TEMA 8º: LA INTEGRAL DE RIEMANN

1. DEFINICIONES

Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$. Sabemos que una partición de $[a,b]$ es un conjunto finito de puntos $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ de $[a,b]$ de modo que $a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$.

Representaremos por $\mathcal{P}([a,b])$ el conjunto de las particiones de $[a,b]$.

Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ representamos por Δx_i a x_i-x_{i-1}.

Llamamos diámetro de la partición P a:

$$\mu(P)=|P|=\max_{1\le i\le n}\Delta x_i$$

DEFINICIÓN: Sean P y P' dos particiones del intervalo $[a,b]$. Se dice que P' es un refinamiento de P, o que P' es más fina que P o que P' es un afino de P, si $P\subset P'$.

DEFINICIÓN: INTEGRAL DE RIEMANN

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada en $[a,b]$. Podemos considerar entonces los números reales $M=\sup_{x\in[a,b]}f(x)$ y $m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$.

Sea $P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ una partición del intervalo $[a,b]$.

Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, llamamos $m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$ y $M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$.

Para la partición P definimos los números reales siguientes:

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i \quad \text{y} \quad U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$$

$L(f,P)$ se llama suma inferior de f respecto de P y $U(f,P)$ se llama suma superior de f con respecto a P.

Se deduce inmediatamente que

$$\forall P\in\mathcal{P}([a,b]),\quad L(f,P)\le U(f,P)$$

pues $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $\Delta x_i>0 \wedge m_i\le M_i \Rightarrow \forall i,\ m_i\Delta x_i\le M_i\Delta x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$

Por otro lado, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $M_i\le M \wedge m_i\ge m$. Luego:

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}M\Delta x_i=M\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=M(b-a).$$

$$\text{y}\quad L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\ge\sum_{i=1}^{n}m\Delta x_i=m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=m(b-a)$$

Luego:

$$\forall P\in\mathcal{P}([a,b]),\quad m(b-a)\le L(f,P)\le U(f,P)\le M(b-a)$$

Entonces el conjunto $\{L(f,P)/P\in\mathcal{P}([a,b])\}$ está acotado superiormente por $M(b-a)$ e inferiormente por $m(b-a)$. Lo mismo sucede con el conjunto $\{L(f,P) / P \in \mathcal{P}([a,b])\}$. Entonces, por el teorema fundamental del orden podemos considerar los números reales:

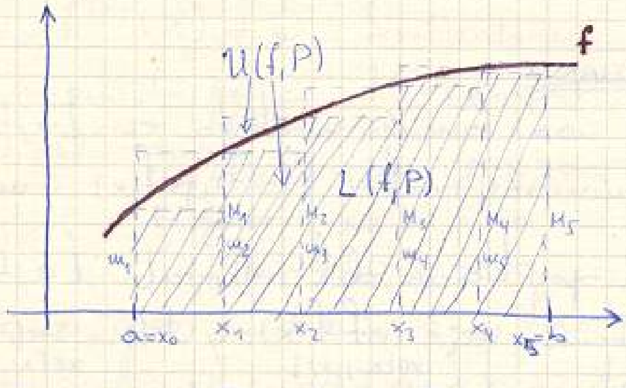
$$\inf_{P\in\mathcal{P}([a,b])} U(f,P) \quad y \quad \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} L(f,P)$$

Al primero se le llama integral superior de Riemann de f en $[a,b]$ y se representa por:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{P\in\mathcal{P}([a,b])} U(f,P)$$

Al segundo se le llama integral inferior de Riemann de f en $[a,b]$ y se escribe:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} L(f,P).$$



1.1. TEOREMA: Sean $P, P^* \in \mathcal{P}([a,b])$ y $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ (1) Si P^* es un refinamiento de P

a) $U(f,P) \geq U(f,P^*)$

b) $L(f,P^*) \geq L(f,P)$

Demostr.: a) Sea $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

Supongamos que P^* tiene un punto más que P: $P^* = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, t_i, x_i, \dots, x_n\}$.

