: $f(x) \in f(W^{x_K} \cap A) \subset V^{f(x_K)}$

Pero $x_K \in A$, entonces $V^{f(x_K)} \subset A_{i_{x_K}}$. Luego:

$\forall y \in f(A),\ \exists\, i_{x_K} \ /\ y \in A_{i_{x_K}}$

Por tanto $f(A) \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_{i_{x_K}}$

y hemos obtenido un recubrimiento finito de $(A_i)_{i\in I}$. Luego $f(A)$ es compacto c.q.d.

1.2. TEOREMA (*) Sea A un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ y $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en A. Entonces f está acotada en A y además, existen puntos $t_0 \in A$ y $t'_0 \in A$ de forma que $\sup_{t\in A} f(t) = f(t_0)$ e $\inf_{t\in A} f(t) = f(t'_0)$

Esto último significa que existen puntos de A en los cuales la función toma un valor máximo absoluto (si $t_0 \in A \Rightarrow f(t_0) \in f(A)$, y el supremo y el máximo coinciden), y otros puntos de A en los cuales la función toma un valor mínimo absoluto.

Demostr.: Por el teorema anterior $f(A)$ es compacto, luego f está acotada en A. Entonces, por el teorema fundamental del orden existen

$$\sup_{t\in A} f(t) \quad \text{e} \quad \inf_{t\in A} f(t)$$

Se trata de probar que estos puntos pertenecen a $f(A)$. Hagamos un inciso para probar que si H es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$, entonces $\sup_{h\in H} h$ e $\inf_{h\in H} h$ son puntos adherentes de H. Sea $\lambda = \sup_{h\in H} h$

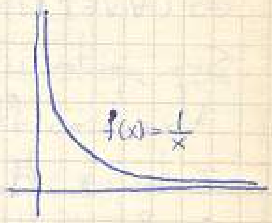
Entonces $\forall \varepsilon > 0,\ \exists h' \in H \ /\ \lambda - \varepsilon < h' \Rightarrow \lambda - \varepsilon < h' \leq \lambda < \lambda + \varepsilon$.

Luego $\forall \varepsilon > 0$, $B(\lambda, \varepsilon) \cap H \neq \phi \Rightarrow \lambda \in \overline{H}$. Análogamente se razona con el inferior. Entonces, siendo $f(A)$ acotado, $\sup_{t\in A} f(t) \in \overline{f(A)} = f(A)$, pues $f(A)$ es compacto, y, por tanto, cerrado.

Luego $\sup_{t\in A} f(t) \in f(A) \Rightarrow \exists t_0 \in A \ /\ f(t_0) = \sup_{t\in A} f(t)$.

Análogamente $\exists t'_0 \in A \ /\ f(t'_0) = \inf_{t\in A} f(t)$. c.q.d.

OBSERVACION: Una función continua sobre un conjunto acotado no tiene porque ser acotada. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el conjunto acotado $]0,1[$. f es continua en $]0,1[$, sin embargo f no está acotada en dicho intervalo.



2. CONTINUIDAD UNIFORME

DEFINICION: Sea una función $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es uniformemente continua en A si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ dependiente de ε tal que si x, y son puntos de A tales que $|x-y| \leq \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

f uniformemente continua en $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ /\ \underset{x,y\in A}{|x-y| \leq \delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

En la definición se ven claramente las diferencias entre función uniformemente continua y función continua. La continuidad de una función se define en

un punto de A; es una propiedad local; la continuidad uniforme se define en todo el conjunto A; es una propiedad global de la función.
Además, en la continuidad uniforme, el δ sólo depende de ε y no del punto de A que tomemos, mientras que en una función continua δ depende, en general, de ε y del punto.

2.1. TEOREMA: Si $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función uniformemente continua en A entonces es continua en todo punto de A.

Demostr.: Sea x un punto genérico de A. Entonces, por ser f uniformemente continua

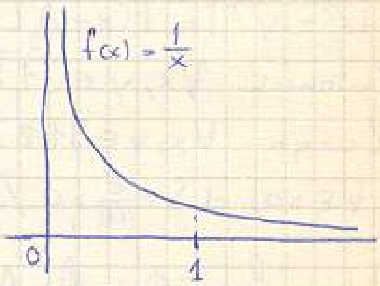
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{y \in A}{|y-x|} \leq \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

lo cual significa que f es continua en x, $\forall x \in A$. csqd.

OBSERVACION: El recíproco de este teorema, en general, no es cierto.

Contraejemplos: ① Consideremos la función:

$$f: \,]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$



Evidentemente, f es continua en $]0,1[$, sin embargo f no es uniformemente continua en $]0,1[$.
Sea $\varepsilon = 10 > 0$. Si f fuese uniformemente continua existiría $\delta > 0$ tal que $\underset{x,y \in]0,1[}{|x-y| \leq \delta}$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq 10$.

No hay ningún problema en considerar $0 < \delta < 1$, pues en el caso de que $\delta \geq 1$, podemos considerar $\delta' < \inf(1, \delta)$ y lo que se verifique para δ' se verificará para δ. Sea entonces $0 < \delta < 1$, y hagamos
$x = \delta$ e $y = \frac{\delta}{11}$. Por tanto $x > y \Rightarrow |x-y| = x-y$.

Entonces $x - y = \delta - \frac{\delta}{11} = \frac{10\delta}{11} \Rightarrow \underset{x,y \in]0,1[}{|x-y| \leq \delta}$

Hemos supuesto que f es uniformemente continua; entonces debe ser:
$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq 10 \quad , \text{ o bien } \quad \frac{11}{\delta} - \frac{1}{\delta} \leq 10 \Leftrightarrow \frac{10}{\delta} \leq 10$$
lo cual es absurdo, pues si $\delta < 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta} > 1 \Rightarrow \frac{10}{\delta} > 10$

Por tanto, f no es uniformemente continua en $]0,1[$.

② Consideremos la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

* f es continua en $\mathbb{R}$, sin embargo no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.
Si f fuese uniformemente continua en $\mathbb{R}$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$
$$\exists \delta > 0 \,/\, |x-y| \leq \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \frac{1}{2}$$

Sea $x = n \in \mathbb{N}$ e $y = n + \frac{1}{n}$

Siendo $\delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \delta$. Fijemos $n \geq N$.

Entonces $|y - x| = n + \frac{1}{n} - n = \frac{1}{n} \leq \delta$. Debería ser entonces

$|y^2 - x^2| = |n^2 + 2 + \frac{1}{n^2} - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2}$

lo cual es absurdo, pues $\forall n \in \mathbb{N}$, $2 + \frac{1}{n^2} > \frac{1}{2}$

Por tanto f no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

* Sin embargo, f es uniformemente continua en todo intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

Sea, por ejemplo, el intervalo $]1,2]$. Veamos que

$$f :]1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

es uniformemente continua. Tengamos en cuenta lo siguiente.

$|x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| = |x-y| \cdot |x+y|$.

Entonces $\forall x, y \in]1,2]$, $x \leq 2 \wedge y \leq 2 \Rightarrow |x+y| = x+y \leq 4$.

Luego $\forall x, y \in]1,2]$, $|x^2 - y^2| \leq |x-y| \cdot 4$. Entonces:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0 \ / \ \underset{x,y \in]1,2]}{|x-y| \leq \delta} \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq |x-y| \cdot 4 \leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon$.

Una función $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ para la que se verifica que

$\exists K > 0 \ / \ \forall x, y \in A$, $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$ se llama Lipschiziana.

Toda función Lipschiziana es uniformemente continua. Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$.

