TEMA 7º: PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES

1. El teorema de los incrementos finitos

1.1. TEOREMA DE ROLLE:

Sea una función f definida de un compacto $[a,b]$ con valores en $\mathbb{R}$, tal que f es continua en $[a,b]$. Supongamos que f tiene derivada (finita o infinita) en todos los puntos de $]a,b[$. Entonces, si $f(a)=f(b)$, existe un punto c de $]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

1ª Demostr.: • Si f es una función constante, el teorema es trivial, pues su derivada se anula en todos los puntos de $]a,b[$

• Si f no es constante, entonces $\exists x \in]a,b[/ f(x) \neq f(a)=f(b)$.

Supongamos que $f(x) > f(a) = f(b)$.

Siendo f continua en el compacto $[a,b]$, según el Teorema 1.2, TEMA 5º, llamado Teorema de Bolzano-Weierstrass, la función admite máximo y mínimo en el compacto, es decir, existen $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(t_0)$, $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(t_0')$, $t_0, t_0' \in [a,b]$

Si $f(x) > f(a) = f(b)$, t_0 no puede ser a ni b. Entonces $t_0 \in]a,b[$.

Luego, la función admite un máximo relativo en $]a,b[$, es decir, existe $t_0 = c \in]a,b[$ en el cual la función tiene un máximo relativo. Luego, según una condición necesaria de extremo relativo dada en el tema anterior $f'(c)=0$.

Si $f(x) < f(a) = f(b)$, $t_0' \in]a,b[$. Por tanto, la función posee un mínimo relativo en $]a,b[$, es decir, $\exists c \in]a,b[$ en el cual f tiene un mínimo relativo. Luego $f'(c)=0$.

2ª Demostr.: Supongamos que la tesis es falsa, es decir que

$$\forall x \in]a,b[\quad , \quad f'(x) \neq 0.$$

Si f es continua en $[a,b]$, $\exists M = \max f \ \wedge \ \exists m = \min f$.

El máximo y el mínimo no los puede alcanzar la función en $]a,b[$, pues serían extremos relativos y la derivada se anularía en dichos puntos. Entonces debe ser $M = m = f(a) = f(b)$. Como $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$, se deduce que la función es constante, en contra de que se ha supuesto que la derivada no se anula en ningún punto de $]a,b[$. Luego la tesis es cierta.

OBSERVACIONES: ① Si suprimimos alguna de las hipótesis, el teorema no es cierto.

– Si f no admite derivada en todos los puntos de $]a,b[$, veamos que el teorema no es cierto. Consideremos la función $f(x)=|x|$ definida en el compacto $[-1,1]$. $f(-1)=f(1)=1$, f es continua en $[-1,1]$, pero no es derivable en 0; entonces el teorema no se cumple, pues $\forall x \in]-1,1[-\{0\}$, $f'(x)=-1 \vee f'(x)=1$.

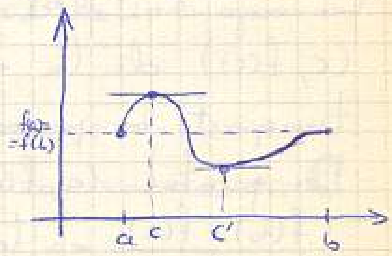
- Si suprimimos la hipótesis de que $f(a)=f(b)$, el teorema tampoco es cierto. Sea la función $f(x)=x$ definida en $[0,1]$. f es continua en $[0,1]$ y derivable en $]0,1[$. Pero $f(0)=0 \neq f(1)=1$; entonces el teorema no es cierto, pues $\forall x \in]0,1[$, $f'(x)=1 \neq 0$.
- Si f no es continua en los extremos, tampoco se verifica el teorema.

Sea $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x)=\begin{cases} =1 & \text{si } x=0 \\ =x & \text{si } 0<x\leq 1. \end{cases}$$

$f(0)=1=f(1)$; f es derivable en $]0,1[$, pues $\forall x \in]0,1[$, $f'(x)=1$. Sin embargo, el teorema no es cierto pues f' no se anula en ningún punto de $]0,1[$.

② El valor de la derivada de una función en un punto representa, como sabemos, la pendiente de la tangente a la función en dicho punto. La interpretación geométrica de este teorema nos garantiza, en las hipótesis del mismo, la existencia de un punto de $]a,b[$ en el cual la función tiene la tangente paralela al eje de las equis.



③ Podemos preguntarnos si para funciones de variable real con valores complejos existe un teorema análogo al de Rolle. La respuesta es negativa. Consideremos la función

$$f:[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto f(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)=\cos t + i \operatorname{sen} t$$

f es continua en $[0,2\pi]$ pues lo son sus partes real e imaginaria, y tiene derivada en todos los puntos de $]0,2\pi[$

Además $f(0)=(1,0)=f(2\pi)$.

Sin embargo, no existe $t\in]0,2\pi[$ tal que $f'(t)=(0,0)$, pues si $f'(t)=(-\operatorname{sen} t, \cos t)=(0,0)$ sería $|(-\operatorname{sen} t, \cos t)|=\sqrt{\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t}=0$, lo cual es absurdo, pues $\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t=1$.

1.2. TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS (O DEL VALOR MEDIO) DE LAGRANGE:

Sea una función $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f es continua en $[a,b]$ y tiene derivada (finita o infinita) en $]a,b[$. Entonces existe un punto $c\in]a,b[$ tal que

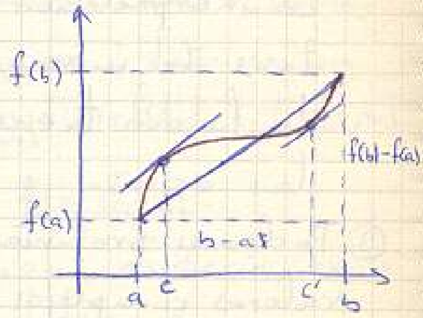
$$f(b)-f(a)=f'(c)\,(b-a)$$

Demostr.: Consideremos la función

$$F:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x)=[f(b)-f(a)]\,x-f(x)\,(b-a)$$

Las funciones $y=x$ e $y=f(x)$ son continuas en $[a,b]$. Luego F, como combinación lineal de dos funciones continuas, es continua en $[a,b]$.
Por la misma razón, F es derivable en $]a,b[$.
Además: $F(a) = [f(b)-f(a)]a - f(a)(b-a) =$
$= af(b) - af(a) - bf(a) + af(a) = af(b) - bf(a)$
y $F(b) = [f(b)-f(a)]b - f(b)(b-a) = bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b) =$
$= af(b) - bf(a)$.
Luego $F(a) = F(b)$.
Aplicando, entonces el teorema de Rolle, podemos asegurar la existencia de un punto $c \in]a,b[$ para el cual $F'(c) = 0$.
Pero $F'(c) = f(b) - f(a) - f'(c)(b-a) = 0$
Luego $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: ① La interpretación geométrica de este teorema nos dice que existe al menos un punto $(c, f(c))$ de la gráfica de f en el cual la tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, pues
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de esta recta



y $f'(c)$ es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$.
② El teorema de Rolle se deduce también del teorema de los incrementos finitos, trivialmente, lo que pone de manifiesto la equivalencia de ambos teoremas.
③ El teorema de los incrementos finitos de Lagrange se puede generalizar por medio de teorema del valor medio de Cauchy, que se enuncia a continuación.

1.3. TEOREMA: (Teorema del valor medio de Cauchy).
Sean f y g dos funciones definidas en $[a,b]$ y con valores en $\mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$. Supongamos que f y g admiten derivada (finita o infinita) en $]a,b[$ de modo que f' y g' no son infinitas, simultaneamente, en un punto de $]a,b[$. Entonces existe un punto $c \in]a,b[$ tal que
$$f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$$
DEMOSTR.: Consideremos la función
$$F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto F(x) = f(x)[g(b)-g(a)] - g(x)[f(b)-f(a)]$$
- F está bien definida, pues f y g están definidas en $[a,b]$ y F es combinación lineal de f y g.

- F es continua en $[a,b]$, por ser combinación lineal de dos funciones continuas en $[a,b]$
- F admite derivada (finita o infinita) en $]a,b[$, pues
$$F'(x) = f'(x)[g(b)-g(a)] - g'(x)[f(b)-f(a)]$$
y f' y g' no son infinitas simultaneamente (es decir, no puede salir una indeterminación).

F cumple las hipótesis del teorema de Rolle, pues:
$$F(a) = f(a)[g(b)-g(a)] - g(a)[f(b)-f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$
$$F(b) = f(b)[g(b)-g(a)] - g(b)[f(b)-f(a)] = f(a)g(b) - g(a)f(b)$$
Luego:
$$\exists c \in]a,b[\;/\; F'(c)=0.$$
Es decir, $\exists c \in]a,b[\;/\; f'(c)[g(b)-g(a)] = g'(c)[f(b)-f(a)]$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: ① El teorema de Lagrange es un caso particular de éste, para $g(x)=x$, $\forall x \in [a,b]$. Además, $g'(x)=1$, $\forall x \in]a,b[$. Luego f' y g' no pueden ser simultáneamente infinitas.

② No existe un teorema del tipo del teorema de Lagrange de los incrementos finitos (o del tipo del de Cauchy) para una función con valores en $\mathbb{C}$.

Sea
$$f : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

f verifica las hipótesis del teorema de Lagrange, sin embargo, no existe $c \in]0,2\pi[$ tal que $f(2\pi) - f(0) = f'(c)(2\pi - 0)$, pues $f(2\pi)-f(0) = (0,0)$, $f'(c) = (-\operatorname{sen} c, \cos c)$

Luego si $2\pi(-\operatorname{sen} c, \cos c) = (0,0) \Rightarrow (-\operatorname{sen} c, \cos c) = (0,0)$ lo cual no es cierto, pues el seno y el coseno no se anulan simultaneamente en ningún punto de $[0,2\pi]$.

③ Otra expresión del teorema de Lagrange es la siguiente.
Sea h un número real positivo y f una función real definida en en el intervalo $[a,a+h]$ que verifica las hipótesis de dicho teorema.
Entonces $\exists \theta \in]0,1[\;/\; f(a+h) - f(a) = h f'(a+\theta h)$
pues todo punto c de $]a,a+h[$ se puede poner en la forma $a+\theta h$ siendo $0<\theta<1$.