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = M_1 \Delta x_1 + \dots + M_{i-1}\Delta x_{i-1} + M_i \Delta x_i + M_{i+1}\Delta x_{i+1} + \dots + M_n \Delta x_n.$$

Sea $M_i^* = \sup_{x\in[x_{i-1},t_i]} f(x)$ y $M_i^{**} = \sup_{x\in[t_i, x_i]} f(x)$. Entonces:

$$U(f,P^*) = M_1\Delta x_1 + \dots + M_{i-1}\Delta x_{i-1} + M_i^*(t_i - x_{i-1}) + M_i^{**}(x_i - t_i) + M_{i+1}\Delta x_{i+1} + \dots + M_n \Delta x_n.$$

Como $M_i^* \leq M_i \wedge M_i^{**} \leq M_i$ se tiene que

$$M_i^*(t_i - x_{i-1}) + M_i^{**}(x_i - t_i) \leq M(t_i - x_{i-1}) + M(x_i - t_i) = M(t_i - x_{i-1} + x_i - t_i) =$$
$$= M(x_i - x_{i-1}) = M \Delta x_i.$$

Luego $U(f,P^*) \leq U(f,P)$.

Si P^* tiene todos los puntos de P y además los puntos $t_1, \dots$

remos $P_1 = P \cup \{t_1\}$, $P_2 = P_1 \cup \{t_2\}$, ..., $P_j = P_{j-1} \cup \{t_j\} = P^*$

Por lo anterior:

$$\mathcal{U}(f,P) \geq \mathcal{U}(f,P_1) \geq \mathcal{U}(f,P_2) \geq \dots \geq \mathcal{U}(f,P_j) = \mathcal{U}(f,P^*).$$

b) Se procede análogamente, teniendo en cuenta que $m_i^* \geq m_i \wedge m_i^{**} \geq m_i$.

1.2. COROLARIO: Para dos particiones P y P' cualesquiera de $[a,b]$ se tiene que

$$\boxed{L(f,P) \leq \mathcal{U}(f,P')}$$

Demostr: Sea $P^* = P \cup P'$. P^* es un refinamiento de P y P', luego:

$$L(f,P) \leq L(f,P^*) \leq \mathcal{U}(f,P^*) \leq \mathcal{U}(f,P')$$

1.3. COROLARIO: La integral inferior de Riemann de una función f en un compacto $[a,b]$ es menor o igual que la integral superior.

Demostr: $\forall P, P' \in \mathcal{P}([a,b])$, $L(f,P) \leq \mathcal{U}(f,P') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall P \in \mathcal{P}([a,b]),\ L(f,P) \leq \inf_{P' \in \mathcal{P}([a,b])} \mathcal{U}(f,P') = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(f,P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} \mathcal{U}(f,P) = \overline{\int_a^b} f.$$

DEFINICION: Una función acotada $f: [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es integrable en el sentido de Riemann en $[a,b]$, si las integrales inferior y superior de Riemann de f en $[a,b]$ coinciden.

Notaremos que f es integrable Riemann en $[a,b]$ del siguiente modo: $f \in R([a,b])$.

Luego:

$$f \in R([a,b]) \overset{def}{\iff} \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

En este caso la integral la escribiremos en la forma $\int_a^b f$. También se utiliza la notación $\int_a^b f(x)\,dx$.

EJEMPLO: Consideremos la función de Dirichlet restringida al compacto $[0,1]$:

$$\begin{aligned} f: [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \begin{cases} = 0 & \text{si } x \in \mathbb{I} \cap [0,1] \\ = 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases} \end{aligned}$$

Esta función no es integrable Riemann en $[0,1]$. Veámoslo.

Sea $P \in \mathcal{P}([0,1])$, $P = \{t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = 1\}$

Entonces $L(f,P) = 0$, pues $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\exists \xi \in [t_{i-1}, t_i] / \xi \in \mathbb{I} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}$, $m_i = 0 \Rightarrow L(f,P) = 0$.

Por otro lado $\mathcal{U}(f,P) = 1$, pues $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\exists r \in [t_{i-1}, t_i] / r \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}$, $M_i = 1 \Rightarrow \mathcal{U}(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \Delta t_i = (t_1 - 0) + (t_2 - t_1) + \dots + (1 - t_{n-1}) = 1$

y esto para cualquier partición P. Entonces

$$\underline{\int_0^1} f = 0 \quad y \quad \overline{\int_0^1} f = 1.$$

Luego $f \notin R([0,1])$.

