TEMA 6º: CALCULO DIFERENCIAL

Estudiaremos en este tema el calculo diferencial referente a funciones del tipo $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, siendo I un intervalo.

1. Derivada de una función en un punto

DEFINICION: Sea una función $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de I, $x_0 \in \mathring{I}$. Se dice que f tiene derivada en el punto x_0 si existe el límite

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

A este límite, cuando existe, se le llama derivada de la función f en x_0. Se escribe:

$$Df(x_0) = f'(x_0) = \frac{d f(x_0)}{d(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Supondremos, mientras no se diga lo contrario, que este límite existe cuando pertenece a $\mathbb{R}$, (posteriormente se hablará de las derivadas infinitas).

Podemos poner: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} g_{x_0}(x)$

Siendo g_{x_0} una función definida en un cierto entorno de x_0, que existe pues si $x_0 \in \mathring{I}$, $\exists r > 0 / B(x_0, r) \subset I$, del siguiente modo:

$$g_{x_0}(x) = \begin{cases} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \in B(x_0, r) - \{x_0\} \\ = 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$ (en lugar de 0 podemos poner cualquier valor real).

Si x_0 no es un punto interior de I, será un extremo y tendremos que utilizar el concepto de límite lateral. Entonces surge el concepto de derivada lateral en un punto x_0 (ya sea un extremo, como un punto interior):

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se deduce inmediatamente de un teorema relativo a límites laterales visto en un capítulo anterior, que una función $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivada en un punto $x_0 \in \mathring{I}$ sii existen las derivadas laterales en x_0 y coinciden con el valor de la derivada en el punto x_0.

Podemos hacer un cambio de variable: $t = x - x_0$. Entonces la derivada de f en x_0 admite la siguiente expresión

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t + x_0) - f(x_0)}{t}$$

Una expresión análoga podemos escribir para las derivadas laterales.

Si $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función con valores complejos la definición es totalmente análoga. Pero $\forall x \in I$, $f(x) \in \mathbb{C}$, luego podemos considerar las partes real e imaginaria de $f(x)$: $f(x) = \operatorname{Re} f(x) + i \operatorname{Im} f(x)$.
Entonces: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{\operatorname{Re} f(x) - \operatorname{Re} f(x_0)}{x - x_0} + i \dfrac{\operatorname{Im} f(x) - \operatorname{Im} f(x_0)}{x - x_0}$

Se verifica entonces que una función con valores complejos tiene derivada en x_0 si y solo si la tienen sus partes real e imaginaria y se verifica que: $f'(x_0) = (\operatorname{Re} f)'(x_0) + i (\operatorname{Im} f)'(x_0)$.

1.1. TEOREMA: Sea una función $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de I. La función f tiene derivada en el punto x_0 si y solo si existe un número real K y existe una función ρ definida en un entorno de x_0 con $\lim_{x \to x_0} \rho(x) = 0$ de forma que:

$$f(x) - f(x_0) = K(x - x_0) + |x - x_0| \rho(x)$$

para cualquier x perteneciente a dicho entorno de x_0.

Demostr.: $\underline{\mathrm{N}} \Rightarrow$ Si f tiene derivada en el punto x_0, podemos considerar la función

$$\rho^*(x) = \begin{cases} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \in B(x_0, r) - \{x_0\} \\ = 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

donde $B(x_0, r)$ es un entorno de x_0 contenido en I, que existe, pues $x_0 \in \mathring{I}$.
ρ^* está definida de $B(x_0, r)$ en $\mathbb{R}$ y verifica que

$$\lim_{x \to x_0} \rho^*(x) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Si $\forall x \in B(x_0, r) - \{x_0\}$, $\rho^*(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\rho^*(x)$. Para x_0 también se verifica esta igualdad. También podemos poner