④ Si en el teorema de Cauchy, g' no se anula en $]a,b[$ y $g(a) \neq g(b)$ podemos poner:
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$$

⑤ Aún podemos enunciar un teorema más general que el de Cauchy.

1.4. TEOREMA: Sean f y g dos funciones definidas en el abierto $]a,b[$ y con valores en $\mathbb{R}$, tales que son continuas y admiten derivadas (finita o infinita) en todos los puntos de $]a,b[$, de modo que f' y g' no son infinitas simultaneamente en ningun punto. Supongamos que existen los límites laterales siguientes:

$$f(a+)=\lim_{x\to a+} f(x),\ g(a+)=\lim_{x\to a+} g(x),\ f(b-)=\lim_{x\to b-} f(x),\ g(b-)=\lim_{x\to b-} g(x)$$

y son números reales. Entonces

$$\exists c\in]a,b[\ /\ f'(c)[g(b-)-g(a+)]=g'(c)[f(b-)-f(a+)]$$

Demostr.: Consideremos las funciones F y G definidas del siguiente modo.

$$F(x)=\begin{cases} =f(a+) & \text{si } x=a \\ =f(b-) & \text{si } x=b \\ =f(x) & \text{si } x\in]a,b[\end{cases} \qquad G(x)=\begin{cases} =g(a+) & \text{si } x=a \\ =g(b-) & \text{si } x=b \\ =g(x) & \text{si } x\in]a,b[\end{cases}$$

F y G están definidas en el compacto $[a,b]$. Veamos que verifican las hipótesis del teorema de Cauchy:

- F es continua en $[a,b]$: F es continua en $]a,b[$, pues $\forall x\in]a,b[$, $F(x)=f(x)$ y f es continua en $]a,b[$ por hipótesis.

  F es continua en "a", pues $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} F(x)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=f(a+)$

  y $F(a)=f(a+)$. Luego $\lim_{x\to a} F(x)=F(a)$, que prueba que F es continua en a.

  Analogamente, F es continua en b, y G es continua en $[a,b]$.
- F y G tienen derivadas en $]a,b[$, pues están definidas en $]a,b[$ como f y g respectivamente.

F y G verifican las hipótesis del teorema del valor medio de Cauchy. Luego:

$$\exists c\in]a,b[\ /\ F'(c)[G(b)-G(a)]=G'(c)[F(b)-F(a)]$$

o lo que es lo mismo: $f'(c)[g(b-)-g(a+)]=g'(c)[f(b-)-f(a+)]$, c.q.d.

OBSERVACION: Este teorema implica el teorema de Cauchy, pues si f ~~y~~ g son continuas en $[a,b]$, son continuas en $]a,b[$ y en a y en b, luego existen los límites laterales $f(a+)$, $f(b-)$, $g(a+)$ y $g(b-)$ y se verifica que $f(a+)=f(a)$, $f(b-)=f(b)$, $g(a+)=g(a)$ y $g(b-)=g(b)$, por la continuidad.

2. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE LOS INCREMENTOS FINITOS

2.1. TEOREMA: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$.

a) Si f' es positiva (finita o infinita) en $]a,b[$, entonces f es estrictamente creciente.

b) Si f' es negativa (finita o infinita) en $]a,b[$, entonces f es estrictamente decreciente.

Demostr.: a) Hip. $f'(x)>0$, $\forall x\in]a,b[$

Sean x_1 y x_2 puntos de $[a,b]$ tales que $x_1<x_2$.

Consideremos el compacto $[x_1,x_2]$. En este intervalo se dan las hipótesis del teorema de Lagrange. Luego $\exists c\in]x_1,x_2[\ /\ f(x_1)-f(x_2)=f'(c)(x_1-x_2)$

Pero $f'(c)>0$ por hipótesis y $x_1-x_2<0$, luego
$f'(c)(x_1-x_2)<0 \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)<0 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
Luego $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.

b) Análogo.

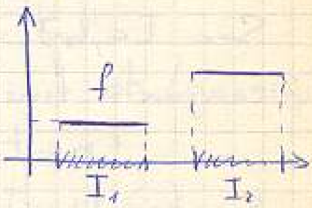
2.2. TEOREMA DE CARACTERIZACION DE FUNCIONES CONSTANTES:

Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ una función derivable en todos los puntos de I. Entonces f es constante si y solo si $f'(x)=0$, $\forall x\in I$.

Demostr.: N) Si f es constante, $f'(x)=0, \forall x\in I$, pues la derivada de una constante es 0.

S) Por el teorema de los incrementos finitos
$\forall x_1,x_2\in I, (x_1<x_2), \exists c\in]x_1,x_2[\subset I / f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)$
Pero $f'(c)=0$, pues $c\in I$. Luego $f(x_2)-f(x_1)=0 \Rightarrow f(x_2)=f(x_1)$ que prueba que f es constante en I.

OBSERVACION: ① Si I no es un intervalo, el teorema no es cierto
Sea $I=I_1\cup I_2$ y $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función con una gráfica como la del margen. Evidentemente $\forall x\in I$, $f'(x)=0$. Sin embargo, f no es constante.



② Para funciones complejas de variable real, el teorema sigue siendo cierto. Sea $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ una función derivable en todos los puntos del intervalo I. Entonces
f constante $\Leftrightarrow \forall x\in I$, $f'(x)=0$.
Descompuesta f en sus partes real e imaginaria: $f=(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$
se tiene que $f'=[(\operatorname{Re} f)', (\operatorname{Im} f)']$
Si f es constante $\Rightarrow \operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son constantes $\Rightarrow ((\operatorname{Re} f)'(x)=0, \forall x\in I)\ \wedge$
$\wedge\ ((\operatorname{Im} f)'(x)=0, \forall x\in I) \Rightarrow f'(x)=0$, $\forall x\in I$.
Recíprocamente, si $\forall x\in I$, $f'(x)=0 \Rightarrow \operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son constantes $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ constante.

EJEMPLOS: ① Sea la función $\operatorname{sen}: [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$. Esta función es estrictamente creciente en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ pues $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $(\operatorname{sen})'(x)=\cos x>0$.

② La función $\cos:[0,\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ es estrictamente decreciente en $[0,\pi]$ pues $(\cos)'(x)=-\operatorname{sen} x<0$, $\forall x\in]0,\pi[$.

③ $y=\operatorname{tg} x$ es estrictamente creciente en $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, pues
$y'=\frac{1}{\cos^2 x}>0$, $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, pues $\cos^2 x>0$, $\forall x\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

④ $y=\operatorname{cotg} x$ es estrictamente decreciente en $]0,\pi[$, pues
$y'=\frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}<0$, $\forall x\in]0,\pi[$

⑤ La función $y = Sh\,x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ pues $y' = Ch\,x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

⑥ La función $y = Ch\,x$ es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$, pues $y' = Sh\,x > 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$, y estrictamente decreciente en $]-\infty, 0[$, pues $\forall x \in]-\infty, 0[$, $y' = Sh\,x < 0$.

⑦ La función $y = Th\,x$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, pues $y' = \frac{1}{Ch^2 x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

⑧ $y = Cth\,x$ es estrictamente decreciente en su dominio de definición, $\mathbb{R} - \{0\}$, pues $y' = \frac{-1}{Sh^2 x} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Las funciones inversas tienen los mismos intervalos de crecimiento y decrecimiento que las directas.

3. FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA

*** PARTICION DE UN INTERVALO**: Definición:

Sea $[a,b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Una partición P de $[a,b]$ es un conjunto finito de puntos, $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n\}$ tales que

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

Se denotará por $\mathcal{P}([a,b])$ el conjunto de las particiones de $[a,b]$.

*** FUNCIONES DE VARIACION ACOTADA**:

DEFINICIÓN: Sea una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea P una partición de $[a,b]$, $P \in \mathcal{P}([a,b])$. Entonces se define la variación de la función f con respecto a la partición $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ como:

$$V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

DEFINICION: Se dice que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de variación acotada si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$V_f(P) \leq M, \quad \forall P \in \mathcal{P}([a,b])$$

es decir si el conjunto $\{V_f(P) / P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ es acotado superiormente; (inferiormente $V_f(P)$ esta acotado por cero).

DEFINICION: Si f es una función de variación acotada en $[a,b]$, se define la variación total de f en $[a,b]$ como el supremo del conjunto $\{V_f(P) / P \in \mathcal{P}([a,b])\}$ que es un número real pues f es de variación acotada. Se reprenta por:

$$V_f([a,b]) = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} V_f(P)$$

3.1. TEOREMA: (de existencia de funciones de variación acotada).

Sea una función $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

a) Si f es monótona en $[a,b]$ entonces f es de variación acotada.

b) Si f es continua en $[a,b]$ y tiene derivada en $]a,b[$ de forma que $|f'(t)| \leq K'$ (cte), $\forall t \in]a,b[$, entonces f es de variación acotada.

Demostr.: a) $V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})|$

Supongamos que f es monótona creciente en $[a,b]$, entonces $f(t_k) \geq f(t_{k-1})$. Luego $|f(t_k) - f(t_{k-1})| = f(t_k) - f(t_{k-1})$

Luego $V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) = f(t_n) - f(t_0) = f(b) - f(a)$

Luego $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $V_f(P) = f(b) - f(a)$

Luego para $M = f(b) - f(a)$ se tiene que $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $V_f(P) \leq M$

Por tanto f es de variación acotada.

b) Sea P una partición cualquiera de $[a,b]$, $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$.

f cumple en el intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ las hipótesis del teorema de Lagrange.

Luego $\exists t^*_k \in]t_k, t_{k-1}[$ / $f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t^*_k)(t_k - t_{k-1})$

Luego $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, $|f(t_k) - f(t_{k-1})| = |f'(t^*_k)|(t_k - t_{k-1}) \leq$
$\leq K'(t_k - t_{k-1})$.

Luego $V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} K'(t_k - t_{k-1}) =$
$= K' \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = K'(t_n - t_0) = K'(b-a)$

Por tanto, si $M = K'(b-a)$ se tiene que $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $V_f(P) \leq M$, que prueba que f es de variación acotada. c.s.q.d.