1.4. TEOREMA de caracterización de funciones integrables Riemann: CONDICION (ε, P) DE RIEMANN.

Una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Riemann en $[a,b]$ sii para cualquier ε positivo existe una partición P de $[a,b]$ tal que $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

$$f \in R([a,b]) \iff \left(\forall \varepsilon>0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, 0 \leq U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \right) \quad (*)$$

Demostr.: $\boxed{\underset{\Rightarrow}{N}}$ Si $f \in R([a,b])$

$$\int_a^b f = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(f,P) = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} U(f,P)$$

Dado $\varepsilon>0$, como $\int_a^b f = \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(f,P)$, existe una partición P_1 de $[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(f,P_1) \Rightarrow \int_a^b f < \frac{\varepsilon}{2} + L(f,P_1)$$

y como $\int_a^b f = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} U(f,P)$, existe una partición P_2 de $[a,b]$ tal que:

$$U(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Entonces $U(f,P) \leq U(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + L(f,P_1) = \varepsilon + L(f,P_1) \leq \varepsilon + L(f,P).$$

Luego $\forall \varepsilon>0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, U(f,P) < \varepsilon + L(f,P) \Rightarrow U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

$\boxed{\underset{\Leftarrow}{S}}$ Si $\forall \varepsilon>0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$, como $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$

$$L(f,P) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U(f,P)$$

Se deduce que:

$$\forall \varepsilon>0, \left| \underline{\int_a^b} f - \overline{\int_a^b} f \right| \leq |U(f,P) - L(f,P)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \Rightarrow f \in R([a,b]). \text{ csqd.}$$

1.5. TEOREMA: a) Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$. Entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$.

b) Si f es una función monótona en $[a,b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$.

Demostr.:

a) Hemos de probar que $\forall \varepsilon>0, \exists P\in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Dado $\varepsilon>0$, siempre podemos encontrar un $\eta>0$ tal que

$$\eta(b-a)<\varepsilon \qquad (\mathrm{I})$$

Si f es continua en el compacto $[a,b]$, por el Teorema de Heine, f es uniformemente continua en $[a,b]$. Luego:

dado $\eta>0, \exists \delta>0 / \underset{s,t\in[a,b]}{|s-t|}<\delta \Rightarrow |f(s)-f(t)|<\eta. \qquad (\mathrm{II})$

Si llamamos $|P|$ al diámetro de una partición P de $[a,b]$:

$$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\} \Rightarrow |P| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i$$

Dado $\delta>0$, siempre podemos encontrar una partición P de $[a,b]$ de modo que

$$|P|<\delta.$$

P depende de δ, δ de η y η de ε, luego P depende de ε. Probemos que $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Pero $U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$.

Probemos que $\forall i\in\{1,\dots,n\}, M_i-m_i\le\eta$.

$\forall i\in\{1,\dots,n\}, \Delta x_i\le|P|<\delta$. Luego:

$\forall s,t\in[x_{i-1},x_i], |s-t|\le\Delta x_i<\delta \overset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow} |f(s)-f(t)|<\eta \Rightarrow$

$\Rightarrow f(s)<f(t)+\eta.$

Como esto se verifica $\forall s\in[x_{i-1},x_i]$, tenemos que $M_i=\sup\limits_{s\in[x_{i-1},x_i]} f(s)\le f(t)+\eta$

y también que $M_i-\eta\le f(t), \forall t\in[x_{i-1},x_i]$. Luego:

$$M_i-\eta\le\inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} f(t)=m_i$$

Luego $M_i-m_i\le\eta, \forall i\in\{1,\dots,n\}$.

Entonces $U(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}\eta\,\Delta x_i=$

$$=\eta\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\eta(b-a)\overset{(\mathrm{I})}{<}\varepsilon$$

Luego $\forall\varepsilon>0, \exists P\in\mathcal{P}([a,b]) / U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$. csqd.

b) Supongamos que f es monotona creciente; si fuese decreciente se resolvería de modo análogo. Hay que probar que $f\in R([a,b])$, o sea, que

$\forall\varepsilon>0, \exists P\in\mathcal{P}([a,b]) / U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon.$

Si f es creciente, entonces $[f(b)-f(a)](b-a)>0$.

Dado $\varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbb{N} \,/\, \frac{[f(b)-f(a)](b-a)}{n}<\varepsilon$. $\quad (I')$

Siempre podemos encontrar una partición P de $[a,b]$ de modo que

$$\forall i\in\{1,\dots,m\},\ \Delta x_i<\frac{b-a}{n}. \quad (II')$$

P depende de n y n de ε, luego P depende de ε.

Siendo f creciente se verifica que:

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_i) \ \wedge\ m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)=f(x_{i-1}) \quad (III)$$

Entonces, $\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)=\sum_{i=1}^{m}(M_i-m_i)\Delta x_i \overset{(III)}{=}$

$$=\sum_{i=1}^{m}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i \overset{(II')}{\leqslant} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{m}[f(x_i)-f(x_{i-1})]=$$

$$=\frac{b-a}{n}[f(b)-f(a)] \overset{(I')}{<} \varepsilon.$$

Luego $f\in R([a,b])$. c.s.q.d.