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + |x - x_0| \cdot \rho(x)$$

siendo $\rho(x) = \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|} \rho^*(x)$, si $x \in B(x_0, r) - \{x_0\}$, y $\rho(x_0) = 0$.
Si hacemos $K = f'(x_0)$, hemos demostrado que existe $K \in \mathbb{R}$ y existe $\rho(x)$ definida en $B(x_0, r)$ con $\lim_{x \to x_0} \rho(x) = 0$ tal que:

$$f(x) - f(x_0) = K(x - x_0) + |x - x_0| \rho(x).$$

$\underline{\mathrm{S}} \Leftarrow$ Supuesto que $\exists V \in \mathcal{F}(x_0)$ y $\exists \rho: V \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \lim_{x \to x_0} \rho(x) = 0$ y además $\exists K \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) - f(x_0) = K(x - x_0) + |x - x_0| \rho(x), \ \forall x \in V \qquad (\mathrm{I})$$

probemos que existe $f'(x_0)$ y vale K.

De (I) se deduce que:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = K + \frac{|x-x_0|}{x-x_0}\rho(x), \quad \forall x \in V-\{x_0\}.$$

Entonces: $$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V-\{x_0\}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = K + \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V-\{x_0\}}} \frac{|x-x_0|}{x-x_0}\rho(x)$$

Como $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \rho(x) = 0$ y $\frac{|x-x_0|}{x-x_0}$ está acotado (vale $+1$ ó -1, según que $x>x_0$ ó $x<x_0$)

se tiene que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \rho(x)\frac{|x-x_0|}{x-x_0} = 0$.

Luego $\exists \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = K$.

Luego f tiene derivada en x_0 y vale $f'(x_0)=K$. c.s.q.d.

Este teorema se llama Fórmula de Taylor de primer orden.

<u>1.2. TEOREMA</u>: Si f tiene derivada en el punto $x_0 \in \mathring{I}$ entonces f es continua en x_0.

Demostr.: Si f tiene derivada en x_0, según el teorema anterior ($\exists \rho: V\in \mathcal{F}(x_0) \to \mathbb{R} / \lim\limits_{x\to x_0}\rho(x)=0$) tal que

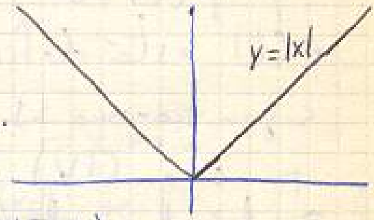
$$f(x)-f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + |x-x_0|\rho(x)$$

Cuando $x\to x_0$, $x\in V$, $f'(x_0)(x-x_0)\to 0$ y $|x-x_0|\rho(x)\to 0$

Luego $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

que significa que f es continua en x_0. c.s.q.d.

* El recíproco no es cierto.



Consideremos como contraejemplo la función $y=|x|$.

Esta función es continua en $\mathbb{R}$, y, por tanto, en 0.

(Es más, la función $y=|x|$ es lipschitziana, pues $|f(x)-f(y)| = ||x|-|y|| \leq |x-y|$).

Sin embargo, f no admite derivada en 0, pues:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+}\frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{, pues si } x>0,\ |x|=x.$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = -1$$

Las derivadas laterales no coinciden, luego no existe derivada en 0.

<u>1.3. TEOREMA</u>: REGLA DE LA CADENA.

Sea una función $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que tiene derivada en el punto $t_0\in\mathring{I}$.

Sea $g: J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que g tiene derivada en el punto $x_0\in\mathring{J}$.

Supongamos que $f(I) \subset J$ y que $x_0 = f(t_0)$. Entonces la función compuesta $g\circ f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada en t_0 y vale

$$(g\circ f)'(t_0) = g'(x_0)\, f'(t_0)$$

Demostr.: Si f tiene derivada en t_0, $\exists V_1 \in \mathcal{F}(t_0)$ y $\exists \rho_1 : V_1 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{t\to t_0} \rho_1(t) = 0$ y $f(t) - f(t_0) = f'(t_0)(t-t_0) + |t-t_0|\,\rho_1(t)$, $\forall t \in V_1$. (I)