Ejemplo: La función seno es una función de variación acotada en todo intervalo compacto $[a,b]$, pues es continua en $[a,b]$ y su derivada, la función coseno, está acotada en $]a,b[$.

OBSERVACIÓN: Si f es continua en $[a,b]$ y f' existe y está acotada en valor absoluto por K, entonces es una función lipschitziana en $[a,b]$ y una constante que satisface una condición de Lipschitz es K.

3.2 TEOREMA: Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función de variación acotada, entonces f es acotada en $[a,b]$.

Demostr.: $-$ $\forall x \in]a,b[$, podemos considerar la partición $P = \{a, x, b\}$

Siendo f una función de variación acotada

$\exists M > 0 / \forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $V_f(P) \leq M$.

En nuestro caso, $V_f(P) = |f(b) - f(x)| + |f(x) - f(a)| \leq M$

Pero $||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| \leq M$

y $|f(x)| - |f(a)| \leq ||f(x)| - |f(a)|| \Rightarrow |f(x)| - |f(a)| \leq M$

Luego $|f(x)| \leq M + |f(a)|$, $\forall x \in]a,b[$

Siendo $M + |f(a)|$ constante, f está acotada en $]a,b[$

- f está acotada en a, pues $|f(a)| < M + |f(a)|$ ya que $M > 0$.
- f está acotada en b, pues si consideramos la partición $P = \{a, b\}$, $|f(b) - f(a)| \leq M \Rightarrow |f(b)| \leq M + |f(a)|$.

Luego $\forall x \in [a,b]$, f esta acotada por $M + |f(a)|$. csqd.

• Ejemplo de una función que no es de variación acotada

Consideremos una función f definida en el compacto $[0,1]$ definida así:

$$f(x) = \begin{cases} = \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ = 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

f no es de variación acotada en $[0,1]$, pues si la fuese sería acotada y f no está acotada en $[0,1]$.

3.3. TEOREMA: Si f y g son dos funciones de variación acotada en $[a,b]$ entonces $f+g$ y $f \cdot g$ son funciones de variación acotada en $[a,b]$.

Demostr.: $*$ $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$

$$V_{f+g}(P) = \sum_{k=1}^{n} |(f+g)(t_k) - (f+g)(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| (f(t_k) - f(t_{k-1})) + (g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| =$$

$$= V_f(P) + V_g(P) \leq V_f([a,b]) + V_g([a,b])$$

Luego $V_{f+g}([a,b]) \leq V_f([a,b]) + V_g([a,b])$, pues es $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$

Si f y g son de variación acotada, las variaciones totales de f y g en $[a,b]$ son números reales, que prueba que $f+g$ es de variación acotada.

$*$ $$V_{f \cdot g}(P) = \sum_{k=1}^{n} |(f \cdot g)(t_k) - (f \cdot g)(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) \cdot g(t_k) - f(t_{k-1}) \cdot g(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| [f(t_k) - f(t_{k-1})] g(t_k) + [g(t_k) - g(t_{k-1})] f(t_{k-1}) \right| \leq$$

$$\leq B \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + A \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

siendo $A = \sup_{t \in [a,b]} f(t)$ y $B = \sup_{t \in [a,b]} g(t)$ que existen en $\mathbb{R}$ pues si f y g son de variación acotada en $[a,b]$ están acotadas

Luego: $V_{f.g}(P) \leq B \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| + A \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| =$

$= B\, V_f(P) + A\, V_g(P) \leq B\, V_f([a,b]) + A\, V_g([a,b])$.

Como esto se verifica $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, se tiene que

$$V_{f.g}([a,b]) \leq B \cdot V_f([a,b]) + A\, V_g([a,b]).$$

que prueba que f es de variación acotada. csqd.

<u>OBSERVACION</u>: Un caso particular del teorema anterior es el caso del producto de una función de variación acotada por un escalar; la función que resulta es una función de variación acotada. Luego el conjunto de las funciones de variación acotada tiene estructura de espacio vectorial real.

<u>3.4. TEOREMA</u>: Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Supongamos que existe una constante positiva m tal que $m \leq |f(x)|$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces la función $g = 1/f$ es de variación acotada en $[a,b]$.

Demostr.: $\forall P \equiv \{t_0, t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$

$$V_g(P) = \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{f(t_k)} - \frac{1}{f(t_{k-1})} \right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(t_k) - f(t_{k-1})|}{|f(t_k)| \cdot |f(t_{k-1})|} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(t_k) - f(t_{k-1})|}{m^2}$$

pues $\forall k \in \{0,1,\ldots,n\}, |f(t_k)| \geq m$.

Entonces: $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$

$$V_g(P) \leq \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \frac{1}{m^2} V_f(P)$$

Pero $V_f(P) \leq V_f([a,b])$ (variación total de f en $[a,b]$).

Luego $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $V_g(P) \leq \frac{1}{m^2} V_f([a,b])$

Por tanto $V_g([a,b]) \leq \frac{1}{m^2} V_f([a,b]) < +\infty$. csqd.

<u>3.5. COROLARIO</u>: Sean h y f dos funciones de variación acotada en un compacto $[a,b]$. Supongamos que existe $m>0$ tal que $|f(x)| \geq m$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces la función $g = h/f$ es una función de variación acotada en $[a,b]$.

Demostr.: Por el teorema anterior $1/f$ es una funcion de variación acotada en $[a,b]$.

Entonces, según teorema 3.3.:

$g = \frac{h}{f} = h \cdot \frac{1}{f}$ es una función de variación acotada en $[a,b]$.

4. PROPIEDAD DE LOS VALORES INTERMEDIOS PARA LA FUNCION DERIVADA

4.1. TEOREMA: Sea una función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y que tenga derivada (finita o infinita) en $]a,b[$. Supongamos que existen las derivadas laterales $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, ambas finitas. Entonces, f' alcanza en $[a,b]$ todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$. Es decir:

$$\forall \xi \in [f'_+(a), f'_-(b)], \exists c \in [a,b] / f'(c) = \xi \qquad (*)$$

Demostr.: Vamos a definir dos nuevas funciones g y h como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \\ = f'_+(a) & \text{si } x = a \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} = \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \\ = f'_-(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

Evidentemente, g y h están definidas en $[a,b]$.

g es continua, pues si $x \neq a$, g es el cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula en ningún punto; luego es continua, y si $x = a$, g está definida como $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in [a,b]}} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_+(a)$, luego g también es continua en a. Análogamente h es continua en $[a,b]$.

Vamos a establecer dos resultados de los que se deduce, inmediatamente lo que queremos probar:

a) f' alcanza en $[a,b]$ todos los valores comprendidos entre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y $f'_+(a)$.

Supongamos que $f'_+(a) \leq \xi \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Si $\xi = f'_+(a)$, el caso es trivial pues $\exists c = a \in [a,b] / f'(c) = \xi$.

Si $\xi = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por el teorema de los incrementos finitos, existe $c \in]a,b[$ tal que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \Rightarrow \xi = f'(c)$.

Si $f'_+(a) < \xi < \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por definición de g:

$g(a) < \xi < g(b)$. Siendo g continua, en virtud del teorema de los valores intermedios para funciones continuas, $\exists x_0 \in]a,b[/ g(x_0) = \xi$

Es decir $\exists x_0 \in]a,b[/ \dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \xi$

Aplicando el teorema de los incrementos finitos al compacto $[a, x_0]$

$\exists c \in]a, x_0[\subset]a,b[/ f'(c) = \dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} = \xi$

b) Análogamente, f' alcanza en $[a,b]$ todos los valores comprendidos entre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ y $f'_-(b)$. (Utilícese la función h).

Entonces el teorema es trivial, pues hemos supuesto que $f'_+(a) < f'_-(b)$.

(*) Si [illegible]

Entonces si $K = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq f'_-(b) > f'_+(a)$, como f' alcanza en $[a,b]$ todos los valores comprendidos entre K y $f'_+(a)$, alcanzará también en $[a,b]$ todos los valores comprendidos entre $f'_-(b)$ y $f'_+(a)$. Análogamente, si $K \leq f'_+(a) < f'_-(b)$, según b), f' alcanzará todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$.

Si $f'_+(a) < K < f'_-(b)$, según a) y b), f' alcanza todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y K y entre K y $f'_-(b)$; luego f' alcanza, en cualquier caso, todos los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$. csqd.

OBSERVACIONES: ① Para demostrar el teorema anterior no se puede aplicar únicamente el teorema de los valores intermedios para funciones continuas, pues no podemos asegurar que f' sea continua. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

En el punto $x=0$, la función f tiene de cociente incremental

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{x} = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

que converge a 0 cuando x tiende a cero. Luego $f'(0) = 0$.

Luego f es derivable en $\mathbb{R}$. Sin embargo, f' no es continua en 0 pues no existe $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$.

f', entonces, no es continua, sin embargo, por el teorema anterior, verifica la propiedad de los valores intermedios. Podemos concluir de aquí que la propiedad de los valores intermedios no es una propiedad característica de las funciones continuas.

4.2. TEOREMA: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene derivada finita en I. Si a y b son puntos de I tales que $a<b$, entonces f' alcanza en $[a,b]$ todos los valores comprendidos entre $f'(a)$ y $f'(b)$.

Demostr.: Es suficiente aplicar la propiedad de los valores intermedios al compacto $[a,b]$.

4.3. COROLARIO: Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Entonces si $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$, f es estrictamente monótona en $[a,b]$.

Demostr.: Si probamos que

$(\forall x \in]a,b[, f'(x)>0) \vee (\forall x\in]a,b[, f'(x)<0)$

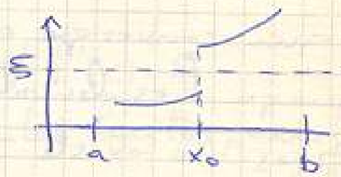
quedará probado que f es estrictamente monótona en $[a,b]$, según TEOREMA 2.1.
Supongamos, entonces, que esto no es cierto; es decir, que

$\exists x_1 \in]a,b[\,/\, f'(x_1)>0 \ \wedge \ \exists x_2 \in]a,b[\,/\, f'(x_2)<0$

Entonces, por la propiedad de los valores intermedios para la función derivada siendo $0\in [f'(x_2), f'(x_1)]$, $\exists x_3 \in [x_1, x_2] \,/\, f'(x_3)=0$
lo cual contradice la hipótesis de que $\forall x\in]a,b[, f'(x)\neq 0$. csqd.