1.6. TEOREMA: a) Si f es una función integrable Riemann en $[a,b]$ y c es un punto de $]a,b[$ se verifica que f es integrable Riemann en $[a,c]$ y $[c,b]$, y recíprocamente, si $f\in R([a,c])\wedge f\in R([c,b])\Rightarrow f\in R([a,b])$.
b) Si f es una función integrable Riemann en $[a,b]$ y $c\in]a,b[$ entonces:

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$$

Demostr.: a) $\Rightarrow$) Si $f\in R([a,b])$ se tiene que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists P'\in\mathcal{P}([a,b]) \,/\, \mathcal{U}(f,P')-L(f,P')<\varepsilon.$$

Sea $P=P'\cup\{c\}\in\mathcal{P}([a,b])$. P es un refinamiento de P', luego:

$$\mathcal{U}(f,P)\leq\mathcal{U}(f,P')<\varepsilon+L(f,P')\leqslant\varepsilon+L(f,P)$$

Luego $\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Luego $\forall\varepsilon>0,\ \exists P\in\mathcal{P}([a,b]) \,/\, c\in P\ \wedge\ \mathcal{U}(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$.

Sea, entonces, $P_1=P\cap[a,c]\in\mathcal{P}([a,c])$ y $P_2=P\cap[c,b]\in\mathcal{P}([c,b])$.

Se prueba fácilmente que:

$$\mathcal{U}(f,P)=\mathcal{U}(f,P_1)+\mathcal{U}(f,P_2)\ \wedge\ L(f,P)=L(f,P_1)+L(f,P_2).$$

Como $\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$ se deduce que:

$$[\mathcal{U}(f,P_1)-L(f,P_1)]+[\mathcal{U}(f,P_2)-L(f,P_2)]<\varepsilon.$$

Siendo $\mathcal{U}(f,P_1)-L(f,P_1)\geq 0\ \wedge\ \mathcal{U}(f,P_2)-L(f,P_2)\geq 0$ se tiene que

$$\mathcal{U}(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon\ \wedge\ \mathcal{U}(f,P_2)-L(f,P_2)<\varepsilon.$$

Luego $\forall \varepsilon > 0$, $\begin{cases} \exists P_1 \in \mathcal{P}([a,c]) / U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon \Rightarrow f \in R([a,c]) \\ \exists P_2 \in \mathcal{P}([c,b]) / U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon \Rightarrow f \in R([c,b]) \end{cases}$

$\Leftarrow$] Dado $\varepsilon/2 > 0$

si $f \in R([a,c])$, $\exists P_1 \in \mathcal{P}([a,c]) / U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon/2$

si $f \in R([c,b])$, $\exists P_2 \in \mathcal{P}([c,b]) / U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon/2$

Sea $P = P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$. Entonces, como $U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2)$ se tiene que:

$$U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2} + L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} + L(f,P_2) =$$

$$= \varepsilon + L(f,P_1) + L(f,P_2) = \varepsilon + L(f,P).$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. csqd.

b) Segun el apartado anterior si existe $\int_a^b f$, existen $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$

Sean P_1, P_2 y P las particiones que se consideraron allí. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} L(f,P_1) \le \int_a^c f \le U(f,P_1) \\ L(f,P_2) \le \int_c^b f \le U(f,P_2) \end{array}\right\} \Rightarrow L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \le \int_a^c f + \int_c^b f \le U(f,P_1) + U(f,P_2) = U(f,P).$$

Por otro lado $L(f,P) \le \int_a^b f \le U(f,P)$.

Siendo $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$, se deduce que:

$$\left| \left[\int_a^c f + \int_c^b f \right] - \int_a^b f \right| \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

y esto cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, luego

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \quad \text{csqd.}$$

1.7. TEOREMA: a) Si $f, g \in R([a,b])$, entonces $f+g \in R([a,b])$ y se verifica que:

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

b) Si $f \in R([a,b]) \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow cf \in R([a,b])$ y se tiene que

$$\int_a^b (cf) = c \int_a^b f$$

Demostr.: a) *Hay que probar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Si $f \in R([a,b])$, dado $\varepsilon/2 > 0$, $\exists P_1 \in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon/2$

Si $g \in R([a,b])$, dado $\varepsilon/2 > 0$, $\exists P_2 \in \mathcal{P}([a,b]) / U(g,P_2) - L(g,P_2) < \varepsilon/2$

Sea $P = P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$; siendo P un refinamiento de P_1 y P_2

se tiene que $\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)<\varepsilon/2 \ \wedge\ \mathcal{U}(g,P)-L(g,P)<\varepsilon/2$. (I)