Si g tiene derivada en x_0, $\exists V_2 \in \mathcal{F}(x_0)$ y $\exists \rho_2 : V_2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to x_0} \rho_2(x) = 0$ y $g(x) - g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0) + |x-x_0|\,\rho_2(x)$, $\forall x \in V_2$. (II)

Si $x_0 = f(t_0)$, $V_2 \in \mathcal{F}(f(t_0))$. Siendo f continua en t_0 (por Teorema 1.2.) $\exists V_3 \in \mathcal{F}(t_0) / f(V_3) \subset V_2$

Además $V_1 \in \mathcal{F}(t_0)$. Luego $V = V_1 \cap V_3 \in \mathcal{F}(t_0)$. Entonces $\forall t \in V$, $t \in V_3 \Rightarrow f(t) \in V_2$. Luego según (II):

$$g(f(t)) - g(f(t_0)) = g'(x_0)[f(t) - f(t_0)] + |f(t) - f(t_0)|\,\rho_2(f(t)). \quad \text{(III)}$$

También, $\forall t \in V$, $t \in V_1$, luego $\forall t \in V$ se verifica (I). Sustituyendo en (III) $[f(t) - f(t_0)]$ por su valor hallado en (I):

$$g(f(t)) - g(f(t_0)) = g'(x_0)\, f'(t_0)(t-t_0) + g'(x_0)|t-t_0|\,\rho_1(t) + |f(t) - f(t_0)|\,\rho_2(f(t))$$

Podemos poner:

$$(g\circ f)(t) - (g\circ f)(t_0) = g'(x_0)\, f'(t_0)(t-t_0) + |t-t_0|\,\rho(t) \quad \text{(IV)}$$

siendo $\rho(t) = g'(x_0)\,\rho_1(t) + \dfrac{|f(t) - f(t_0)|}{|t-t_0|}\,\rho_2(f(t))$ si $t \neq t_0$

y $\rho(t) = 0$ si $t = t_0$.

$\rho(t)$ está definida en $V \in \mathcal{F}(t_0)$. Si probamos que $\lim_{t\to t_0} \rho(t) = 0$, según teorema 1.1., quedará probado que $(g\circ f)'(t_0) = g'(x_0)\, f'(t_0)$ pues en (IV), $K = g'(x_0)\, f'(t_0)$.

Si $t \to t_0$, $\rho_1(t) \to 0$ según (I), luego $g'(x_0)\,\rho_1(t) \to 0$.

Además si $t \to t_0$, $\left|\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right| \to f'(t_0)$, y $\lim_{t\to t_0} \rho_2(f(t)) = \lim_{x\to x_0} \rho_2(x) = 0$.

Luego $\lim_{t\to t_0} \rho(t) = 0$.

Por tanto: $(g\circ f)'(t_0) = g'(x_0)\, f'(t_0)$. c.s.q.d.

2. Cálculo de derivadas

2.1. TEOREMA: Sean f y g funciones definidas en un intervalo I con valores en $\mathbb{R}$ tales que tienen derivada en el punto $x_0 \in \mathring{I}$. Entonces las funciones $f+g$ y $f\cdot g$ tienen derivada en x_0 y se verifica que

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
$$(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$$

Además si K es un número real $(Kf)'(x_0) = K f'(x_0)$.

Demostr.: * $f+g: I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$

Entonces: $$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

Luego $$(f+g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)+g'(x_0)$$

* $fg: I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (fg)(x) = f(x)\,g(x)$

Luego: $$(fg)(x) - (fg)(x_0) = f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= [f(x)-f(x_0)]\,g(x) + f(x_0)\,[g(x)-g(x_0)]$$

Si g tiene derivada en x_0, es continua en x_0, luego $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Luego:
$$(fg)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{[f(x)-f(x_0)]\,g(x) + f(x_0)\,[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \lim_{x\to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$
$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

* $Kf: I \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (Kf)(x) = K f(x)$

Luego $$(Kf)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(Kf)(x)-(Kf)(x_0)}{x-x_0} = K \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = K f'(x_0).$$ c.s.q.d.