4.4. COROLARIO: Sea $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y con derivada finita en $]a,b[$. Entonces, si $f':]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona, es continua en $]a,b[$.

Demostr.: Recordemos que si una función g es monótona en todo su dominio de definición, entonces existen los límites laterales en todo punto x_0 del dominio y se tiene, si g es creciente que $g_-(x_0)\leq g_+(x_0)$ y si g es decreciente, $g_-(x_0)\geq g_+(x_0)$.
Si f' no fuese continua en $]a,b[$, existiría un punto $x_0\in]a,b[$ tal que f' no es continua en x_0. Si f' es monótona, por ejemplo, creciente, debe ser $f'_-(x_0)< f'_+(x_0)$. Entonces existe
$\xi \in]f'_-(x_0), f'_+(x_0)[$ para el cual no existe un punto de $[a,b]$ cuya imágen sea ξ, lo cual contradice que f verifica la propiedad de los valores intermedios, según las hipótesis. csqd.



5. CONVERGENCIA UNIFORME DEL COCIENTE INCREMENTAL

5.1. LEMA: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y a y b puntos de I. Supongamos que $\forall x\in I$, $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ admite derivada finita y que la función derivada es continua en I. Entonces se verifica que

$$\forall z\in I, \ |f(b)-f(a)-f'(z)(b-a)|\leq |b-a| \sup_{t\in J} |f'(t)-f'(z)|$$

Siendo J el intervalo determinado por a y b.

Demostr.: Aplicando el teorema de los incrementos finitos al intervalo J, en el cual f es derivable, y, por tanto, continua, se tiene que:

$$\exists c\in J \,/\, f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Entonces $\forall z\in I$, $f(b)-f(a)-f'(z)(b-a) = f'(c)(b-a)-f'(z)(b-a) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall z\in I, \ |f(b)-f(a)-f'(z)(b-a)| = |b-a|\,|f'(c)-f'(z)|$
Siendo la función $x\in I \xrightarrow{f'} f'(x)\in\mathbb{R}$ continua, la aplicación que a $t\in I \xrightarrow{f'} |f'(t)-f'(z)|$ es continua en el intervalo

compacto $\bar{J}$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, existe en $\mathbb{R}$ $\sup_{t\in\bar{J}} |f'(t)-f'(z)|$. Por tanto, como $J\subset\bar{J}$, podemos hablar del número real $\sup_{t\in J}|f'(t)-f'(z)|$.

Como $c\in J$, $|f'(c)-f'(z)| \leq \sup_{t\in J}|f'(t)-f'(z)|$. Luego

$$|f(b)-f(a)-f'(z)(b-a)| \leq |b-a| \sup_{t\in J}|f'(t)-f'(z)| \text{. c.s.q.d.}$$

5.2. TEOREMA: Convergencia uniforme del cociente incremental.

En las hipótesis del lema, si I es un intervalo compacto se verifica que $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, |h|<\delta \Rightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \leq \varepsilon$, $\forall x\in I$

donde δ no depende de x, siendo $h\in\mathbb{R}$ tal que $x+h\in I$.

Demostr.: Con la notación del lema, si hacemos $a=x$, $b=x+h$ y $z=x$, se tiene que

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h| \leq |h| \sup_{t\in J_h}|f'(t)-f'(x)| \qquad (\mathrm{I})$$

donde J_h es el intervalo determinado por x y $x+h$.

Siendo f' continua en I, e I compacto, se deduce que f' es uniformemente continua en I. Entonces:

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \,/\, \underset{u,v\in I}{|u-v|\leq\delta} \Rightarrow |f'(u)-f'(v)|\leq\varepsilon.$$

Aplicando este resultado a los puntos x y $x+h$, se tiene que $|(x+h)-x|=|h|$.

Entonces dado $\varepsilon>0, \exists\delta>0 \,/\, |h|\leq\delta \Rightarrow |f'(x+h)-f'(x)|\leq\varepsilon$.

En particular, $\forall t\in J_h$, $|f'(t)-f'(x)| \leq |f'(x+h)-f'(x)| \leq \varepsilon$. Luego

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 \,/\, |h|\leq\delta \Rightarrow \sup_{t\in J_h}|f'(t)-f'(x)|\leq\varepsilon. \qquad (\mathrm{II})$$

Entonces, según (I) y (II):

$$|f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h| \leq |h| \sup_{t\in J_h}|f'(t)-f'(x)| \leq$$

$$\leq |h|\cdot\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h}{h}\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| \leq \varepsilon$$

Luego el cociente incremental converge uniformemente hacia $f'(x)$, ya que δ no depende de x, pues es el mismo de la continuidad uniforme de f'. c.s.q.d.

6. REGLA DE L'HÔPITAL

6.1. TEOREMA: Sean $f,g: I\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones que admiten derivada en todos los puntos del intervalo I. Supongamos que $g'(x)\neq 0$

y $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I-\{x_0\}$, donde x_0 es un punto interior de I de forma que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$.

Supongamos que existe $\lambda = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (bien sea finito o infinito)

Entonces existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y es λ.

Demostr.: Siempre podemos hablar del cociente $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ en $I-\{x_0\}$ pues $\forall x \in I-\{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$. Lo mismo se puede decir del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$. Téngase en cuenta que podíamos haber definido f y g en $I-\{x_0\}$, pues para efectos de calcular el límite no es preciso que estén definidas en x_0. En este caso habríamos hecho:

$g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

con lo cual queda garantizada la continuidad en I.

En virtud de teorema de Cauchy (del valor medio)

$$\forall x \in I-\{x_0\}, \exists \xi \,/\, \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\mathrm{I})$$

donde ξ es un punto comprendido entre x y x_0, es decir, tal que $|\xi - x_0| < |x - x_0|$. El valor de ξ depende de x.

- Supongamos que λ es finito; entonces

$$\lim_{y\to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)} = \lambda \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, \underset{y\neq x_0}{|y-x_0| \leq \delta} \Rightarrow \left|\frac{f'(y)}{g'(y)} - \lambda\right| \leq \varepsilon \quad (\mathrm{II})$$

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \,/\, 0<|x-x_0| \leq \delta \Rightarrow |\xi - x_0| \leq \delta \overset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow}$

$\overset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow} \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - \lambda\right| \leq \varepsilon \overset{(\mathrm{I})}{\Longrightarrow} \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| \leq \varepsilon$.

Luego $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$.

- Si $\lambda = +\infty$, $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta>0 \,/\, 0<|y-x_0| \leq \delta \Rightarrow \frac{f'(y)}{g'(y)} \geq A \quad (\mathrm{III})$

Entonces $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \delta>0 \,/\, 0<|x-x_0| \leq \delta \Rightarrow |\xi - x_0| \leq \delta \Rightarrow$

$\overset{(\mathrm{III})}{\Longrightarrow} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq A \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \geq A$, pues $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Luego $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

- Si $\lambda = -\infty$, se procede de modo análogo. c.s.q.d.

<u>OBSERVACION</u>: El teorema sigue siendo cierto si el punto x_0 es un extremo del intervalo I. En este caso habría que tomar los límites laterales.

6.2. TEOREMA: Sean $f, g :]B, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $B>0$, tales que f y g tienen derivada en todos los puntos de $]B,+\infty[$. Supongamos que $\forall x \in]B,+\infty[$, $g(x) \neq 0$ y $g'(x) \neq 0$. Supongamos además que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Entonces, si existe

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$$

se tiene que $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y su valor es λ.

Demostr.: Consideremos las funciones f_1 y g_1 definidas

$$f_1(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{y} \quad g_1(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

f y g estan definidas en $]B,+\infty[$, luego $B < \frac{1}{t} < +\infty \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{1}{B} > t > 0$. Por tanto f_1 y g_1 están definidas en $]0, \frac{1}{B}[$

f_1 y g_1 son derivables en $]0,\frac{1}{B}[$, por composición de funciones derivables, pues, si $h(x) = \frac{1}{x}$

$$f_1, g_1 :]0, \tfrac{1}{B}[\xrightarrow{\ h\ }]B,+\infty[\xrightarrow{\ f,g\ } \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto \frac{1}{t} \longmapsto f(\tfrac{1}{t}), g(\tfrac{1}{t})$$

h es derivable en $]0,\frac{1}{B}[$ y f y g son derivables en $]B,+\infty[$ por hipotesis, luego f_1 y g_1 son derivables en $]0,\frac{1}{B}[$

Ademas $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f_1(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} f(\frac{1}{t}) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

y $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} g_1(t) = 0$.

Por otro lado, si $g(x) \neq 0$, $\forall x \in]B,+\infty[$, $g_1(t) = g(\frac{1}{t}) \neq 0$, $\forall t \in]0,\frac{1}{B}[$

Análogamente, $g_1'(t) \neq 0$, $\forall t \in]0, \frac{1}{B}[$, ya que

$$g_1'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$$, en virtud de la regla de la cadena.

Luego se verifican, para f_1 y g_1 las hipótesis del teorema 6.1. Entonces: si $\exists \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}$ se tiene que $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)}$.

Pero $$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{-\frac{1}{t^2} f'(\frac{1}{t})}{-\frac{1}{t^2} g'(\frac{1}{t})} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$$, por hipotesis.

Luego $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lambda \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$. c.s.q.d.

OBSERVACION: Podemos enunciar un teorema totalmente análogo al anterior en el caso en que f y g estén definidas en $]-\infty, A[$, $A<0$.

6.3. TEOREMA: Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y x_0 un punto interior de I. Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en $I-\{x_0\}$ de forma que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I-\{x_0\}$. Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty = \lim_{x\to x_0} g(x)$

Entonces si existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, existe $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y su valor es λ.

Demostr.: Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, $\forall A>0, \exists \delta' > 0 / 0 < \underset{x\in I}{|x-x_0|} \leq \delta' \Rightarrow g(x) \geq A$

Luego hay un entorno de x_0, $]x_0-\delta', x_0+\delta'[$, en el cual la función $g(x)$ no se anula. En este entorno tiene sentido dividir por $g(x)$.