Sea $M_i = \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}[(f+g)(x)]$ y $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}[(f+g)(x)]$

Si llamamos M_i^f y M_i^g a los superiores de f y g en $[x_{i-1},x_i]$ y m_i^f y m_i^g a los inferiores se tiene que: $M_i \leq M_i^f + M_i^g$ pues

$\forall x\in[x_{i-1},x_i]$, $f(x)+g(x) \leq \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}[f(x)+g(x)] \leq \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) + \sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} g(x)$

Análogamente $m_i^f + m_i^g \leq m_i$. Luego $M_i - m_i \leq (M_i^f+M_i^g)-(m_i^f+m_i^g)$

Entonces

$$\mathcal{U}(f+g,P)-L(f+g,P)=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \left[(M_i^f+M_i^g)-(m_i^f+m_i^g)\right]\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n (M_i^f-m_i^f)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n (M_i^g-m_i^g)\Delta x_i =$$

$$= [\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)] + [\mathcal{U}(g,P)-L(g,P)] \overset{(I)}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Luego $f+g \in R([a,b])$

* Para la partición P (dependiente de ε) encontrada anteriormente se tiene

$$\left.\begin{array}{l} L(f,P) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(f,P) \\ L(g,P) \leq \int_a^b g \leq \mathcal{U}(g,P) \end{array}\right\} \Rightarrow L(f,P)+L(g,P) \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \mathcal{U}(f,P)+\mathcal{U}(g,P) \quad (\text{II})$$

Por otro lado $L(f+g,P) \leq \int_a^b (f+g) \leq \mathcal{U}(f+g,P)$

Pero $\mathcal{U}(f+g,P) = \sum\limits_{i=1}^n M_i\Delta x_i \leq \sum\limits_{i=1}^n M_i^f\Delta x_i + \sum\limits_{i=1}^n M_i^g \Delta x_i = \mathcal{U}(f,P)+\mathcal{U}(g,P)$

Análogamente $L(f+g,P) \geq L(f,P)+L(g,P)$. Luego

$$L(f,P)+L(g,P) \leq \int_a^b (f+g) \leq \mathcal{U}(f,P)+\mathcal{U}(g,P) \quad (\text{III})$$

De (II) y (III) se deduce que, dado $\varepsilon>0$:

$$\left|\int_a^b (f+g) - \left[\int_a^b f + \int_a^b g\right]\right| < [\mathcal{U}(f,P)-L(f,P)]+[\mathcal{U}(g,P)-L(g,P)] \overset{(I)}{<} \varepsilon.$$

Luego $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. csqd.

b) Dado un conjunto A siempre se verifica que, si $c>0$

$\sup\limits_{x\in A} cf(x) = c\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $\inf\limits_{x\in A} cf(x) = c\inf\limits_{x\in A} f(x)$

Probemos la primera. $\forall x\in A$ $f(x) = \frac{1}{c}(cf(x)) \leq \frac{1}{c}\sup cf(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{x\in A} f(x) \leq \frac{1}{c} \sup_{x\in A} (cf(x)) \Rightarrow c\sup_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in A}(cf(x))$

Por otro lado, $\forall x\in A$, $f(x) = \frac{cf(x)}{c} \leq \sup_{x\in A} f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x\in A$, $cf(x) \leq c\sup_{x\in A} f(x) \Rightarrow \sup_{x\in A}(cf(x)) \leq c\sup_{x\in A} f(x)$.

Luego $c\sup_{x\in A} f(x) = \sup_{x\in A}(cf(x))$.

Tambien se prueba fácilmente que $\sup_{x\in A}(-f(x)) = -\inf_{x\in A} f(x)$

Entonces, para probar el apartado b) consideraremos tres casos:

1^er caso: $c\geq 0$.

- Si $c=0$, cf es la función nula. Luego, $\forall P\in \mathcal{P}([a,b])$, $L(cf,P)=0 \wedge U(cf,P)=0$

Luego $\int_a^b (cf) = \int_a^b 0 = 0$, trivialmente

y $c\int_a^b f = 0\int_a^b f = 0$. Luego se da la igualdad.

- Supongamos que $c>0$, entonces $\forall \varepsilon>0$, $\varepsilon/c>0$

$f\in R([a,b]) \Rightarrow (\forall \varepsilon>0, \exists P\in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon/c)$.