Se deduce fácilmente que el conjunto de funciones derivables en un punto x_0 tiene estructura de álgebra sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales.

2.2. TEOREMA: Sea $f: I\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en un punto $x_0 \in \mathring{I}$, tal que $f(x_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno V de x_0 en el cual la función $1/f$ está definida y tiene derivada en x_0 siendo
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f(x_0)^2}$$

Demostr.: Si f es derivable en x_0, es continua en dicho punto. Luego

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Si $f(x_0) \neq 0$, (según {TEMA 3°, Teorema 3.6.) existe un entorno V de x_0 en el cual la función no se anula. Siendo $x_0 \in \mathring{I}$, podemos considerar que $V \subset I$. Luego: $\forall x \in V,\ f(x) \neq 0$.

Podemos considerar entonces la función:

$$\frac{1}{f} : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Entonces: $$\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x-x_0} = \frac{\frac{f(x_0)-f(x)}{f(x)f(x_0)}}{x-x_0} =$$

$$= -\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\frac{1}{f(x)f(x_0)}$$

Luego $$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} -\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\,\frac{1}{f(x)f(x_0)} =$$

$$= -\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ \lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x_0)}\,\frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2} \quad \text{csqd.}$$

2.3 COROLARIO: Sean f y g funciones de I en $\mathbb{R}$ derivables en $x_0 \in \mathring{I}$; supongamos que $g(x_0) \neq 0$. Entonces existe $V \in \mathcal{F}(x_0)$, $V \subset I$, tal que:

$$\frac{f}{g} : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

y $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\,\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Se basa en los dos teoremas anteriores.

3. Derivadas de las funciones hiperbólicas

* $y = \cancel{\operatorname{Sh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Sh} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^x - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}e^{-x} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{Ch} x$$

Luego $$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{Sh} x = \operatorname{Ch} x}$$

* $y = \operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Ch} x = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{Sh} x$$

Luego $$\boxed{\frac{d}{dx}\operatorname{Ch} x = \operatorname{Sh} x}$$

Las funciones $\operatorname{Sh} x$ y $\operatorname{Ch} x$ tienen todas las derivadas en $\mathbb{R}$, se dice por ello que son de clase infinita, o que pertenecen a $C^\infty(\mathbb{R})$.

* $y = \text{Th}\,x = \dfrac{\text{Sh}\,x}{\text{Ch}\,x}$

$$\frac{d}{dx}\text{Th}\,x = \frac{\text{Ch}\,x\,\text{Ch}\,x - \text{Sh}\,x\,\text{Sh}\,x}{\text{Ch}^2x} = \frac{\text{Ch}^2x - \text{Sh}^2x}{\text{Ch}^2x} = \frac{1}{\text{Ch}^2x}$$

pues $\text{Ch}^2x - \text{Sh}^2x = 1$ (compruébese).

Luego $\boxed{\dfrac{d}{dx}\text{Th}\,x = \dfrac{1}{\text{Ch}^2x}}$

* $y = \text{Cth}\,x = \dfrac{\text{Ch}\,x}{\text{Sh}\,x}$

$$\frac{d}{dx}\text{Cth}\,x = \frac{\text{Sh}^2x - \text{Ch}^2x}{\text{Sh}^2x} = \frac{-1}{\text{Sh}^2x}$$

Esta función tiene derivada en $\mathbb{R}-\{0\}$, pues en 0 la función Sh x se anula.

* $y = \text{Arg Sh}\,x = \log(x+\sqrt{1+x^2})$

$$\frac{d}{dx}\text{Arg Sh}\,x = \frac{d}{dx}\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Luego $\boxed{\dfrac{d}{dx}\text{Arg Sh}\,x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

* $y = \text{Arg Ch}\,x = \log(x+\sqrt{x^2-1}) \quad x \geq 1$

$$\frac{d}{dx}\text{Arg Ch}\,x = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})'}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad x>1$$

Para $x=1$ la derivada se hace $+\infty$.