(Téngase en cuenta que si $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a,b[$, g solo puede anularse en un punto de $]a,b[$, como máximo, pues si existiesen dos puntos distintos z_1 y z_2 en los cuales $g(z_1) = g(z_2) = 0$, se tendría por el teorema de los incrementos finitos que $\exists c \in]z_1, z_2[/ g(z_1) - g(z_2) = g'(c)(z_1 - z_2) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow g'(c) = 0$, lo cual contradice que $\forall x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.)

Análogamente si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, f no se anula en un entorno de x_0.

Sea x' un punto fijo de I y $x \in I$ tal que $|x-x_0| < |x'-x_0|$

Entonces $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)} \cdot \frac{\frac{g(x')}{g(x)} - 1}{\frac{f(x')}{f(x)} - 1} \qquad (I)$$

Tiene sentido dividir por $f(x)$, ya que podemos tomar x' lo suficientemente próximo a x_0 para que f no se anule en x, pues a efectos del cálculo del límite sólo interesa el comportamiento de la función en un entorno reducido de x_0.
Además, si tomamos x próximo a x_0, como $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $f(x')$ es constante se tendrá que $f(x) > f(x')$, luego el denominador $\frac{f(x')}{f(x)} - 1$ no se anula.

Por el teorema de Cauchy, existe un punto ξ comprendido entre x y x' tal que $$\frac{f(x')-f(x)}{g(x')-g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Entonces si llamamos $\Phi(x)$ a $\dfrac{\frac{g(x')}{g(x)} - 1}{\frac{f(x')}{f(x)} - 1}$, se tiene, según (I)

que $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Phi(x)$$

Como x' es fijo y $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ será $\lim_{x\to x_0} \Phi(x) = \frac{-1}{-1} = 1$

Podemos considerar tres casos:

1º $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Entonces $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / 0<|y-x_0|\leq\delta \Rightarrow \left|\frac{f'(y)}{g'(y)}-\lambda\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ (II)

Sea x' un punto fijo de I tal que $|x'-x_0|\leq\delta$ (*), y $x\in I$ tal que $|x-x_0|<|x'-x_0|$. Entonces si ξ está comprendido entre x y x', se tiene que $|\xi-x_0|<|x'-x_0|\leq\delta$. ξ es uno de los puntos "y" de (II). Luego:

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\lambda\right| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Si $\lim_{x\to x_0}\Phi(x)=1$, dado $\min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right)>0, \exists \eta>0/0<|x-x_0|\leq\eta \Rightarrow$

$\Rightarrow |\Phi(x)-1| \leq \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right)$.

Entonces $\left|\lambda-\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\lambda-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\Phi(x)\right| = \left|\left(\lambda-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right)\Phi(x)+\lambda(1-\Phi(x))\right| \leq$

$\leq \left|\lambda-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\cdot|\Phi(x)| + |\lambda|\cdot|1-\Phi(x)|$

Entonces, si $|x-x_0| < \min(\eta, |x'-x_0|) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-x_0|<|x'-x_0|\leq\delta \Rightarrow \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-\lambda\right|\leq\frac{\varepsilon}{4} \\ |x-x_0|<\eta \Rightarrow \begin{cases} |\Phi(x)-1|\leq 1 \Rightarrow |\Phi(x)|-1\leq 1 \Rightarrow |\Phi(x)|\leq 2 \\ |\Phi(x)-1|\leq \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \end{cases} \end{cases}$$

Luego si $|x-x_0|<\min(\eta,|x'-x_0|) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\lambda-\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq \left|\lambda-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\cdot|\Phi(x)| + |\lambda|\,|1-\Phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\cdot 2 + |\lambda|\cdot\frac{\varepsilon}{2|\lambda|} = \varepsilon$.

2º $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / 0<|y-x_0|\leq\delta \Rightarrow \left|\frac{f'(y)}{g'(y)}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

Sea x' punto fijo de I tal que $|x'-x_0|\leq\delta$. Entonces $|\xi-x_0|<|x'-x_0| \Rightarrow$

$\Rightarrow |\xi-x_0|\leq\delta \Rightarrow \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

$\lim_{x\to x_0}\Phi(x)=1 \Rightarrow$ dado $1>0, \exists\eta>0/ |x-x_0|\leq\eta \Rightarrow |\Phi(x)-1|\leq 1 \Rightarrow |\Phi(x)|\leq 2$.

Luego si $|x-x_0|<\min(\eta,|x'-x_0|) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\cdot|\Phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2 = \varepsilon$.

Según ① y ②, si $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lambda \Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$.

③ $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda = +\infty$.

Entonces $\forall A > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |y - x_0| \leq \delta \Rightarrow \frac{f'(y)}{g'(y)} \geq 2A$

Tomando x' fijo tal que $|x' - x_0| \leq \delta$, $x \in I$ tal que $|x - x_0| < |x' - x_0|$ entonces $|\xi - x_0| \leq \delta \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \geq 2A$

Además si $\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = 1$, dado $1/2 > 0$, $\exists \eta > 0 / 0 < |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |\Phi(x) - 1| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - \Phi(x) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Phi(x) \geq 1/2$.

Luego si $|x - x_0| < \min(\eta, |x' - x_0|)$

$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Phi(x) \geq 2A \cdot \frac{1}{2} = A$. Luego $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Si $\lambda = -\infty$, se procede de modo análogo. c.s.q.d.

<u>OBSERVACIONES</u>: ① Podemos enunciar un teorema análogo al anterior si $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty = \lim_{x \to x_0} g(x)$

② Si el punto x_0 es un extremo del intervalo I, el teorema sigue siendo cierto. Basta considerar el límite lateral correspondiente.

<u>6.4. TEOREMA</u>: Sean $f, g : [B, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $[B, +\infty[$ de modo que $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in [B, +\infty[$. Supongamos que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} g(x)$. Entonces si existe $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$, existe $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y su valor es λ.

Demostr.: Consideremos las funciones f_1 y g_1 siguientes:

$$f_1 :]0, 1/B] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g_1 :]0, \tfrac{1}{B}] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f_1(t) = f\left(\tfrac{1}{t}\right) \qquad t \longmapsto g_1(t) = g\left(\tfrac{1}{t}\right)$$

$$f_1'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{y} \quad g_1'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)$$

que existen $\forall t \in]0, 1/B]$. Además $g_1'(t) \neq 0$, $\forall t \in]0, \frac{1}{B}]$.

Por otro lado $\lim_{t \to 0+} f_1(t) = \lim_{t \to 0+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

y $\lim_{t \to 0+} g_1(t) = +\infty$

Se verifican las hipótesis del teorema 6.3., luego si existe $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lambda$ entonces existe $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$

Pero $\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$ por hipótesis

Luego $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lambda$.

Luego $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \dfrac{f_1(t)}{g_1(t)} = \lambda$. csqd.

OBSERVACIONES: ① El teorema sigue siendo cierto si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

② Se puede enunciar un teorema totalmente análogo para el caso en que $f, g :]-\infty, \Delta] \to \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

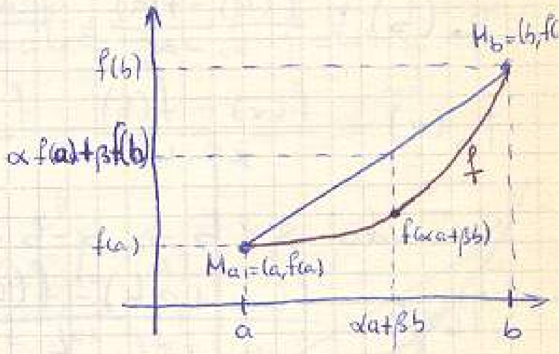
7. FUNCIONES CONVEXAS Y CONCAVAS

* INTRODUCCION: Un subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ se dice convexo si para dos puntos cualesquiera de A el segmento que los une está contenido en A. El conjunto dibujado al márgen no es convexo pues el segmento $[x, y]$ no está totalmente contenido en A.

El segmento que une los puntos x e y es el conjunto
$$[x,y] = \{(1-t)x + ty \,/\, t\in[0,1]\}.$$
Para $t=0$ obtenemos el punto x; para $t=1$, el punto y; para $t\in]0,1[$ obtenemos los puntos comprendidos entre x e y. Tambien podemos poner:
$$[x,y] = \{\alpha x + \beta y \,/\, \alpha,\beta\in[0,1] \text{ y } \alpha+\beta = 1\}$$

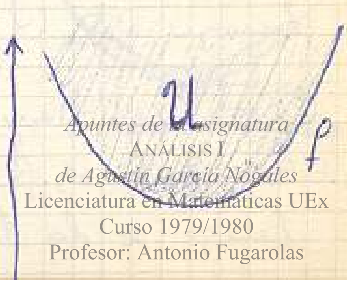
* DEFINICION: Sea $f : I\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es convexa en I si para cada par de puntos $a, b\in I$ y para cada par de números $\alpha,\beta\in[0,1]$ tales que $\alpha+\beta=1$ se tiene que
$$f(\alpha a+\beta b) \le \alpha f(a) + \beta f(b)$$

* INTERPRETACION GEOMETRICA:



Sean a y b dos puntos cualesquiera de I. Consideremos los puntos $M_a = (a, f(a))$ y $M_b = (b, f(b))$ y el segmento
$$[M_a, M_b] = \{\alpha M_a + \beta M_b \,/\, \alpha,\beta\in[0,1] \text{ y } \alpha+\beta=1\} =$$
$$= \{(\alpha a+\beta b, \alpha f(a)+\beta f(b)) \,/\, \alpha,\beta\in[0,1] \text{ y } \alpha+\beta=1\}$$
Si $f(\alpha a+\beta b) \le \alpha f(a)+\beta f(b)$, los valores de la función entre a y b, $\forall a,b\in I$, deben ser menores que las ordenadas correspondientes de los puntos del segmento $[M_a, M_b]$. Luego la función es del tipo dibujado en la figura.