2.2. TEOREMA: (*) Toda función continua definida en un conjunto compacto de $\mathbb{R}$ es uniformemente continua en el compacto. Es decir:

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en el compacto A; entonces f es uniformemente continua en A.

Demostr.: Si f no fuese uniformemente continua se verificaría que

$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall \delta > 0$, $\exists x, y \in A \ / \ |x-y| \leq \delta \wedge |f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Para cualquier n natural podemos considerar $1/n$ como uno de estos δ. Entonces:

$\exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n, y_n \in A \ / \ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. (I)

Tenemos entonces dos sucesiones (x_n) e (y_n) de puntos de A.

Siendo A compacto, en virtud del teorema de Bolzano - Weierstrass:

$\exists (x_{n_K})_K$ subsucesión de $(x_n) \ / \ (x_{n_K})_K \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0 \in A$

Dada esta subsucesión (x_{n_K}) tenemos una aplicación creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que a cada $K \in \mathbb{N}$ le asocia $n_K \in \mathbb{N}$. Componiendo esta aplicación con la aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ que nos define la sucesión $(y_n)_n$ obtenemos la subsucesión $(y_{n_K})_K$.

$(y_{n_K})_K$ es una sucesión de puntos de A; luego, por ser A compacto, existe una subsucesión $(y_{n_{K_p}})_p$ convergente hacia $y_0 \in A$.

De modo análogo podemos construir la subsucesión $(x_{n_{K_p}})_p$. Entonces, como $(x_{n_K})_K \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0 \in A$, se deduce que $(x_{n_{K_p}})_p \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0 \in A$

Entonces $x_0 = y_0$, pues

$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists p_1 \in \mathbb{N} / p \geq p_1 \Rightarrow |x_{n_{K_p}} - x_0| \leq \varepsilon'/3$, pues $(x_{n_{K_p}})_p \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0$

$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists p_2 \in \mathbb{N} / p \geq p_2 \Rightarrow |y_{n_{K_p}} - y_0| \leq \varepsilon'/3$

Y por ser $(n_{K_p})_p$ creciente, $\forall \varepsilon' > 0, \exists p_3 \in \mathbb{N} / p \geq p_3 \Rightarrow \frac{1}{n_{K_p}} \leq \frac{\varepsilon'}{3}$

Entonces $\forall \varepsilon' > 0, \exists \underset{P = \sup(p_1,p_2,p_3)}{P \in \mathbb{N}} / p \geq P \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x_0 - y_0| \leq |x_0 - x_{n_{K_p}}| + |x_{n_{K_p}} - y_{n_{K_p}}| + |y_{n_{K_p}} - y_0| \leq$$

$$\leq |x_0 - x_{n_{K_p}}| + \frac{1}{n_{K_p}} + |y_{n_{K_p}} - y_0| \leq \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{3} = \varepsilon'.$$

Luego $|x_0 - y_0| = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$.

Además según (I) $\exists \varepsilon > 0 / \forall p \in \mathbb{N}, |f(x_{n_{K_p}}) - f(y_{n_{K_p}})| > \varepsilon$ (II)

Siendo f continua: $(f(x_{n_{K_p}}))_p \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x_0) \wedge (f(y_{n_{K_p}}))_p \xrightarrow{\mathbb{R}} f(y_0)$

De (II) se deduciría que $\lim_{p \to \infty} |f(x_{n_{K_p}}) - f(y_{n_{K_p}})| =$

$$= |f(x_0) - f(y_0)| \geq \lim_{p \to \infty} \varepsilon = \varepsilon > 0$$

Luego sería $|f(x_0) - f(y_0)| > 0$, lo cual es absurdo, pues $x_0 = y_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_0) = f(y_0) \Rightarrow |f(x_0) - f(y_0)| = 0$.

Luego f debe ser uniformemente continua. c.s.q.d.

- Vamos a dar una segunda demostración de este teorema.

Hay que probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x,y \in A}{|x - y| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

f es continua en A, luego $\forall x \in A$ f es continua en x; luego dado $\varepsilon/2$, $\exists \delta_x > 0 / \underset{y \in A}{|y - x| < \delta_x} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ (I)

Como $\forall x \in A$, $x \in \left]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right[$, $A \subset \bigcup_{x \in A} \left]x - \frac{\delta_x}{2}, x + \frac{\delta_x}{2}\right[$

Tenemos un recubrimiento por abiertos de A, del cual, por ser A compacto, podemos extraer un recubrimiento finito. Es decir:

$$\exists \{x_1, \dots, x_n\} \subset A / A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left]x_i - \frac{\delta_{x_i}}{2}, x_i + \frac{\delta_{x_i}}{2}\right[$$

Consideremos $\delta = \inf\left\{\frac{\delta x_1}{2}, \dots, \frac{\delta x_n}{2}\right\} > 0$; es mayor que cero pues se trata de un conjunto finito de números mayores que cero. Probemos entonces que este δ sirve; es decir:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, / \, \underset{z_1, z_2 \in A}{|z_1 - z_2| < \delta} \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

$$z_1 \in A \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \, / \, z_1 \in \left]x_i - \frac{\delta x_i}{2}, x_i + \frac{\delta x_i}{2}\right[\iff |z_1 - x_i| < \frac{\delta x_i}{2} < \delta x_i$$

Segun (I): $|z_1 - x_i| < \delta x_i \Rightarrow |f(z_1) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Siendo $|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |z_2 - x_i| \leq |z_2 - z_1| + |z_1 - x_i| < \delta + \frac{\delta x_i}{2}$

$\delta = \inf\left\{\frac{\delta x_1}{2}, \dots, \frac{\delta x_n}{2}\right\} \Rightarrow \delta \leq \frac{\delta x_i}{2}$. Luego:

$$|z_2 - x_i| < \delta + \frac{\delta x_i}{2} \leq \frac{\delta x_i}{2} + \frac{\delta x_i}{2} = \delta x_i$$

Si $|z_2 - x_i| < \delta x_i \Rightarrow |f(z_2) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{2}$

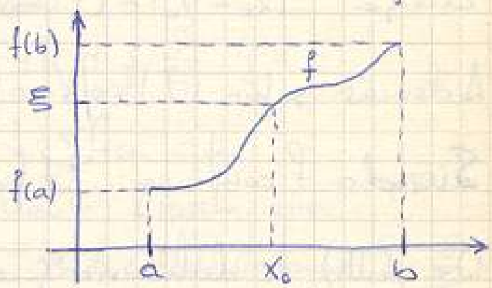
Luego:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \, / \, \underset{z_1, z_2 \in A}{|z_1 - z_2| < \delta} \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq |f(z_1) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. TEOREMAS IMPORTANTES SOBRE FUNCIONES CONTINUAS

3.1 TEOREMA: TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS.

1ª versión: Sea f una función continua en un intervalo compacto $[a, b]$. Entonces para todo número real ξ comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ existe al menos un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \xi$.



Demostr.: Si $f(a) = f(b)$, como ξ está comprendido entre ambos debe ser: $\xi = f(a) = f(b)$. Como $a \in [a, b]$ y $b \in [a, b]$, el teorema estaría demostrado. Supongamos entonces que $f(a) \neq f(b)$. Sea, por ejemplo, $f(a) < f(b)$ (Si $f(a) > f(b)$ basta sustituir en el razonamiento que se va a hacer f por $-f$).

Entonces $f(a) < \xi < f(b)$. Consideremos el conjunto:

$$A = \{x \in [a, b] \, / \, f(x) \leq \xi\}.$$

Evidentemente, $A \neq \emptyset$, pues $a \in A$. Veamos que A es compacto.