* $y = \text{Arg Th}\,x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{d}{dx}\text{Arg Th}\,x = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)'}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{\frac{(1-x)-(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\frac{2}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}$$

* $$\frac{d}{dx}\text{Arg Cth}\,x = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1}{1-x^2}$$

4. Derivación de funciones inversas

4.1 TEOREMA: Sea f un homeomorfismo de un intervalo I sobre un intervalo J. Sea x_0 un punto de I en el cual f tiene derivada no nula, $f'(x_0) \neq 0$. Entonces $f^{-1}: J \longrightarrow I$ tiene derivada en el punto $y_0 = f(x_0)$ y se ve

rifica que
$$(f^{-1})'(y_0) = D f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$
Además si f tiene derivada en I y $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$, entonces f^{-1} tiene derivada en J y se tiene que
$$\forall y = f(x) \in J \ , \ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
Demostr.: Si $f: I \to J$ es homeomorfismo, es biyectiva y continua, y f^{-1} también es continua.

Si $y_0 = f(x_0)$, entonces $f^{-1}(y_0) = x_0$. Además $\forall y \in J, \exists x \in I / y = f(x)$, o bien $f^{-1}(y) = x$. Por tanto:
$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$
Luego, siendo f y f^{-1} continuas si $y \to y_0$, entonces $x \to x_0$, y viceversa. Entonces:
$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$
Luego $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Si $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$, entonces f^{-1} tiene derivada en todo punto $y = f(x) \in J$ y se tiene, según acabamos de probar, que:
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$
c.s.q.d.

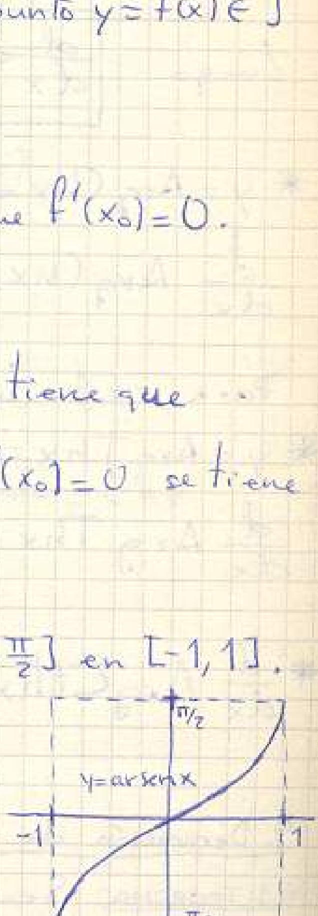
<u>OBSERVACION</u>: Supongamos que f tiene derivada en x_0 y que $f'(x_0) = 0$. Veamos que sucede con $(f^{-1})'(y_0)$.

Si f es homeomorfismo, es estrictamente monótona.

Si f es creciente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$. Como $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$, se tiene que $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$. Si f es decreciente $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$. Como $f'(x_0) = 0$ se tiene que $(f^{-1})'(y_0) = -\infty$.

5. Derivada de las funciones circulares inversas

(5.1.) La función $y = \text{sen}\, x$ es un homeomorfismo de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$. Su derivada es $y' = \cos x$. La función inversa
$$\text{arsen}: [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$
tiene derivada en aquellos puntos de $[-1, 1]$, para cuya imagen el coseno (derivada del seno) no se anula.



El coseno se anula en $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$. Luego, siendo la función arsen estrictamente creciente, su derivada en 1 y -1 es $+\infty$.