Decir que la función f es convexa en I equivale a decir que el conjunto
$$U = \{(x,y)\in I\times\mathbb{R} \,/\, y \ge f(x)\}$$
es convexo en $\mathbb{R}^2$



* Dada una función $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para cada $x_0 \in I$ podemos definir una aplicación

$$P_{x_0}: I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto P_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Entonces:

7.1. TEOREMA: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Las condiciones siguientes son equivalentes:

① f es convexa en I

② $\forall a, b, x \in I$ tales que $a < x < b$ se tiene que:
$$P_a(x) \leq P_a(b) = P_b(a) \leq P_b(x)$$

③ $\forall x_0 \in I$, $P_{x_0}: I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ es creciente en $I - \{x_0\}$.

Demostr.: $\boxed{① \Rightarrow ②}$ Si $a < x < b$, $\exists \alpha, \beta \in]0,1[\,/\, \alpha + \beta = 1 \wedge x = \alpha a + \beta b$ pues $x \neq a \wedge x \neq b$. Si f es convexa, $f(\alpha a + \beta b) \leq \alpha f(a) + \beta f(b)$. Entonces:

$$P_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(\alpha a + \beta b) - f(a)}{x - a}$$

Siendo $x - a > 0$, $P_a(x) \leq \dfrac{\alpha f(a) + \beta f(b) - f(a)}{\alpha a + \beta b - a} =$

$$= \frac{(\alpha - 1) f(a) + \beta f(b)}{(\alpha - 1) a + \beta b} = \frac{-\beta f(a) + \beta f(b)}{-\beta a + \beta b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = P_a(b)$$

Luego $P_a(x) \leq P_a(b)$

$$P_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = P_b(a)$$

$$P_b(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \frac{f(\alpha a + \beta b) - f(b)}{\alpha a + \beta b - b}.$$

Siendo $x < b \Rightarrow x - b < 0$. Luego, como f es convexa:

$$P_b(x) = \frac{f(\alpha a + \beta b) - f(b)}{\alpha a + \beta b - b} \geq \frac{\alpha f(a) + \beta f(b) - f(b)}{\alpha a + \beta b - b} = \frac{\alpha f(a) + (\beta - 1) f(b)}{\alpha a + (\beta - 1) b} =$$

$$= \frac{\alpha f(a) - \alpha f(b)}{\alpha a - \alpha b} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = P_b(a).$$

Luego $P_a(x) \leq P_a(b) = P_b(a) \leq P_b(x)$.

$\underline{② \Rightarrow ①}$ | Hay que probar que $\forall a, b \in I$, $f(\alpha a + \beta b) \leq \alpha f(a) + \beta f(b)$, con $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$.
Si $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 1$. Luego $f(\alpha a + \beta b) = f(b)$ y $\alpha f(a) + \beta f(b) = f(b)$.
Luego se da la igualdad. Análogamente, si $\alpha = 1$ resulta la igualdad.

Supongamos, entonces, que $\alpha, \beta \in]0,1[$, $\alpha+\beta=1$ y que $a<b$, (si $a>b$ se razona análogamente).

Sea $x=\alpha a+\beta b$. Entonces $a<x<b$.

Por hipótesis se tiene que $p_a(x) \leq p_a(b)$. Supongamos que lo que queremos probar no es cierto y llegaremos a un absurdo.

Si $f(\alpha a+\beta b) > \alpha f(a)+\beta f(b)$, se tiene que

$$p_a(x)=p_a(\alpha a+\beta b)=\frac{f(\alpha a+\beta b)-f(a)}{\alpha a+\beta b-a} > \frac{\alpha f(a)+\beta f(b)-f(a)}{\alpha a+\beta b-a}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)f(a)+\beta f(b)}{(\alpha-1)a+\beta b}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=p_a(b)$$

Luego sería $p_a(x)>p_a(b)$, lo cual contradice la hipótesis

② ⇒ ③ Sean x_1 y x_2 puntos de $I-\{x_0\}$. Se trata de probar que $x_1<x_2 \Rightarrow p_{x_0}(x_1) \leq p_{x_0}(x_2)$

Podemos considerar tres casos

a) $x_0<x_1<x_2$. Entonces, según ②, haciendo $a=x_0$, $x=x_1$ y $b=x_2$ se tiene que $p_{x_0}(x_1) \leq p_{x_0}(x_2)$.

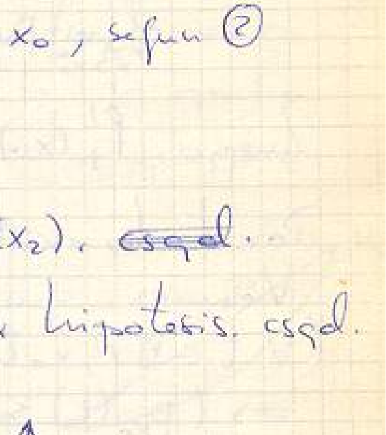
b) $x_1<x_2<x_0$. Entonces, para $a=x_1$, $x=x_2$ y $b=x_0$, según ②
$p_b(a) \leq p_b(x) \Rightarrow p_{x_0}(x_1) \leq p_{x_0}(x_2)$.

c) $x_1<x_0<x_2$. Entonces:
$p_{x_0}(x_1)=p_{x_1}(x_0) \leq p_{x_1}(x_2)=p_{x_2}(x_1) \leq p_{x_2}(x_0)=p_{x_0}(x_2)$. csqd.

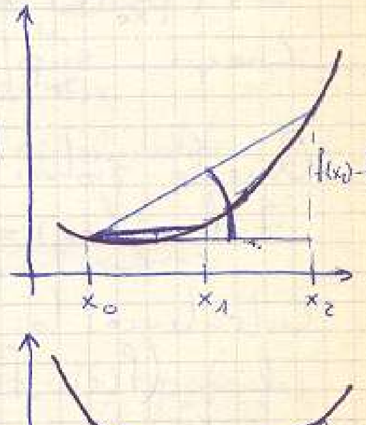
③ ⇒ ② Trivial, pues p_a y p_b son crecientes por hipótesis. csqd.

* Interpretación geométrica del teorema:

a)



b)



El valor de p_{x_0} en un punto x representa el valor de la tangente trigonométrica del ángulo que forma la secante a la curva $y=f(x)$ en los puntos x_0 y x con la parte positiva del eje de las equis. Decir, entonces, que f es convexa en I significa que dado un punto x_0 cualquiera de I y dos puntos $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1<x_2$, entonces la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ es menor que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_2, f(x_2))$

7.2. TEOREMA: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa en I. Entonces en todo punto $x_0 \in \mathring{I}$ existen las derivadas laterales $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$ verificando que $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$. Se tiene además que f es continua en x_0, $\forall x_0 \in \mathring{I}$.

Demostr.: Sea x_0 un punto genérico de $\mathring{I}$.

Siendo f convexa en I, la aplicación

$$p_{x_0}: I - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es creciente según el teorema anterior. Consideremos dos puntos $x', x'' \in I$ tales que $x' < x_0 < x''$, que sabemos que existen, pues $x_0 \in \mathring{I}$.

Nos preguntamos si existe el límite siguiente:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} p_{x_0}(x)$$

Pero $p_{x_0}(x)$, por ser creciente y estar acotada en $]x', x''[$ (está acotada inferiormente por $p_{x_0}(x')$ y superiormente por $p_{x_0}(x'')$), según TEMA 4º, TEOREMA 6.1, existe $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} p_{x_0}(x)$ y vale:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} p_{x_0}(x) = \inf_{x \in]x_0, x''[} p_{x_0}(x)$$

Luego $f'_+(x_0) = \inf\limits_{x \in]x_0, x''[} p_{x_0}(x)$. Análogamente $\exists f'_-(x_0) = \sup\limits_{x \in]x', x_0[} p_{x_0}(x)$

Por tanto, existen las derivadas laterales en todo punto x_0 de $\mathring{I}$

Veamos que $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

$$(\forall t \in]x', x_0[\wedge \forall t' \in]x_0, x''[, \ t < x_0 < t') \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (p_{x_0}(t) \leq p_{x_0}(t'))$$, pues p_{x_0} es creciente.

Luego $\sup\limits_{x \in]x', x_0[} p_{x_0}(x) \leq \inf\limits_{x \in]x_0, x''[} p_{x_0}(x) \Longrightarrow f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

Queda probar que f es es continua. Hay que ver que:

$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, o bien que, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Calculemos los límites laterales:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$$

$$= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} p_{x_0}(x) \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} (x - x_0) = \inf_{x \in]x_0, x''[} p_{x_0}(x) \cdot 0 = 0$$, pues $\inf\limits_{x \in]x_0, x''[} p_{x_0}(x) \in \mathbb{R}$.

Análogamente $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Luego f es continua.

OBSERVACION: Una función convexa $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no tiene porque ser derivable en $x_0 \in I$. Sirve de contraejemplo la función $f(x) = |x|$, que es convexa en $\mathbb{R}$, pero no es derivable en 0.

7.3. TEOREMA: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y derivable en todo punto de I. Entonces la aplicación derivada $x \in I \xrightarrow{f'} f'(x)$ es creciente en I.

Demostr.: Sean x_1 y x_2 dos puntos de I cualesquiera tales que $x_1 < x_2$. Se trata de probar que $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Pero $f'(x_1) = f'_+(x_1) = \inf\limits_{x \in]x_1, x_2[} P_{x_1}(x)$, por el mismo razonamiento que en el teorema anterior. Analogamente $f'(x_2) = f'_-(x_2) = \sup\limits_{x \in]x_1, x_2[} P_{x_2}(x)$

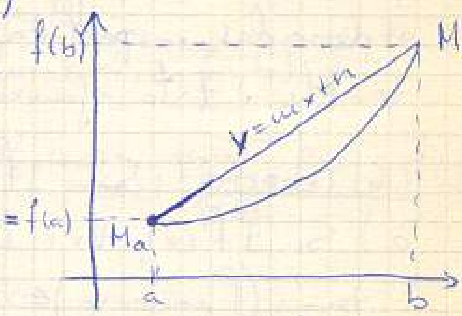
Siendo f convexa y $x_1 < x_2$, por el teorema 7.1, $P_{x_1}(x) \leq P_{x_2}(x)$, $\forall x \in]x_1, x_2[$. Luego $\inf\limits_{x \in]x_1, x_2[} P_{x_1}(x) \leq \sup\limits_{x \in]x_1, x_2[} P_{x_2}(x)$.