- A es acotado pues $A \subset [a, b]$ que es acotado.
- A es cerrado: veamos que $\bar{A} \subset A$.

Segun Tema 3º, teorema 1.6.: $\forall x \in \bar{A}, \exists (x_n)_n \, / \, \{x_n\}_n \subset A \wedge (x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} x$.

Si $\{x_n\}_n \subset A \Rightarrow \{x_n\}_n \subset [a, b]$ que es un conjunto cerrado, y que, por tanto, contiene los límites de todas las sucesiones convergentes contenidas en él (Corolario 1.7, T. 3º).

Luego $x \in [a, b]$. Si f es continua en $[a, b]$, es continua en x; entonces:

$$(f(x_n))_n \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$$

Pero $\{x_n\}_n \subset A$, luego $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq \xi$. Por tanto $\lim f(x_n) = f(x) \leq \xi$

Luego $x \in [a, b]$ y $f(x) \leq \xi$, lo cual significa que $x \in A$.

Es decir $\bar{A} \subset A$, de donde se deduce que A es cerrado.

Si A es cerrado y acotado

$\exists x_0 = \sup A \in \bar{A} = A$, pues sabemos que el extremo superior de un conjunto es un punto adherente al conjunto.

Luego $x_0 \in A \subset [a,b] \Rightarrow x_0 \leq b \wedge f(x_0) \leq \xi$

Debe ser $x_0 < b$, pues si $x_0 = b$ entonces $f(x_0) = f(b)$ lo cual es absurdo pues $f(x_0) \leq \xi$ y $\xi < f(b)$ por hipótesis. Luego $x_0 < b$.

Si probamos además que $f(x_0) \geq \xi$ resultaría $f(x_0) = \xi$ con $x_0 \in [a,b]$ y el teorema estaría demostrado.

Supongamos que $f(x_0) < \xi$. Podemos considerar entonces $\varepsilon = \xi - f(x_0) > 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 \,/\, \underset{x' \in [a,b]}{|x' - x_0| < \eta} \Rightarrow |f(x') - f(x_0)| \leq \varepsilon = \xi - f(x_0)$,

pues f es continua en x_0; y tambien $f(x') - f(x_0) \leq \xi - f(x_0)$

de donde se deduce que $f(x') \leq \xi$.

Por otro lado, siendo $x_0 < b$ podemos considerar $\delta = \inf\{\eta, b - x_0\} > 0$

y siempre podemos encontrar un $x' \in \mathbb{R}$ tal que $x_0 < x' < x_0 + \delta \leq b$

Entonces $x_0 < x' < b \Rightarrow x' \in [a,b]$ y

$x_0 < x' < x_0 + \eta \Rightarrow |x' - x_0| < \eta \Rightarrow f(x') \leq \xi$

Luego hemos encontrado un $x' \in A$ tal que $x' > x_0$, lo cual es absurdo pues $x_0 = \sup A$. Debe ser entonces $f(x_0) = \xi$, $x_0 \in [a,b]$ csqd.

2ª versión: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Sean x_1 y x_2 puntos de $[a,b]$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces para todo $\xi \in \mathbb{R}$ comprendido entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$ existe al menos un punto $x_3 \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x_3) = \xi$.

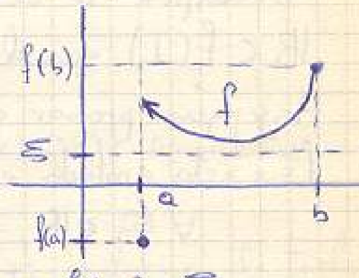
Demostr.: Probemos que es equivalente a la primera versión:

1ª vers $\Rightarrow$ 2ª vers.: Si f es continua en $[a,b]$ es continua en $[x_1,x_2] \subset [a,b]$

Por la primera versión debe existir $x_3 \in [x_1,x_2]$ tal que $f(x_3) = \xi$.

2ª vers $\Rightarrow$ 1ª vers: Si se verifica la 2ª versión $\forall x_1, x_2 \in [a,b] \,/\, x_1 < x_2$ en particular se verificará para $x_1 = a$ y $x_2 = b$. csqd.

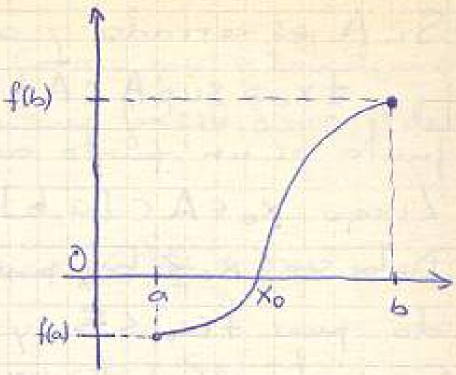
OBSERVACION: f debe ser continua en todos los puntos de $[a,b]$ para que el teorema se verifique. Si f es discontinua en a, por ejemplo, puede suceder, como en el caso del margen que exista $\xi \in \mathbb{R} / f(a) \leq \xi \leq f(b)$ y para el cual no existe un punto $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = \xi$.



3.2. TEOREMA DE BOLZANO

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces si $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo, existe al menos un punto $x_0 \in]a,b[$

tal que $f(x_0)=0$.



Demostración: Si $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo, 0 está comprendido entre ambos. Entonces por el teorema de los valores intermedios $\exists x_0 \in [a,b] \,/\, f(x_0)=0$.
Pero $x_0 \neq a$ ya que $f(a)\neq 0$ y $x_0 \neq b$, pues $f(b)\neq 0$; luego $\exists x_0 \in]a,b[\,/\, f(x_0)=0$. csqd.

Por tanto el teorema de los valores intermedios implica el teorema de Bolzano. Veamos que si se verifica el teorema de Bolzano también se verifica el teorema de los valores intermedios, con lo cual quedará probada la equivalencia de ambos teoremas.

Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ tales que $x_1 < x_2$, y $\xi \in \mathbb{R}$ tal que esté comprendido entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Se trata de probar que $\exists x_0 \in [x_1,x_2] \,/\, f(x_0)=\xi$.
Si $f(x_1)=\xi \vee f(x_2)=\xi$ la demostración es trivial pues $x_1 \in [x_1,x_2] \wedge x_2 \in [x_1,x_2]$.
Supongamos entonces que $f(x_1) < \xi < f(x_2)$
Consideremos entonces la función:

$$g : [x_1,x_2] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = f(x) - \xi$$

Evidentemente g es continua en $[x_1,x_2]$; $g \in \mathcal{C}([x_1,x_2])$.
Además $g(x_1)=f(x_1)-\xi<0 \;\wedge\; g(x_2)=f(x_2)-\xi>0$
Entonces, por el teorema de Bolzano, $\exists x_0 \in]x_1,x_2[\,/\, g(x_0)=0$.
Entonces $f(x_0)-\xi=0 \Rightarrow f(x_0)=\xi$
Luego $\exists x_0 \in]x_1,x_2[\subset [x_1,x_2] \,/\, f(x_0)=\xi$. csqd.

3.3. TEOREMA: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces $f(I)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

Demostr.: Podemos considerar cuatro casos:

1. f no está acotada superiormente ni inferiormente.