Sea $M_i^* = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} cf(x)$, $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i^* = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} cf(x)$ y $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Luego $M_i^* = cM_i$ y $m_i^* = cm_i$. Entonces:

$U(cf,P) = \sum_{i=1}^n M_i^* \Delta x_i = c\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = c\,U(f,P)$

Análogamente $L(cf,P) = c\,L(f,P)$

Luego: $U(cf,P) - L(cf,P) = c[U(f,P)-L(f,P)] < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$

Por tanto, si $c>0$, $c.f\in R([a,b])$.

Por otro lado

$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) \Rightarrow L(cf,P) \leq c\int_a^b f \leq U(cf,P)$

y tambien $L(cf,P) \leq \int_a^b (cf) \leq U(cf,P)$

Luego, dado $\varepsilon>0$, $\left|\int_a^b (cf) - c\int_a^b f\right| \leq U(cf,P) - L(cf,P) < \varepsilon$

Por tanto, $\int_a^b (cf) = c\int_a^b f$.

2º caso: $c=-1$.

Sean $M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i^* = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(-f)(x)$ y $m_i^* = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(-f)(x)$

Entonces $M_i^* = -m_i$ y $m_i^* = -M_i$.

Si $f\in R([a,b])$, $\forall\varepsilon>0$ $\exists P\in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Como $\mathcal{U}(-f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i^* \Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = -L(f,P)$

y $L(-f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i^* \Delta x_i = -\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = -\mathcal{U}(f,P)$

se tiene que

$$\mathcal{U}(-f,P) - L(-f,P) = [-L(f,P)] - [-\mathcal{U}(f,P)] = \mathcal{U}(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Luego $-f \in R([a,b])$.

Además:

$$L(f,P) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(f,P) \Rightarrow -L(f,P) \geq -\int_a^b f \geq -\mathcal{U}(f,P) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(-f,P) \geq -\int_a^b f \geq L(-f,P).$$

y también $\mathcal{U}(-f,P) \geq \int_a^b (-f) \geq L(-f,P)$. Luego:

$$\left| \int_a^b (-f) - \left[-\int_a^b f \right] \right| \leq \mathcal{U}(-f,P) - L(-f,P) < \varepsilon$$

Por tanto $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$.

3^er^ caso: $c<0$.

Entonces $cf = -(-cf)$. $c<0 \Rightarrow -c>0 \overset{1^{er}\text{caso}}{\Longrightarrow} -cf \in R([a,b]) \overset{2^{o}\text{caso}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow -(-cf) \in R([a,b]) \Rightarrow cf \in R([a,b])$.

Además $\int_a^b cf = \int_a^b -(-cf) = -\int_a^b (-cf) = -(-c)\int_a^b f = c\int_a^b f$. c.s.q.d.

1.8. TEOREMA: Sea f una función integrable Riemann en $[a,b]$ de modo que $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ (*) Sea $\Phi : [m,M] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces la función $h = \Phi \circ f$ es una función integrable Riemann en $[a,b]$.

Demostr.: Si Φ es continua en el compacto $[m,M]$, es uniformemente continua y acotada. Tenemos que probar que

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, \mathcal{U}(h,P) - L(h,P) < \varepsilon'.$$

Si Φ es acotada, $\exists K = \sup_{t \in [m,M]} |\Phi(t)| > 0$.

Además Φ es uniformemente continua en $[a,b]$, luego

$$\text{dado } \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{b-a+2K} > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{s,t \in [m,M]}{|s-t| \leq \delta} \Rightarrow |\Phi(s) - \Phi(t)| < \varepsilon. \quad (\mathrm{I})$$

Siempre podemos considerar que $\delta < \varepsilon$, pues de no ser así podemos tomar un $\delta' < \inf(\delta, \varepsilon)$ y lo que se verifique para δ' se verifica para δ. Supongamos entonces que $\delta < \varepsilon$.

Si $f\in R([a,b])$, dado $\delta>0$, $\exists P=\{x_0,\dots,x_n\}\in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P)-L(f,P)<\delta^2$. (II)

Consideremos el conjunto de índices $I=\{0,1,\dots,n\}$.

Para cada $i\in I-\{0\}$, definimos $M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ y $m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Definimos dos subconjuntos A y B de I del siguiente modo:
$(i\in A \overset{def}{\Longleftrightarrow} M_i-m_i<\delta) \wedge (i\in B \overset{def}{\Longleftrightarrow} M_i-m_i\geq\delta)$.

Consideremos los números reales siguientes: $M_i^*=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x) \wedge m_i^*=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x)$

Probemos que si $i\in A$, entonces $M_i^*-m_i^*\leq\varepsilon$. Es suficiente ver que
$\forall x,y\in[x_{i-1},x_i]$, $h(x)<\varepsilon+h(y)$.