Luego $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ c.s.q.d.

7.4. TEOREMA (Recíproco del teorema 7.3.)

Si $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica que existe $f'(x)$, $\forall x \in I$ y la función derivada $x \in I \xrightarrow{f'} f'(x)$ es creciente, entonces f es convexa.

Demostr.: Se trata de probar que $\forall a, b \in I$, $a < b$ la grafica de la función en $[a,b]$ está por debajo de la recta que pasa por los puntos $M_a = (a, f(a))$ y $M_b = (b, f(b))$



Supongamos que esta recta tiene de ecuación $y = mx + n$. Definimos una función g:

$$g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto g(x) = f(x) - (mx + n).$$

Se trata de ver que $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \leq 0$.

g, como suma de dos funciones derivables en $[a,b]$, es derivable en $[a,b]$ y se tiene que: $g'(x) = f'(x) - m$, $\forall x \in [a,b]$.

Si $f'(x)$ es creciente, entonces $g'(x) = f'(x) - m$ es creciente.

Además, $g(a) = g(b) = 0$.

Siendo g continua en $[a,b]$, por ser derivable en $[a,b]$, podemos aplicar el teorema de los incrementos finitos al compacto $[a,b]$:

$$\exists\, c \in]a,b[\;/\; g(b) - g(a) = g'(c)(b-a)$$

Pero $g(b) - g(a) = 0 \Rightarrow g'(c) = 0$, pues $b \neq a$.

Siendo g' creciente, $\forall x \in [a,c]$, $g'(x) \leq g'(c) \Rightarrow \forall x \in [a,c]$, $g'(x) \leq 0$.

Luego g es decreciente en $[a,c]$; por tanto $\forall x \in [a,c]$, $g(x) \leq g(a) = 0$

Además $\forall x \in [c,b]$, $x \geq c \Rightarrow g'(x) \geq g'(c) = 0$. Luego, g es creciente en $[c,b]$.
Entonces $\forall x \in [c,b]$, $g(x) \leq g(b) = 0$.
Luego $\forall x \in [a,b]$, $g(x) \leq 0$. csqd.

7.5. TEOREMA: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivada segunda en todos los puntos de I. Entonces f es convexa en I sii $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

Demostr.: f convexa $\Leftrightarrow$ f' creciente en I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.

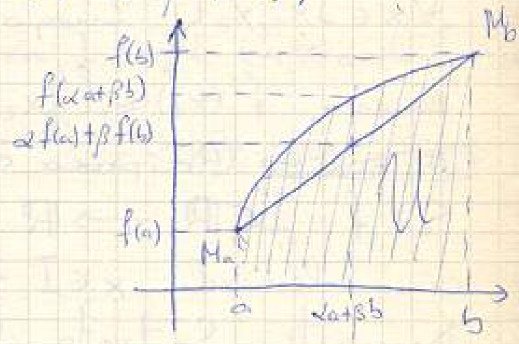
DEFINICION: Sea una función $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es cóncava en I si $-f$ es convexa en I.

CONSECUENCIAS: (f es cóncava) $\Leftrightarrow$ ($-f$ es convexa en I) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall a, b \in I \wedge \forall \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1, -f(\alpha a + \beta b) \leq$
$\leq \alpha(-f)(a) + \beta(-f)(b)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall a, b \in I \wedge \forall \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1, f(\alpha a + \beta b) \geq \alpha f(a) + \beta f(b))$

Consideremos los puntos $M_a = (a, f(a))$ y $M_b = (b, f(b))$. El segmento $[M_a, M_b]$ es el conjunto $\{\alpha M_a + \beta M_b / \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1\} =$
$= \{(\alpha a + \beta b, \alpha f(a) + \beta f(b)) / \alpha, \beta \in [0,1], \alpha + \beta = 1\}$



Luego f es cóncava, si $\forall a, b \in I$ y $\forall x = \alpha a + \beta b \in [a,b]$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$ se tiene que los valores de la función son mayores (ó iguales) que las ordenadas respectivas de los puntos x en la recta que pasa por M_a y M_b. Esto equivale a decir que el conjunto U es convexo en $\mathbb{R}^2$.

7.6. TEOREMA: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Si $\exists f'(x)$, $\forall x \in I$, f es cóncava $\Leftrightarrow$ f' decreciente
pues (f cóncava) $\Leftrightarrow$ ($-f$ convexa) $\Leftrightarrow$ ($-f'$ creciente) $\Leftrightarrow$ (f' decreciente).

b) Si $\exists f''(x)$, $\forall x \in I$, (f cóncava) $\Leftrightarrow$ ($f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$).

8. FORMULA DE TAYLOR

* Consideremos la función polinómica real de grado n

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Esta función queda perfectamente determinada cuando se conocen los coeficientes $a_0, \ldots, a_n$. Para todo $a \in \mathbb{R}$, podemos ordenar $P(x)$ en potencias de $x - a$ dividiendo reiteradamente por este monomio

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n.$$

Una función polinómica no nula de grado n posee derivadas ho...

mulas hasta la derivada n-sima. Derivemos sucesivamente $P(x)$:

$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \dots + nA_n(x-a)^{n-1}$

$P''(x) = 2A_2 + 3\cdot 2\cdot A_3(x-a) + \dots + n(n-1)A_n(x-a)^{n-2}$

$P'''(x) = 3\cdot 2 A_3 + \dots + n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3}$

. . . .

$P^{(n)}(x) = n!\,A_n$

El valor de las derivadas sucesivas en el punto a es:

$P(a) = A_0$, $P'(a) = A_1$, $P''(a) = 2!\,A_2$, $P'''(a) = 3!\,A_3, \dots, P^{(n)}(a) = n!\,A_n$.

Entonces $P(x) = P(a) + \dfrac{P'(a)}{1!}(x-a) + \dfrac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \dfrac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Esta es la llamada fórmula de Taylor para polinomios.

Se deduce que un polinomio $P(x)$ queda determinado si para algún número real a se conoce el valor de $P(a)$ y el de las derivadas sucesivas en el punto a. El valor de $P(x)$ en un punto b es

$$P(b) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(b-a) + \frac{P''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Podemos preguntarnos si para una función que admita las n primeras derivadas existe una expresión semejante a la que hemos hallado para una función polinómica. La respuesta es afirmativa.

* Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de la recta real y $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que admite derivadas finitas y continuas hasta el orden $n-1$ en $[a,b]$ y tiene derivada n-sima finita en $]a,b[$.

Definimos dos funciones T_n y g_K, para cada natural K, en $[a,b]$ del siguiente modo:

$$T_n(x) = f(b) - \left[f(x) + \frac{b-x}{1!}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)\right] \quad (I)$$

$\forall K \in \mathbb{N}$, $g_K(x) = (b-x)^K$.

T_n es una función continua en $[a,b]$ como suma de producto de funciones continuas en $[a,b]$. Además es derivable en $]a,b[$.

g_K es una función continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$.

Se tiene que:

$$T_n'(x) = -\left[f'(x) - f'(x) + \frac{b-x}{1!}f''(x) - \frac{2(b-x)}{2!}f''(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x) - \frac{3(b-x)^2}{3!}f'''(x) + \dots\right.$$

$$\left. + \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-1)}(x) - \frac{(n-1)(b-x)^{n-2}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right]$$

$$= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) \quad , \text{ y esto } \forall x \in]a,b[.$$

Por otro lado $g_K'(x) = -K(b-x)^{K-1}$, $\forall x \in]a,b[$.

Aplicando el teorema del valor medio de Cauchy a estas funciones:

$\exists c \in]a,b[$ tal que $[T_n(a) - T_n(b)]\, g_K'(c) = [g_K(a) - g_K(b)]\, T_n'(c)$

Pero $T_n(b) = 0$ y $g_K(b) = 0$. Luego

$$T_n(a)\, g_K'(c) = g_K(a)\, T_n'(c)$$

Luego $$T_n(a) = \frac{g_K(a)\, T_n'(c)}{g_K'(c)} = \frac{(b-a)^K (b-c)^{n-1} f^{(n)}(c)}{(n-1)!\, K\, (b-c)^{K-1}}$$

Por otro lado, según (I)

$$T_n(a) = f(b) - \left[f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) \right]$$

Luego $$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^K (b-c)^{n-1} f^{(n)}(c)}{K(n-1)!\,(b-c)^{K-1}}$$

El monomio $T_n(a) = \dfrac{(b-a)^K (b-c)^{n-1} f^{(n)}(c)}{(n-1)!\, K\, (b-c)^{K-1}}$ se llama termino complementario en la fórmula de Taylor. Podemos enunciar, entonces, el siguiente teorema:

8.1. TEOREMA: FORMULA DE TAYLOR.

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que tiene derivada finita y continua hasta el orden $n-1$ en $[a,b]$ y derivada n-sima finita en $]a,b[$. Entonces, para cualquier $K \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^K (b-c)^{n-1} f^{(n)}(c)}{K(n-1)!\,(b-c)^{K-1}}$$

donde c es un punto de $]a,b[$ que depende de K.

El término complementario toma expresiones más sencillas en determinadas condiciones:

- Si $n=K$, el termino complementario es:

$$\boxed{T_n(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)}$$ (Termino complementario de Lagrange)

- Si $K=1$, el término complementario toma la expresión:

$$T_n(a) = \frac{(b-a)(b-c)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(c) \quad \text{(Término complementario de Cauchy).}$$

OBSERVACION: Si escribimos la fórmula de Taylor para $n=1$ con término complementario de Lagrange obtenemos que $\exists c \in]a,b[$ tal que $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(c)$ que es la expresión del teorema de los incrementos finitos. Fácilmente se deduce de aquí que la fórmula de Taylor es una generalización del teorema de los incrementos finitos.

* OTRA EXPRESION DE LA FORMULA DE TAYLOR.

Sean a y h números reales cualesquiera. Sea f una función real definida en el intervalo compacto J determinado por los puntos a y $a+h$ tal que posee derivadas finitas y continuas hasta el orden $n-1$ en J y derivada n-sima finita en $\mathring{J}$. Entonces existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

Se deduce inmediatamente si hacemos $a=a$ y $b=a+h$. Entonces $b-a=h$ y si $c \in]a, a+h[$ $(h>0)$, $\exists \theta \in]0,1[$ tal que $c = a+\theta h$, y viceversa.
Hemos escrito la fórmula de Taylor con término complementario de Lagrange.