El coseno no se anula en ningún punto de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Luego la función $y = \text{arsen}\,x$ tiene derivada en todos los puntos de $]-1,1[$ y vale:

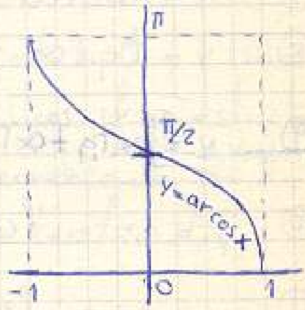
$$\frac{d}{dx}(\text{arsen}\,x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\,\text{sen}\,y} = \frac{1}{\cos y}$$

Si $y = \text{arsen}\,x \Rightarrow x = \text{sen}\,y$. Luego $\cos y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Pero en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, la función coseno es positiva; luego: $\cos y = \sqrt{1-x^2}$.

Por tanto: $$\frac{d}{dx}(\text{arsen}\,x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(5.2) La función $y = \cos x$ es un homeomorfismo de $[0,\pi]$ en $[-1,1]$



La derivada de $y = \cos x$ es $y' = -\text{sen}\,x$. La derivada de $\cos x$ se anula en los puntos 0 y π. Como la función $\text{ar}\cos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ es estrictamente decreciente su derivada en los puntos -1 y 1 es $-\infty$.

En $]0,\pi[$ la función seno no se anula en ningún punto. Luego $\text{arcos}\,x$ tiene derivada finita en $]-1,1[$ y se tiene que: $\forall x \in]-1,1[$, $$\frac{d}{dx}(\text{arcos}\,x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}\cos y} = \frac{1}{-\text{sen}\,y}$$

Si $y = \text{arcos}\,x$ entonces $x = \cos y$. Luego $\text{sen}\,y = \pm\sqrt{1-x^2}$

Pero en $]0,\pi[$ la función seno es estrictamente positiva, luego: $\text{sen}\,y = \sqrt{1-x^2}$.

Por tanto $$\frac{d}{dx}(\text{arcos}\,x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(5.3.) La función $y = \text{tg}\,x$ es un homeomorfismo de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ en $\mathbb{R}$.

Su derivada es $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$, que es finita, pues $\cos x$ no se anula en ningún punto de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Entonces la función $y = \text{artg}\,x$ definida de $\mathbb{R}$ en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tiene derivada en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y se verifica

$$\frac{d}{dx}(\text{artg}\,x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\text{tg}\,y)} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{\frac{\text{sen}^2 y}{\cos^2 y} + \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y}$$

Si $y = \text{artg}\,x$ entonces $x = \text{tg}\,y$. Luego:

$$\frac{d}{dx}(\text{artg}\,x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(5.4.) La función $y = \text{cotg}\,x$ es un homeomorfismo de $]0,\pi[$ en $\mathbb{R}$. Su derivada es $\forall x \in]0,\pi[$, $\frac{d}{dx}(\text{cotg}\,x) = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$

que es siempre finita pues $\text{sen}\,x$ no se anula en ningún punto de $]0,\pi[$

Luego: $$\frac{d}{dx}(\text{arcotg}\,x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\text{cotg}\,x)} = \frac{1}{\frac{-1}{\text{sen}^2 y}} = \frac{-1}{1+\text{cotg}^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}$$

6. Tabla de las derivadas de las funciones principales

①	$y=(f(x))^n$	$y'=n\,(f(x))^{n-1}\cdot f'(x)$
②	$y=\log f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
③	$y=\log_a f(x)$	$y'=\dfrac{1}{\log a}\,\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
④	$y=e^{f(x)}$	$y'=e^{f(x)}\cdot f'(x)$
⑤	$y=a^{f(x)}$	$y'=a^{f(x)}\cdot f'(x)\cdot\log a$
⑥	$y=\operatorname{sen} f(x)$	$y'=\cos f(x)\cdot f'(x)$
⑦	$y=\cos f(x)$	$y'=-\operatorname{sen} f(x)\cdot f'(x)$
⑧	$y=\operatorname{tg} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}=(1+\operatorname{tg}^2 f(x))\cdot f'(x)$
⑨	$y=\operatorname{cotg} f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)}$
⑩	$y=\operatorname{arsen} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
⑪	$y=\operatorname{arcos} f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
⑫	$y=\operatorname{artg} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$
⑬	$y=\operatorname{Sh} f(x)$	$y'=\operatorname{Ch} f(x)\cdot f'(x)$
⑭	$y=\operatorname{Ch} f(x)$	$y'=\operatorname{Sh} f(x)\cdot f'(x)$
⑮	$y=\operatorname{Th} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\operatorname{Ch}^2 f(x)}$
⑯	$y=\operatorname{Cth} f(x)$	$y'=\dfrac{-f'(x)}{\operatorname{Sh}^2 f(x)}$
⑰	$y=\operatorname{Arg\,Sh} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1+(f(x))^2}}$
⑱	$y=\operatorname{Arg\,Ch} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{\sqrt{(f(x))^2-1}}$
⑲	$y=\operatorname{Arg\,Th} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1-(f(x))^2}$
⑳	$y=\operatorname{Arg\,Cth} f(x)$	$y'=\dfrac{f'(x)}{1-(f(x))^2}$