Sean, entonces, $x,y\in[x_{i-1},x_i]$ y $s=f(x)\in[m,M]$ y $t=f(y)\in[m,M]$.
Si probamos que $|s-t|\leq\delta$ se deduciría de (I) que
$|\Phi(s)-\Phi(t)|<\varepsilon$, y tambien $|\Phi(f(x))-\Phi(f(y))|=|h(x)-h(y)|<\varepsilon$
y de aquí que $h(x)<\varepsilon+h(y)$ como queremos probar.
Probemos entonces que $|s-t|\leq\delta$, siempre que $i\in A$.
Si $i\in A \Rightarrow M_i-m_i<\delta$.
Siendo $x,y\in[x_{i-1},x_i] \Rightarrow f(x)\leq M_i \wedge f(y)\geq m_i \Rightarrow f(x)-f(y)\leq M_i-m_i$
Luego $s-t\leq M_i-m_i<\delta$. Analogamente, $f(x)\geq m_i \wedge f(y)\leq M_i \Rightarrow$
$\Rightarrow f(y)-f(x)\leq M_i-m_i<\delta \Rightarrow t-s<\delta$. Luego $|s-t|<\delta$.
Por tanto, $i\in A \Rightarrow M_i^*-m_i^*\leq\varepsilon$.

Entonces, $U(h,P)-L(h,P)=\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i =$
$=\sum\limits_{i\in A}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i+\sum\limits_{i\in B}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i$

Pero $\sum\limits_{i\in A}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i\leq\varepsilon\sum\limits_{i\in A}\Delta x_i\leq\varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon(b-a)$ (III)

Por otro lado: $M_i^*=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x)=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}\Phi(f(x))\leq\sup\limits_{t\in[m,M]}\Phi(t)\Rightarrow|M_i^*|\leq K$

y tambien $|m_i^*|\leq K$. Luego
$M_i^*-m_i^*=|M_i^*-m_i^*|\leq|M_i^*|+|m_i^*|\leq 2K$.

Luego $\sum\limits_{i\in B}(M_i^*-m_i^*)\Delta x_i\leq 2K\sum\limits_{i\in B}\Delta x_i$ (IV)

De otra parte $\delta\sum\limits_{i\in B}\Delta x_i=\sum\limits_{i\in B}\delta\Delta x_i\leq\sum\limits_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i$, por definición de B. Luego $\delta\sum\limits_{i\in B}\Delta x_i\leq\sum\limits_{i\in B}(M_i-m_i)\Delta x_i\leq\sum\limits_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i$
$=U(f,P)-L(f,P)\overset{(II)}{<}\delta^2$. Luego $\delta\sum\limits_{i\in B}\Delta x_i<\delta^2\Rightarrow\sum\limits_{i\in B}\Delta x_i<\delta$

Entonces, según (IV); $\sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i \leq 2K\delta < 2K\varepsilon$, pues $\delta < \varepsilon$. (V)

Entonces:

$$U(h,P) - L(h,P) = \sum_{i\in A}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i + \sum_{i\in B}(M_i^* - m_i^*)\Delta x_i <$$

$$\overset{(III)\,y\,(V)}{<} \varepsilon(b-a) + 2K\varepsilon = \varepsilon(b-a+2K) = \varepsilon'$$

Luego $\forall \varepsilon' > 0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, U(h,P) - L(h,P) < \varepsilon'$. csqd.

1.9. TEOREMA: Sean f y g dos funciones integrables Riemann en $[a,b]$.

a) Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

b) $f \cdot g \in R([a,b])$

c) $|f| \in R([a,b])$ y $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

Demostr.: a) Sea $h = g - f$. Entonces $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \geq 0$.

Además, por Teorema 1.7, $h \in R([a,b])$, y se tiene que:

$$\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f$$

Si $\forall x \in [a,b]$, $h(x) \geq 0$ se verifica trivialmente que $\int_a^b h \geq 0$, pues, si $P = \{x_0, \dots, x_n\}$

$\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} h(x) \geq 0 \Rightarrow L(h,P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b h \geq L(h,P) \geq 0$. Luego:

$$\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

b) Probemos primero que si $f \in R([a,b]) \Rightarrow f \cdot f = f^2 \in R([a,b])$.

La función $\Phi(t) = t^2$ es continua en $\mathbb{R}$ y, por tanto, en todo intervalo compacto $[m, M]$. Entonces, según el teorema anterior, $\Phi \circ f \in R([a,b])$. Pero $\forall t \in [a,b]$, $\Phi(f(t)) = [f(t)]^2 = f^2(t)$.