Siempre se verifica que $f(I) \subset \mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$. Si probamos que $\mathbb{R} \subset f(I)$ quedará probado que $f(I)$ es un intervalo.
Hay que probar que $\forall \xi \in \mathbb{R}, \exists x_0 \in I \,/\, f(x_0)=\xi$
f no está acotada en I ni superiormente ni inferiormente, luego

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \exists a,b \in I \,/\, f(a) < \xi \;\wedge\; \xi < f(b)$$

pues si $\forall a \in I$, $f(a) \geq \xi$, f estaría acotada inferiormente en I, y análogamente si $\forall b \in I$, $f(b) \leq \xi$, f estaría acotada superiormente.
Luego $f(a) < \xi < f(b)$.
Como f es continua en I, es continua en $[a,b]$ (o $[b,a]$ según sea $a<b \vee b<a$).

Entonces por el teorema de los valores intermedios existe un x_0 comprendido entre a y b tal que $f(x_0)=\xi$. Como $x_0 \in I$, $\xi \in f(I)$.
Luego $f(I) =]-\infty, +\infty[$, que prueba que $f(I)$ es un intervalo.

② f está acotada superiormente pero no inferiormente.
Si f está acotada superiormente, $\exists \mu = \sup_{x\in I} f(x)$. Luego $f(I) \subset]-\infty, \mu]$
Probemos que $]-\infty, \mu[\subset f(I)$ con lo cual será $f(I) =]-\infty,\mu[\vee f(I) =]-\infty, \mu]$, pero en cualquier caso un intervalo.
$\forall \xi \in]-\infty, \mu[$, $\xi < \mu$. Sea $\varepsilon = \mu - \xi > 0$
Si μ es el supremo, $\mu - \varepsilon$ ya no es cota superior de $f(I)$, luego
$\exists x' \in I / \mu - \varepsilon = \xi < f(x')$
Si f no está acotada inferiormente $\exists x'' \in I / f(x'') < \xi$.
Luego $\exists x', x'' \in I / f(x'') < \xi < f(x')$
Si f es continua en I, existe un $x_0 \in I$ comprendido entre x' y x'' tal que $f(x_0) = \xi$. Luego $\xi \in f(I)$.

③ f está acotada inferiormente, pero no superiormente. Análogo a ②.

④ f está acotada. Sea entonces $\mu = \sup_{x\in I} f(x)$ y $\lambda = \inf_{x \in I} f(x)$

Entonces $f(I) \subset [\lambda, \mu]$. Si probamos que $]\lambda, \mu[\subset f(I)$ quedará probado que $f(I)$ es $]\lambda,\mu[$, $[\lambda,\mu[$, $]\lambda,\mu]$ ó $[\lambda,\mu]$, pero en cualquier caso un intervalo.
$\forall \xi \in]\lambda, \mu[\Rightarrow \lambda < \xi < \mu$. Sea $\varepsilon = \mu - \xi > 0$ y $\varepsilon' = \xi - \lambda > 0$.
$\mu - \varepsilon = \xi$ no es cota superior de $f(I)$, luego $\exists x' \in I / \mu - \varepsilon \leq \xi < f(x')$
$\lambda + \varepsilon' = \xi$ no es cota inferior de $f(I)$, luego $\exists x'' \in I / f(x'') < \lambda + \varepsilon' = \xi$
Entonces $f(x'') < \xi < f(x')$.
Como f es continua en I, debe existir $x_0 \in I$ comprendido entre x' y x'' tal que $f(x_0) = \xi$. Luego $\xi \in f(I)$ y $]\lambda, \mu[\subset f(I)$ csqd.

3.4. TEOREMA (sobre funciones continuas y conjuntos abiertos).
Sea A un conjunto abto de $\mathbb{R}$ y $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:
a) f es continua.
b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $\{x \in A / f(x) > \alpha\}$ y $\{x \in A / f(x) < \alpha\}$ son abtos.
c) $\forall B$ abto en $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ es abto.

Demostn: a) $\Rightarrow$ b)] Veamos que $H = \{x \in A / f(x) < \alpha\}$ es entorno de todos sus puntos, con lo cual quedará probado que es abto.
$\forall x_0 \in H$, $x_0 \in A$ que es abto, luego $A \in \mathcal{V}(x_0)$
Además $f(x_0) < \alpha$, entonces $\exists W^{x_0} \in \mathcal{F}(x_0) / \forall x \in A \cap W^{x_0}$, $f(x) < \alpha$
por ser f continua.

Entonces $A \cap W^{x_0} \subset H$, y además $A \cap W^{x_0} \in \mathcal{F}(x_0)$. Luego existe un entorno de x_0 contenido en H, lo cual prueba que H es entorno de x_0, para cualquier $x_0 \in H$.

Análogamente $\{x \in A \,/\, f(x) > \alpha\}$ es abto.

b) ⇒ a) Hay que probar que $\forall x_0 \in A$, f es continua en x_0.

$\forall \varepsilon > 0$, podemos considerar el conjunto

$$H = \{x \in A / f(x) > f(x_0) - \varepsilon\} \cap \{x \in A / f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$$

H es abto, pues es la intersección de dos abtos. Además $x_0 \in H$. Luego $H \in \mathcal{V}(x_0)$ o bien,

$$\exists \delta > 0 \,/\,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap A \subset H$$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{x \in A}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon \wedge f(x) < f(x_0) + \varepsilon$

que prueba que f es continua.

a) ⇒ c) $\forall x_0 \in f^{-1}(B)$, $f(x_0) \in B$. B es abto, luego

$$\exists V^{f(x_0)} \in \mathcal{F}(f(x_0)) \,/\, V^{f(x_0)} \subset B$$

f es continua en x_0, luego $\exists W^{x_0} \in \mathcal{F}(x_0) / f(W^{x_0} \cap A) \subset V^{f(x_0)} \subset B$

Luego: $W^{x_0} \cap A \subset f^{-1}(B)$

Como $W^{x_0} \cap A \in \mathcal{F}(x_0)$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}(x_0)$. Luego $f^{-1}(B)$ es abto.

c) ⇒ b) $\{x \in A / f(x) > \alpha\} = A \cap f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$

$f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ es abto por hipótesis. Como A es abto, la intersección de ambos también lo es. Luego $\{x \in A / f(x) > \alpha\}$ es abto.

Analogamente $\{x \in A / f(x) < \alpha\}$ es abto.

Se ha probado que $[b) \Rightarrow a)] \wedge [a) \Rightarrow c)] \wedge [c) \Rightarrow b)]$ y por tanto la equivalencia de a), b) y c). csqd.

3.5. TEOREMA: (FUNCIONES MONOTONAS Y CONTINUIDAD).

Sea f una función suprayectiva estrictamente creciente de un intervalo I sobre un intervalo J. Entonces f^{-1} es una función estrictamente creciente. Además f y f^{-1} son continuas.

Un enunciado análogo podemos formular para una función estrictamente decreciente.

Demostr.: • Tenemos una función f definida sobre de I en $J = f(I)$. ~~Luego f es sobre~~. Además f es inyectiva, pues si

$$x \neq y \Rightarrow \left.\begin{cases} x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \end{cases}\right\} \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$, ya que f es estrictamente creciente.

Luego f es biyectiva. Existe, por tanto, la función inversa $f^{-1}: J \longrightarrow I$. Veamos que es estrictamente creciente.

Sean $y_1, y_2 \in J$ tales que $y_1 < y_2$. Entonces debe ser $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, pues si $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, siendo f estrictamente ~~creciente~~ sería $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Rightarrow y_1 \geq y_2$, lo cual contradice que $y_1 < y_2$. Luego f^{-1} es estrictamente creciente.

- Veamos que f es continua; para f^{-1} se procede análogamente ya que f^{-1} está en las mismas condiciones de f, es decir, es una función estrictamente creciente de un intervalo J en otro intervalo $I = f^{-1}(J)$.