Observación: Téngase en cuenta que en cada caso habrá que estudiar la posibilidad de poder hallar la derivada de la composición de funciones.

7. Crecimiento y decrecimiento de una función

DEFINICION: Sea una función $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de I. Se dice que f es creciente (resp. decreciente) en x_0 si existe un entorno U de x_0 tal que $f(x)\le f(x_0)\le f(x')$ (resp. $f(x)\ge f(x_0)\ge f(x')$) siempre que $x, x'\in U$ y se tenga que $x<x_0<x'$.

Si $\forall x,x'\in U$, $x<x_0<x' \Rightarrow f(x)<f(x_0)<f(x')$ se dice que f es estrictamente creciente. Análogamente ...

Veamos que relación existe entre el crecimiento o decrecimiento de una función en un punto y el valor de la derivada en dicho punto.

Supongamos que una función f tiene derivada en un punto x_0. Si f es creciente en x_0, existe un entorno U de x_0 tal que $\forall x \in U - \{x_0\}$, $(x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)) \vee (x > x_0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0))$. En cualquier caso $\forall x \in U - \{x_0\}$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Luego si f es creciente $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Análogamente, si f es decreciente en x_0 y $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$, se tiene que: $f'(x_0) \leq 0$.

Téngase en cuenta que no se puede asegurar que $f'(x_0) > 0 \vee f'(x_0) < 0$, pues, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en 0 y $f'(0) = 0$.

Recíprocamente, podemos decir que si $f'(x_0) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en x_0 y si $f'(x_0) < 0$, f es estrictamente decreciente en x_0.

Si $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, por propiedad de los límites,

$\exists U \in \mathcal{F}(x_0), U \subset I \;/\; \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, $\forall x \in U - \{x_0\}$.

Entonces si $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0$. Luego $f(x) - f(x_0)$ debe ser mayor que cero y, por tanto, $f(x) > f(x_0)$, y si $x < x_0$, entonces $x - x_0 < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$.

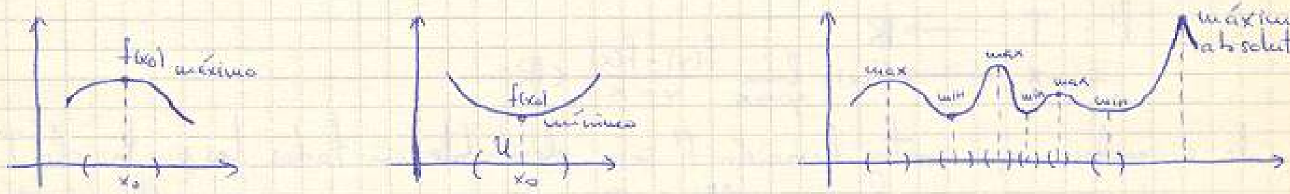
Para $f'(x_0) < 0$ se prueba análogamente que f es estrictamente decreciente.

8. Extremos relativos de una función en un punto

DEFINICIÓN: * Sea una función $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathring{I}$. Se dice que f tiene un máximo relativo en el punto x_0 si existe un entorno U de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in U$. Si se verifica $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U - \{x_0\}$, el máximo se dice estricto.