* FORMULA DE MAC LAURIN

Es una particularización de la fórmula de Taylor al intervalo $[0,b]$, $b \in \mathbb{R}^+$. Si f es una función definida en $[0,b]$ que verifica las hipótesis del teorema de Taylor en dicho intervalo se tiene que

$$\forall x \in]0,b[, \ f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

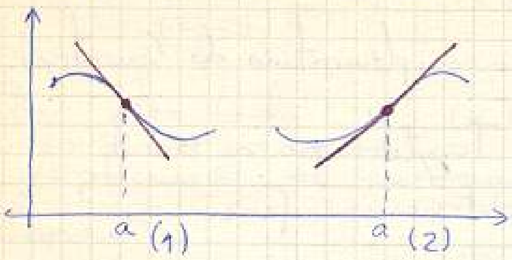
siendo ξ un punto de $]0,x[$.
Como vemos, es un desarrollo de Taylor en el origen.

9. APLICACION DE LA FORMULA DE TAYLOR PARA LA LOCALIZACION DE EXTREMOS RELATIVOS Y PUNTOS DE INFLEXION

* Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en I. Sea a un punto interior de I. La tangente a la curva plana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ tiene de ecuación $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

Si en un cierto entorno U de a, los valores de la función son menores que los correspondientes valores de la tangente, para valores de $x \in U$ tales que $x < a$ (1) (resp. $x > a$, (2)), y para valores de $x \in U$ tales que $x > a$ (1)

(resp. $x<a$ (2)) los valores de la función son mayores que los valores correspondientes de la tangente, se dice que f tiene un punto de inflexión en el punto $(a, f(a))$. Geométricamente, esto significa que la tangente atraviesa a la curva en el punto $(a, f(a))$.



Se trata, por tanto, de estudiar la diferencia $f(x)-y$ donde $f(x)$ es el valor de la función en el punto x e y la ordenada de la tangente en dicho punto.

Supongamos que f es una función de clase n en el intervalo I, $f \in \mathcal{C}^n(I)$, es decir, que admite n derivadas en el intervalo I. Entonces, desarrollando f en serie de Taylor hasta el orden n tenemos que

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

siendo ξ un punto comprendido entre x y a, es decir, que verifica que $|\xi - a| < |x-a|$

Siendo $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ el valor de la ordenada de la tangente en el punto x, se tiene, según lo anterior que:

$$f(x) - y = \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \qquad (I)$$

<u>9.1. TEOREMA</u>: Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suficientemente derivable en I. Entonces si $a \in \mathring{I}$, es condición necesaria y suficiente para que f tenga en el punto a un punto de inflexión que $f''(a)$ sea igual a cero y que el orden de la derivada de menor orden de la función f que es distinta de 0 en a, supuesto que existe, sea impar.

Demostr.: $\underline{\underline{N}}$ | * Supongamos que $f''(a) \neq 0$. Entonces $f''(a) > 0 \vee f''(a) < 0$.

f es suficientemente derivable en I; podemos suponer, entonces, que existe f''' en I. Por tanto, $f'': I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua.

Entonces si $f''(a) > 0$, $\exists V \in \mathcal{F}(a) \,/\, f''(x) > 0$, $\forall x \in V$

y si $f''(a) < 0$, $\exists V \in \mathcal{F}(a) \,/\, f''(x) < 0$, $\forall x \in V$.

Desarrollando f en serie de Taylor hasta $n=2$, según (I):

$$f(x) - y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2 \quad \text{donde } \xi \text{ verifica que } |\xi - a| < |x-a|.$$

Supuesto que $x \in V$, se tiene que $\xi \in V$. Luego $f''(\xi) > 0 \vee f''(\xi) < 0$.

Como $(x-a)^2 > 0$, pues $x \neq a$, tanto para $x < a$ como para $x > a$, se tiene

$$f''(\xi) > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) - y > 0 & \text{si } x < a \\ f(x) - y > 0 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$f''(\xi) \dots \{ f(x) - y < 0$ si $x < \dots$

Por tanto, no puede haber punto de inflexión en a pues $f(x)-y$ debería tener distinto signo para $x<a$ que para $x>a$. Debe ser entonces $f''(a)=0$.

* Sea K el orden de la derivada de menor orden de f que no se anula en el punto a, es decir, $f^{(K)}(a)\neq 0$ y si $p<K, p\in\mathbb{N}$, $f^{(p)}(a)=0$. Veamos que K debe ser impar.

Tomemos el desarrollo de Taylor hasta el orden K. Entonces, como $f''(a)=f'''(a)=\dots=f^{(K-1)}(a)=0$, se tiene según (I) que

$$f(x)-y=\frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x-a)^K \quad , \text{con } |\xi-a|<|x-a|$$

Siendo $f^{(K)}(a)\neq 0$ será $f^{(K)}(a)>0 \ \vee\ f^{(K)}(a)<0$.

Supongamos que K es par, entonces, por un razonamiento análogo al utilizado para probar que $f''(a)=0$ obtenemos que $f(x)-y$ tiene, tanto a la izquierda de a como a la derecha de a, el mismo signo que $f^{(K)}(\xi)$, lo cual contradice que a es un punto de inflexión. Luego K debe ser impar.

$\Leftarrow$] Supongamos que $f''(a)=0$ y que K es impar, siendo K, como anteriormente, el orden de la derivada de menor orden que no se anule en a. Veamos que en a hay un punto de inflexión. Según (I):

$$f(x)-y=\frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x-a)^K \quad , \text{con } |\xi-a|<|x-a| \qquad (II)$$

Si $f^{(K)}(a)\neq 0$, $\exists V\in\mathcal{V}(a) \,/\, f^{(K)}(x)\neq 0, \forall x\in V$

Siendo f suficientemente derivable, podemos suponer que admite derivada $(K+1)$-ésima en I; por tanto, $f^{(K)}$ es continua en I y podemos asegurar la existencia de V.

Sea $x\in V$, entonces, según (II), $\xi\in V$. Luego $f^{(K)}(\xi)\neq 0$.

- Si $f^{(K)}(\xi)>0$, se tiene que, siendo K impar:
  - $x>a \Rightarrow (x-a)^K>0 \Rightarrow f(x)-y=\dfrac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x-a)^K>0$
  - $x<a \Rightarrow (x-a)^K<0 \Rightarrow f(x)-y=\dfrac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x-a)^K<0$
- Si $f^{(K)}(\xi)<0$:
  - $x>a \Rightarrow (x-a)^K>0 \Rightarrow f(x)-y<0$, pues $f^{(K)}(\xi)<0$.
  - $x<a \Rightarrow (x-a)^K<0 \Rightarrow f(x)-y>0$.

En cualquier caso, a es un punto de inflexión de f. c.s.q.d.

9.2 TEOREMA: Sea $f: I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función suficientemente derivable en I y a un punto interior de I. Supongamos que alguna de las derivadas de f no se anula en el punto a; sea K el orden de la derivada de menor orden que verifica lo anterior.(*)

Entonces f tiene un extremo relativo en el punto a si y solo si $f'(a)=0$ y K es par.

Demostr.: $\Rightarrow$] * Si f tiene un extremo relativo en a, como admite derivada primera en a, por TEOREMA 8.1. (TEMA 6º), $f'(a)=0$.

* Supongamos que K es impar y lleguemos a una contradicción.

$$\forall x\in I,\quad f(x)-y=\frac{f^{(K)}(\xi)}{K!}(x-a)^K \quad \text{con } |\xi-a|<|x-a| \qquad (\text{III})$$

Basta, para ello, escribir el desarrollo de Taylor de la función f hasta la derivada K-ésima, y tener en cuenta que si $p\in\mathbb{N}$ es tal que $p<K$ entonces $f^{(p)}(a)=0$.

Si $f^{(K)}(a)\neq 0$, por ser $f^{(K)}$ continua (pues existe $(f^{(K)})'=f^{(K+1)}$) existe un entorno V de a, contenido en I, en el cual $f^{(K)}$ no se anula.

Sea $x\in V-\{a\}$. Para este x se verifica (III), pues $x\in I$. Entonces $\xi\in V$. Por tanto, $f^{(K)}(\xi)\neq 0$. Será entonces $f^{(K)}(\xi)>0 \vee f^{(K)}(\xi)<0$.

Hemos supuesto que K es impar, luego

- si $f^{(K)}(\xi)>0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)-y<0 & \text{si } x<a \\ f(x)-y>0 & \text{si } x>a \end{cases}$

- si $f^{(K)}(\xi)<0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)-y>0 & \text{si } x<a \\ f(x)-y<0 & \text{si } x>a \end{cases}$

En cualquier caso, se deduce que f no posee un extremo relativo en a, pues en cualquier entorno de a existirán puntos x en los cuales $f(x)>f(a)=y$ y puntos x' en los que $f(x')<f(a)=y$, contra la hipótesis de que f posee un extremo relativo en a. Luego, K debe ser par.

$\Leftarrow$] Si K es par, como $\forall x\in V,\ f^{(K)}(x)\neq 0$, se tiene que el signo de $f(x)-y$, según (III), coincide con el signo de $f^{(K)}(\xi)\neq 0$, pues $\xi\in V$.

Si $f^{(K)}(\xi)>0 \Rightarrow f(x)-y>0$, ya sea x mayor o menor que a.

Si $f^{(K)}(\xi)<0 \Rightarrow f(x)-y<0$, ya sea x mayor o menor que a.

Por tanto se tiene que $[(\forall x\in V),\ f(x)>y=f(a)] \vee [(\forall x\in V),\ f(x)<y=f(a)]$

En el primer caso f tiene un mínimo relativo en a.

En el segundo caso f tiene un máximo relativo en a.

En cualquier caso, f tiene un extremo relativo en a.

(Téngase en cuenta que $y=f(a)$ porque $y=f(a)+f'(a)(x-a) \wedge f'(a)=0$).

(*) Téngase en cuenta que el conjunto de los ordenes de las derivadas de f que no se anulan en el