Hemos de probar que $\forall x_0 \in I \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) / \underset{x \in I}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si $x_0 \in I$, $f(x_0) \in J$. $\forall \varepsilon > 0$ podemos considerar los números $f(x_0) - \varepsilon$ y $f(x_0) + \varepsilon$.

Pueden suceder entonces los casos siguientes:

a) Que $f(x_0) - \varepsilon \in J$ y $f(x_0) + \varepsilon \in J$. Entonces

Como f es sobre: $\exists x', x'' \in I / f(x') = f(x_0) - \varepsilon \wedge f(x'') = f(x_0) + \varepsilon$.

Como $f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$, por ser f^{-1} estrictamente creciente se deduce que $x' < x_0 < x''$.

Sea $\delta = \inf\{x'' - x_0, x_0 - x'\} > 0$.

Sea entonces $x \in I$ que verifica que $\underset{x \in I}{|x - x_0| < \delta}$; se deduce entonces que:

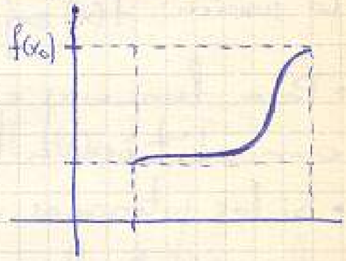
$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 < \delta \leq x'' - x_0 \Rightarrow x < x'' \\ x_0 - x < \delta \leq x_0 - x' \Rightarrow x' < x \end{array}\right\} \Rightarrow x' < x < x''$$

Luego $f(x') < f(x) < f(x'') \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

En este caso se verifica que f es continua, pues dado $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x \in I}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

b) Puede suceder que dado $\varepsilon > 0$, o bien $f(x_0) - \varepsilon$, o $f(x_0) + \varepsilon$ no pertenezcan al intervalo J. Si $f(x_0)$ no es un extremo del intervalo, podemos encontrar un $\varepsilon' > 0$ tal que $f(x_0) - \varepsilon' \in J$ y $f(x_0) + \varepsilon' \in J$ y estamos en el caso a) y lo que se verifique para ε' se verificará para ε, pues podemos tomar $\varepsilon' < \varepsilon$.

Supongamos entonces que $f(x_0)$ es un extremo del intervalo, por ejemplo, el superior. Utilizaremos entonces el concepto de continuidad por la izquierda.



Dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar $f(x_0) - \varepsilon \in J$ (pues de no pertenecer a J, siempre existirá un $\varepsilon' > 0$ tal que $f(x_0) - \varepsilon' \in J$). Como f es sobre: $\exists x' \in I / f(x') = f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$

Por ser f^{-1} estrictamente creciente: $f(x') < f(x_0) \Rightarrow f^{-1}(f(x')) < f^{-1}(f(x_0)) \Rightarrow x' < x_0$.

Sea $\delta = x_0 - x' > 0$

Sea $x \in I$ que verifique que: $x_0 - x < \delta$, entonces $x_0 - x < x_0 - x' \Rightarrow x' < x$.

Tenemos entonces que $x' < x \leq x_0$, pues $f(x_0)$ es el extremo superior de J y f^{-1} es estrictamente creciente. Entonces: $f(x') < f(x) \leq f(x_0)$, o bien

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(x_0) - f(x) < f(x_0) - (f(x_0) - \varepsilon) = \varepsilon$.

Luego dado $\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ / $\underset{x\in I}{x_0-x<\delta} \Rightarrow f(x_0)-f(x)<\varepsilon$

Lo cual significa que f es continua a la izquierda de x_0.

Análogo razonamiento se hace si $f(x_0)$ es el extremo inferior.

Luego f es continua en I. Análogamente f^{-1} es continua en J. c.s.q.d.

3.6. TEOREMA: Sea una función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que f es continua y estrictamente creciente. Entonces f es una biyección de $[a,b]$ sobre $[f(a),f(b)]$. Además f^{-1} es continua.

Demostr.: Si f es estrictamente creciente es inyectiva, pues

$\forall x_1,x_2\in[a,b],\ x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

ya que si $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ y si $x_1>x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Veamos que $f:[a,b]\longrightarrow[f(a),f(b)]$ es sobre, es decir, que

$f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

$\forall y\in f([a,b]),\ \exists x\in[a,b]\ /\ y=f(x)$

$x\in[a,b] \Rightarrow a\leq x\leq b \xRightarrow{f \text{ crec.}} f(a)\leq f(x)\leq f(b) \Rightarrow y\in[f(a),f(b)]$.

Luego $f([a,b])\subset[f(a),f(b)]$.

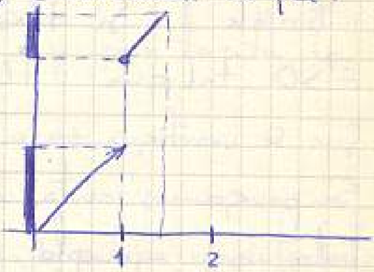
Además $\forall y\in[f(a),f(b)]$, por ser f continua podemos aplicar el TVI (teorema de los valores intermedios). Luego $\exists x\in[a,b]\ /\ y=f(x)$.

Si $x\in[a,b] \Rightarrow f(x)=y\in f([a,b])$. Luego $f([a,b])\supset[f(a),f(b)]$.

En definitiva: $f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

Como $f:[a,b]\longrightarrow[f(a),f(b)]$ es sobre y estrictamente creciente, por el teorema 3.5. sabemos que f^{-1} es estrictamente creciente y continua. c.s.q.d.

OBSERVACION: • El teorema no sería cierto si f no aplicase intervalos sobre intervalos, como sucede en el caso de la función $f(x)=\begin{cases} =x & \text{si } x\in[0,1[\\ =x+1 & \text{si } x\in[1,1'5] \end{cases}$ representada al margen.



• Para funciones estrictamente decrecientes podemos enunciar un teorema totalmente análogo: f est. decrec. y cont. $\Rightarrow [a,b]\xleftrightarrow{f}[f(b),f(a)]$.

• Si los intervalos no son compactos, el teorema sigue siendo cierto. Veamos algunos de los casos que se pueden presentar:

① Sea $f:[a,b[=I\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y estrictamente creciente. Podemos considerar dos casos:

1.a) f está acotada superiormente en $[a,b[$. Entonces $\exists\lambda=\sup_{x\in I} f(x)=\lim_{x\to b} f(x)$

En este caso $f([a,b[)=[f(a),\lambda[$

$\forall y\in f([a,b[),\ \exists x\in[a,b[\ /\ y=f(x)$.

$x\in[a,b[\Rightarrow a\leq x<b$. Si $x<b$, $\exists x'\in\mathbb{R}\ /\ x<x'<b$.

Entonces $a\leq x<x' \Rightarrow f(a)\leq f(x)<f(x')<\lambda=\sup f(x)$

Luego $y \in [f(a), \lambda[$; de aquí se deduce que $f([a,b[) \subset [f(a), \lambda[$.

$\forall y \in [f(a), \lambda[\Rightarrow f(a) \leq y < \lambda$.

Sea $\varepsilon = \lambda - y > 0$. Si $\lambda = \sup\limits_{x \in I} f(x)$, $\lambda - \varepsilon$ ya no es cota superior de $\{f(x) / x \in I\}$. Luego $\exists x \in [a,b[/ y = \lambda - \varepsilon \leq f(x)$.

Entonces $f(a) \leq y \leq f(x)$.