* Se dice que f tiene un mínimo relativo en el punto x_0 si existe un entorno U de x_0 tal que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in U$. Si $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in U - \{x_0\}$, el mínimo se dice estricto.

* Se dice que f tiene un extremo relativo en x_0 si posee un máximo o un mínimo relativo en dicho punto.



Téngase en cuenta la diferencia entre un máximo (o mínimo) relativo y un máximo (o mínimo) absoluto. Un máximo absoluto siempre es máximo relativo, pero no al revés.

8.1 TEOREMA: Condición necesaria de ext. relativo: Si $f: I \to \mathbb{R}$ tiene un extremo relativo en $x_0 \in \mathring{I}$. Si f tiene **derivada** en el punto x_0 entonces $f'(x_0) = 0$.
Esta condición no es suficiente.

Demostr.:
Si fuese $f'(x_0) \neq 0$ entonces será $f'(x_0) > 0$ ó $f'(x_0) < 0$.
En cualquier caso, la función es estrictamente monótona en x_0 y, por tanto, no puede poseer extremo relativo, pues si f es estrictamente creciente en x_0 existe $U \in \mathcal{F}(x_0)$ tal que $\forall x, x' \in U$ con $x < x_0 < x'$ se tiene que $f(x) < f(x_0) < f(x')$; por tanto, $f(x_0)$ no es mínimo pues $f(x) < f(x_0)$ y tampoco es máximo, pues $f(x') > f(x_0)$. Luego debe ser $f'(x_0) = 0$. c.s.q.d.

OBSERVACION: - Supongamos que f tiene un máximo relativo en el punto x_0.
Si f tiene derivada por la derecha en x_0, se tiene que

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Como f tiene un máximo en x_0 se tiene que $f(x) \leq f(x_0)$; como $x > x_0$ será:

$$f'_+(x_0) \leq 0$$

Si f tiene derivada por la izquierda en x_0, como f tiene un máximo en x_0, será

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Luego si f tiene un máximo en x_0 y es derivable en dicho punto se tiene que $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. Luego $f'(x_0) = 0$

- Si f tiene un mínimo relativo en x_0 se tiene, análogamente:

$$f'_+(x_0) \geq 0 \quad \text{y} \quad f'_-(x_0) \leq 0.$$

Luego si f tiene un mínimo en x_0 y es derivable en dicho punto, entonces $f'(x_0) = 0$.

9. Derivadas de orden superior

Sea una función $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos que f admite derivadas en todos los puntos de I; entonces hemos construido una función que a cada punto de I le hace corresponder el valor de su derivada. A esta función se le llama función derivada de f:

$$f': I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \in \mathbb{R}$$

Puede suceder que esta función f' sea derivable en todos los puntos de I. Entonces obtenemos una función f'' de I en $\mathbb{R}$ que a cada punto de I le asocia el valor de la derivada en dicho punto de la función derivada de f.
A f'' se le llama derivada segunda de f.
Así sucesivamente, podemos considerar la derivada n-sima de f

que a cada punto de I le asocia la derivada de la función derivada de orden $n-1$:

$$f^{(n)}(x) = D^{n} f(x) = (f^{(n-1)})'(x) \quad , \forall x \in I.$$

9.1. TEOREMA: Sean f y g funciones que admiten derivada n-sima en un intervalo I de $\mathbb{R}$. Entonces las funciones $f+g$, $K \cdot f$ y $f \cdot g$ $(K \in \mathbb{R})$ admiten derivada n-sima en I y se tiene que

- $D^n(f+g) = D^n f + D^n g$.
- $D^n(K \cdot f) = K\, D^n f$
- $D^n(f \cdot g) = \binom{n}{0} f^{(n)} g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} g' + \dots + \binom{n}{j} f^{(n-j)} g^{(j)} + \dots + \binom{n}{n} f\, g^{(n)}$

La demostración se hace fácilmente por el método de inducción.