Siendo f continua, aplicando el TVI al intervalo $[a,x]$, podemos asegurar que $\exists x' \in [a,x] \subset [a,b[/ y = f(x')$.

Si $x' \in [a,b[\Rightarrow y = f(x') \in f([a,b[)$. Luego $f([a,b[) \supset [f(a), \lambda[$.

Por tanto $f([a,b[) = [f(a), \lambda[$.

1 b). Si f no está acotada superiormente, $f([a,b[) = [f(a), +\infty[$

Si f es estrictamente creciente y no está acotada superiormente, $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$

$\forall y \in f([a,b[)$, $\exists x \in [a,b[/ y = f(x)$. $x \in [a,b[\Rightarrow a \leq x < b$.

Si $a \leq x \Rightarrow f(a) \leq f(x) = y \Rightarrow y \in [f(a), +\infty[$.

$\forall y \in [f(a), +\infty[$, $\exists x \in [a,b[/ y \leq f(x)$, pues si $\forall x \in [a,b[$, $y > f(x)$, f estaría acotada superiormente. Entonces $f(a) \leq y \leq f(x)$. Como f es continua, por TVI podemos asegurar que $\exists x' \in [a,x] \subset [a,b[/ y = f(x')$. Luego $y \in f([a,b[)$.

Por tanto $f([a,b[) = [f(a), +\infty[$

f es inyectiva y suprayectiva (sobre $[f(a), \lambda[$ o $[f(a), +\infty[$), por tanto es biyectiva. Además f^{-1} es estrictamente creciente y continua.

(2) $f :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Análogo al anterior.

(3) $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

- Si f está acotada superiormente, $f([a,+\infty[) = [f(a), \lambda[$, con $\lambda = \sup\limits_{x \in [a,+\infty[} f(x)$
- Si f no está acotada superiormente, $f([a,+\infty[) = [f(a), +\infty[$

  $\forall y \in f([a,+\infty[)$, $\exists x \in [a,+\infty[/ y = f(x)$.

  $x \in [a, +\infty[\Rightarrow a \leq x \Rightarrow f(a) \leq f(x) \Rightarrow y = f(x) \in [f(a), +\infty[$

  $\forall y \in [f(a), +\infty[$, $f(a) \leq y$.

  Si f no está acotada superiormente y es estrictamente creciente, se tiene que $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$.

  Luego dado $y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in [a, +\infty[/ f(x) \geq y$

  Luego $f(a) \leq y \leq f(x)$.

  Por TVI aplicado a $[a,x]$, $\exists x' \in [a,x] \subset [a,+\infty[/ y = f(x')$.

  Luego $y \in f([a,+\infty[)$, y por tanto $f([a,+\infty[) = [f(a), +\infty[$.

④ Si $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y continua, podemos considerar los siguientes casos:

- f está acotada, luego $\exists \mu = \inf_{x\in]a,b[} f(x)$ y $\exists \lambda = \sup_{x\in]a,b[} f(x)$

  En este caso $f(]a,b[) =]\mu, \lambda[$
- f está acotada superiormente, pero no inferiormente; entonces

  $f(]a,b[) =]-\infty, \lambda[$.
- f está acotada inferiormente, pero no superiormente. Análogo.
- f no está acotada ni superiormente ni inferiormente. Entonces

  $f(]a,b[) =]-\infty, +\infty[$.

3.7. TEOREMA: Sea I un intervalo y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces f es estrictamente monótona.

Antes de demostrar el teorema, probaremos un lema preliminar.

3.8. Lema: Bajo las hipótesis del teorema, si a y b son puntos de I tales que $a<b$ se verifica que $f(c)$ está comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ siempre que $a<c<b$.

Demostr.: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$, pues f es inyectiva. Supongamos que $f(a) < f(b)$; si fuese $f(a) > f(b)$ el razonamiento sería el mismo cambiando f por $-f$. Supongamos que el lema no fuese cierto. Pueden suceder entonces dos casos:

a) $f(c) > f(b) > f(a)$. Consideremos los intervalos $]f(a), f(c)[$ y $]f(b), f(c)[$

Evidentemente la intersección de ambos es no vacía, es decir

$\exists y \in]f(a), f(c)[\cap]f(b), f(c)[$

Si $y \in]f(a), f(c)[$, siendo f continua en I, podemos aplicar el TVI, luego

$\exists x \in [a,c] / y = f(x)$. Pero $x \neq a \wedge x \neq c$, pues $y \neq f(a) \wedge y \neq f(c)$.

Luego $\exists x \in]a,c[/ y = f(x)$.

Además $y \in]f(b), f(c)[\Rightarrow \exists x' \in]c,b[/ y = f(x')$

Luego $f(x) = f(x')$ siendo $x \neq x'$, pues $x < c < x'$, lo cual es absurdo pues f es inyectiva.

b) $f(b) > f(a) > f(c)$ Consideremos los intervalos $]f(c), f(a)[$ y $]f(c), f(b)[$ cuya intersección es no vacía, es decir

$\exists y \in]f(c), f(a)[\cap]f(c), f(a)[$. Por un razonamiento análogo:

$y \in]f(c), f(a)[\xRightarrow{TVI} \exists x \in]a,c[/ y = f(x)$

$y \in]f(c), f(b)[\xRightarrow{TVI} \exists x' \in]c,b[/ y = f(x')$

Luego $f(x) = f(x')$ con $x \neq x'$, lo cual contradice que f es inyectiva.

Téngase en cuenta que la intersección es no vacía, pues si $f(c) < f(a) \Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} / f(c) < \xi < f(a)$.

[illegible]

En cualquier caso se llega a un absurdo, luego el lema es cierto.

Demostración del teorema: Sean x_1 y x_2 elementos de I tales que $x_1 < x_2$. Entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ pues f es inyectiva.

Si $f(x_1) < f(x_2)$, probaremos que f es estrictamente creciente.

(Si $f(x_1) > f(x_2)$, basta considerar que $-f(x_1) < -f(x_2)$ y se razona de modo análogo).

Sean x' y x'' elementos genéricos de $[x_1, x_2]$ que verifican que $x_1 \leq x' < x'' \leq x_2$.

Segun el lema si $x_1 \leq x' < x_2''$ entonces $f(x_1) \leq f(x') < f(x_2)$.

y tambien si $x' < x'' \leq x_2$, entonces $f(x_1) \leq f(x') < f(x'') \leq f(x_2)$.

Por tanto si $x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$ que prueba que f es estrictamente creciente en $[x_1, x_2]$.

Entonces $\forall x', x'' \in I$, $x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$, pues si $x', x'' \in [x_1, x_2]$ se ha probado que $f(x') < f(x'')$, y si no pertenecen a $[x_1, x_2]$ podemos considerar puntos x_3 y x_4 tales que $x_3 < x_1$ y $x_2 < x_4$. En estos casos se verifica que $f(x_3) < f(x_1)$ y $f(x_2) < f(x_4)$; probémoslo:

- Si $x_3 < x_1$ entonces $f(x_3) < f(x_1)$, pues si se verifica lo contrario sera $f(x_3) > f(x_1)$, ya que $f(x_3) \neq f(x_1)$ pues $x_3 \neq x_1$ y f es inyectiva.
  Si $f(x_3) > f(x_1)$ podemos considerar los intervalos $]f(x_1), f(x_3)[$ y $]f(x_1), f(x_2)[$, cuya intersección es no vacía. Sea ξ un punto de la intersección. Entonces:
  $$\xi \in]f(x_1), f(x_3)[\overset{TVI}{\Longrightarrow} \exists x_0 \in]x_3, x_1[\,/\, \xi = f(x_0)$$
  $$\xi \in]f(x_1), f(x_2)[\Longrightarrow \exists x_0' \in]x_1, x_2[\,/\, \xi = f(x_0')$$
  Luego $f(x_0) = f(x_0')$ con $x_0 \neq x_0'$, lo cual contradice que f es inyectiva.
- Si $x_2 < x_4 \Rightarrow f(x_2) < f(x_4)$, pues si sucediese lo contrario, sería: $f(x_4) < f(x_2)$. Podriemos considerar entonces los intervalos $]f(x_1), f(x_2)[$ y $]f(x_4), f(x_2)[$ cuya intersección no es vacía. Sea ξ un punto de la intersección
  $$\xi \in]f(x_1), f(x_2)[\overset{TVI}{\Longrightarrow} \exists y_0 \in]x_1, x_2[\,/\, \xi = f(y_0)$$
  $$\xi \in]f(x_4), f(x_2)[\Longrightarrow \exists y_0' \in]x_2, x_4[\,/\, \xi = f(y_0')$$
  Luego $f(y_0) = f(y_0')$ con $y_0 \neq y_0'$, lo cual contradice que f es inyectiva.
  Debe ser entonces $f(x_3) < f(x_1) < f(x_2) < f(x_4)$, y así sucesivamente llegaremos a demostrar que f es estrictamente creciente en I.
- Si $f(x_1) > f(x_2)$ demostramos, análogamente, que f es estrictamente decreciente.

En cualquier caso f es estrictamente monótona. csqd.

4. Homeomorfismo

DEFINICION: Sea f una aplicación de un intervalo I sobre un intervalo J. f se dice un homeomorfismo cuando f es biyectiva y las funciones f y f^{-1} son continuas.

4.1. TEOREMA: Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$ y $f: I \to J$ una aplicación. Entonces f es homeomorfismo de I sobre J si y solo si f es suprayectiva y estrictamente monótona.

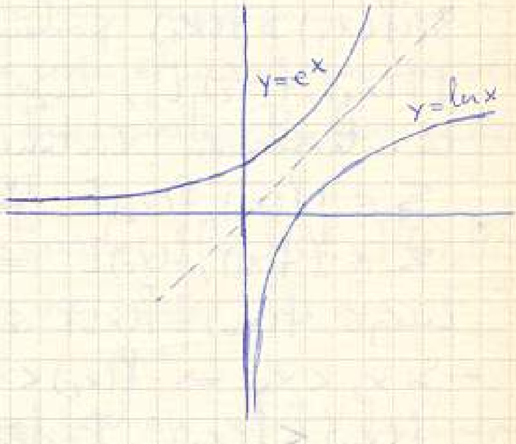
Demostr.: $\underline{N}$| Si f es homeomorfismo, f es biyectiva y continua, luego es suprayectiva y, además, inyectiva y continua. Luego por el teorema 3.7. es estrictamente monótona.

$\underline{S}$| Si f es suprayectiva y estrictamente monótona, por el teorema 3.5., f es biyectiva, y f y f^{-1} son continuas. Luego f es homeomorfismo de I sobre J. csqd.

4.2. TEOREMA: Sea $f: I \to J$ una función real. Entonces f es homeomorfismo de I sobre J sii f es biyectiva y continua.

Demostr.: $\underline{N}$| Trivial.

$\underline{S}$| Si f es biyectiva y continua, entonces f es inyectiva y continua. Luego f es estrictamente monótona (TEOREMA 3.7.). Entonces f es suprayectiva y estrictamente monótona; luego, según el teorema anterior, f es homeomorfismo. csqd.

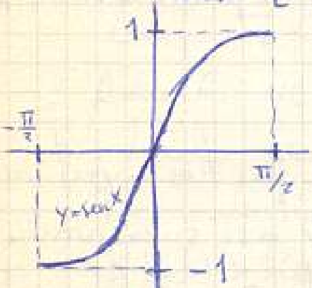


EJEMPLOS DE HOMEOMORFISMOS

① La funcion $y = e^x$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ es suprayectiva y estrictamente creciente; luego es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$.
La función inversa $y = \ln x$ es continua y estrictamente creciente.

② La función

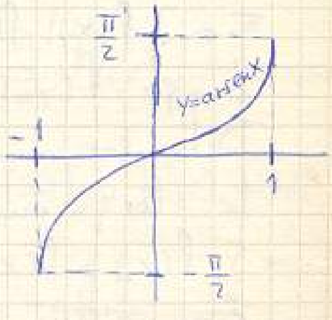
$$\text{sen}: [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$$



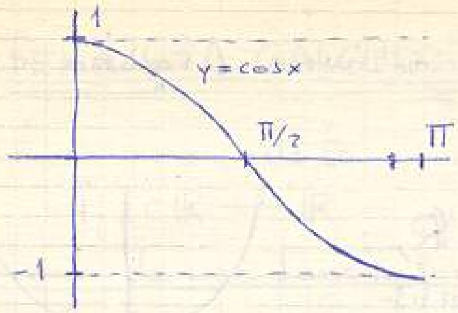
es biyectiva y continua, luego es homeomorfismo.
La función inversa

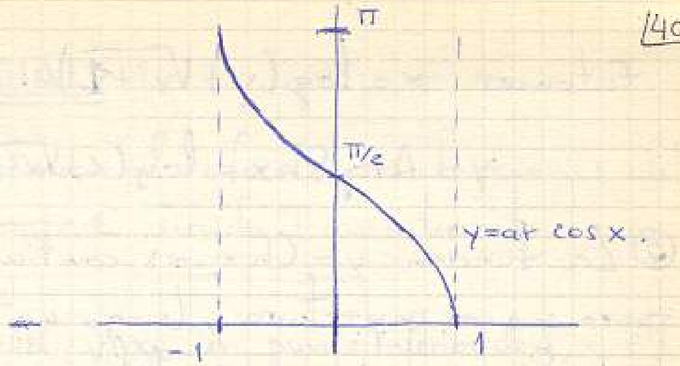
$$\text{ar sen}: [-1,1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

es también homeomorfismo.



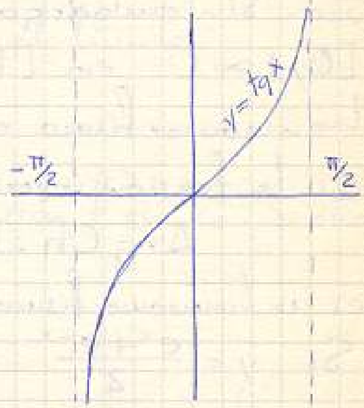
Si definimos la función seno de $\mathbb{R}$ en $[-1,1]$, deja de ser inyectiva y no podemos hablar de homeomorfismo. La correspondencia inversa no será aplicación, pues para un mismo valor de x hay muchos valores de y. Se le llama, por esto función multiforme. La funcion coseno $\cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1, +1]$ es también un homeomorfismo, y la inversa $\text{ar}\cos: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$ también es



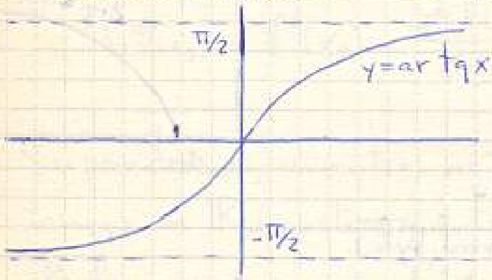


(3) La función $y = tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$

$$tg : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$



es suprayectiva y estrictamente creciente, luego es homeomorfismo. La función inversa



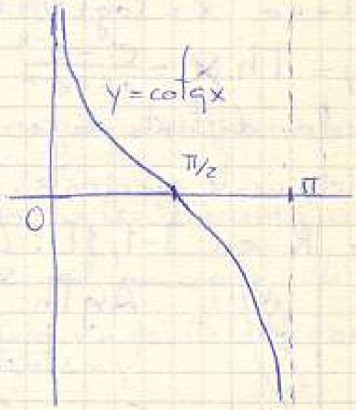
$$ar\, tg : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

es también un homeomorfismo.

Como vemos, tanto en el caso (2) como en el (3) sólo se puede hablar de homeomorfismo en ciertos intervalos. Si definimos estas funciones en $\mathbb{R}$ ya no podemos hablar de homeomorfismo, pues la inversa es una aplicación multiforme.

Con la función $y = cotg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}$

$$cotg :]0, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$$

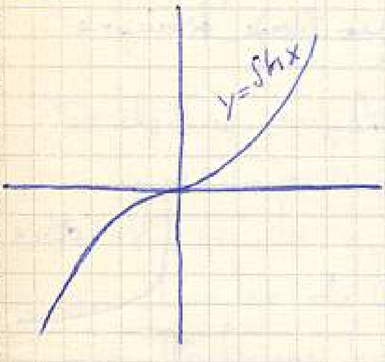


sucede lo mismo. Es sobre y estrictamente decreciente, luego es homeomorfismo. La función inversa

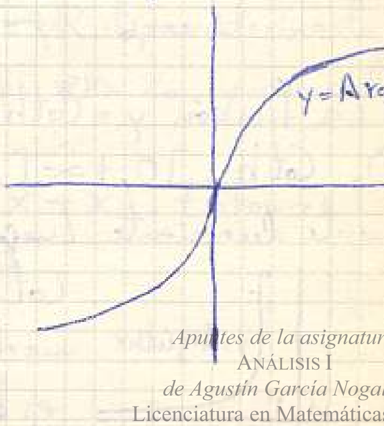
$$ar\, cotg : \mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[$$

también es homeomorfismo.

(4) La función seno hiperbólico, $y = Sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, es una función



continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Luego es un homeomorfismo. La función inversa $y = Arg\, Sh\, x$ es, por tanto, continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.



Si $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow$

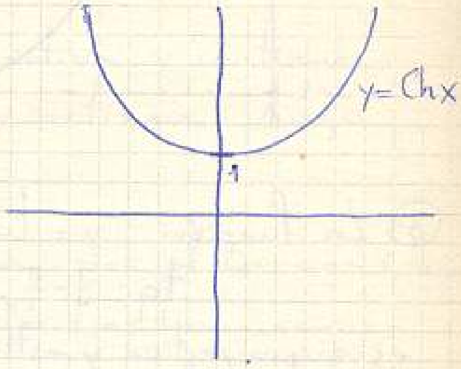
$\Rightarrow 2y e^x = e^{2x} - 1 \Rightarrow e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x = \dfrac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$

Pero $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, luego como $y - \sqrt{y^2+1} < 0$, debe ser $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

Entonces $x = \log(y + \sqrt{y^2+1})$. Luego la función inversa $\operatorname{Arg Sh} x$ es:

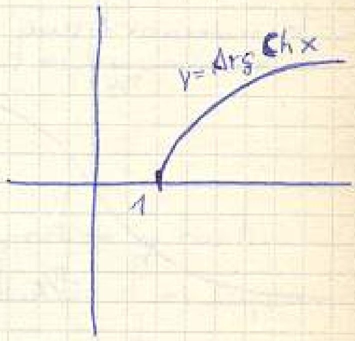
$$y = \operatorname{Arg Sh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$



② La función $y = \operatorname{Ch} x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pero no es inyectiva, luego no es homeomorfismo. Sin embargo, si definimos $\operatorname{Ch} x$ de $[0, +\infty[$ en $[1, +\infty[$, constituye un homeomorfismo entre estos dos intervalos. Entonces la función inversa:

$$\operatorname{Arg Ch} : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$$

es un homeomorfismo

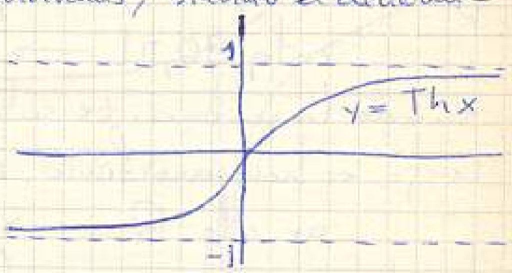


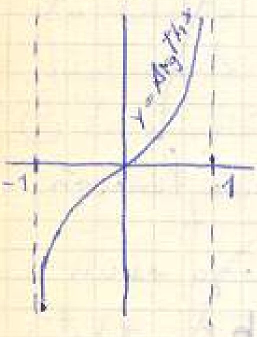
Si $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2ye^x = e^{2x} + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \Rightarrow e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2-4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$$

Las y son siempre mayor o igual que 1. Luego tiene valor real $\sqrt{y^2-1}$.
Tal y como hemos construido la gráfica, debe ser $\operatorname{Arg Ch} x > 0$.
Luego $y \pm \sqrt{y^2-1}$ debe ser mayor que 1. Tomamos entonces el signo positivo:
Luego $x = \log(y + \sqrt{y^2-1})$. Es decir: $y = \operatorname{Arg Ch} x = \log(x + \sqrt{x^2-1})$

③ $y = \operatorname{Th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ es cociente de dos funciones continuas, siendo el denominador distinto de cero en todo $\mathbb{R}$. Además es estrictamente creciente. Luego es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $]-1, 1[$. La función inversa



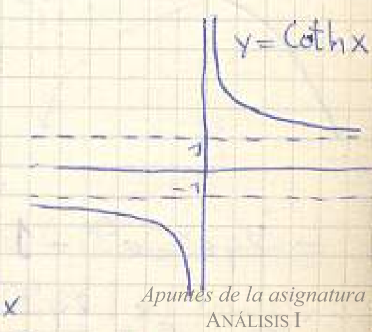


$\operatorname{Arg Th} :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y estrictamente creciente.

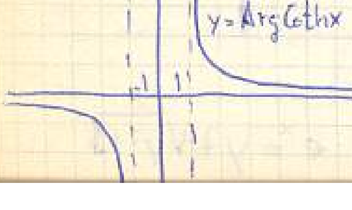
Si $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \Rightarrow ye^x + ye^{-x} = e^x - e^{-x} \Rightarrow (y-1)e^{2x} = -1 - y \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \log \frac{y+1}{1-y}$$, que tiene siempre valor real, pues y siempre es menor que 1.

Luego: $y = \operatorname{Ar Th} x = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{1+x}{1-x}$



④ La función $y = \operatorname{Coth} x$ es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en 0. $\operatorname{Coth} :]0, +\infty[\longrightarrow]1, +\infty[$ es continua y estrictamente decreciente. Luego es homeomorfismo. Análogamente



$\operatorname{Coth} :]-\infty, 0[\longrightarrow]-\infty, -1[$ es homeomorfismo. La función inversa $y = \operatorname{Arg Coth} x$ es ~~homeo~~ homeomorfismo de $]1, +\infty[$ en $]0, +\infty[$, y de $]-\infty, -1[$ en $]-\infty, 0[$. Si $y = \operatorname{Coth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \Rightarrow \operatorname{Arg Coth} x = \dfrac{1}{2} \log \dfrac{x+1}{x-1}$