Luego $f^2 \in R([a,b])$.

Sean entonces $f, g \in R([a,b])$. Sabemos por Th. 1.7, que $(f+g) \in R([a,b])$ y $(f-g) \in R([a,b])$. Luego

$(f+g)^2 \in R([a,b])$ y $(f-g)^2 \in R([a,b])$.

Por tanto, $(f+g)^2 - (f-g)^2 \in R([a,b])$.

Luego $4(fg) \in R([a,b]) \Rightarrow fg \in R([a,b])$.

c) Consideremos la función $\phi(t) = |t|$. ϕ es continua en $\mathbb{R}$, luego

$\phi \circ f = |f|$ es integrable Riemann en $[a,b]$.

Además si $f \in R([a,b])$, $\exists \int_a^b f \in \mathbb{R}$.

Sea $c=1 \vee c=-1$ de modo que $c\int_a^b f \geq 0$.
Entonces $cf \leq |f|$. Luego:

$$\left|\int_a^b f\right| = c\int_a^b f = \int_a^b cf \leq \int_a^b |f|$$ según aptdo a). c.q.d.

Observación: El recíproco de © no tiene que ser necesariamente cierto, es decir, si $|f| \in R([a,b])$, f no tiene porque ser integrable Riemann en $[a,b]$. Consideremos la función de Dirichlet restringida a $[0,1]$.

$$D(x) = \begin{cases} =0 & \text{si } x \in (\mathbb{R}-\mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ =1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Sabemos que D no es integrable Riemann en $[0,1]$. Entonces la función:

$$h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x) = D(x) - \frac{1}{2}$$

tampoco es integrable Riemann en $[0,1]$, pues de serlo también lo sería $D(x) = h(x) + \frac{1}{2}$. Sin embargo $|h|$ sí es integrable Riemann en $[0,1]$ pues:

$$x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \quad |h(x)| = \left|D(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$x \in \mathbb{I} \cap [0,1], \quad |h(x)| = \left|D(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Luego $|h|$ es constante en $[0,1]$, y por tanto, $|h| \in R([0,1])$.

1.10. COROLARIO: Sea $f \in R([a,b])$ tal que $\exists M > 0 \,/\, |f(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$.
Entonces: $\left|\int_a^b f\right| \leq M(b-a)$

Demostr: $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b M = M(b-a)$

$\int_a^b M = M(b-a)$, pues $\forall P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$, $U(M,P) = \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M(b-a)$ y $L(M,P) = \sum_{i=1}^n M \Delta x_i = M(b-a)$, por ser una función constante.

2. TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CALCULO INTEGRAL

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable Riemann en $[a,b]$.
Definimos entonces una función F en $[a,b]$ del siguiente modo:

$$x \in [a,b] \xrightarrow{F} F(x) = \int_a^x f$$

También se utiliza la notación $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Entonces:

2.1. TEOREMA: Si $f \in R([a,b])$, la función $x \in [a,b] \xrightarrow{F} F(x) = \int_a^x f$ es continua en $[a,b]$.

Demostr.: Sea c un punto cualquiera de $[a,b]$. Si $c=a$ V $c=b$ se estudia la continuidad lateral de modo análogo a como vamos a estudiar la continuidad en el caso de que $c \in]a,b[$. Se trata de verificar:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |h| \leq \delta \Rightarrow |F(c+h) - F(c)| \leq \varepsilon$$

Si $h>0$, $F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f =$

$$= \int_a^c f + \int_c^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$$

Si $h<0$, $c+h<c$. Luego: $F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f =$

$$= \int_a^{c+h} f - \int_a^{c+h} f - \int_{c+h}^c f = - \int_{c+h}^c f$$

f es acotada, luego $\exists M>0 / |f(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$

Por tanto $\forall x \in [a,b], -M \leq f(x) \leq M$

Si $h>0$, la longitud del intervalo $[c,c+h]$ es h; luego según COROLARIO 1.10.

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f \leq Mh$$

Si $h<0$, la longitud del intervalo $[c+h,c]$ es $-h$, luego:

$$(-M)(-h) \leq \int_{c+h}^c f \leq M(-h)$$

Luego si $h<0$, $-Mh \geq -\int_{c+h}^c f \geq Mh$

Por tanto, si $h>0$: $-Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq Mh$

y si $h<0$, $-Mh \geq F(c+h) - F(c) \geq Mh$

En cualquier caso:

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M|h|$$

Luego dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0 / |h| \leq \delta \Rightarrow |F(c+h) - F(c)| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. csqd.

2.2. TEOREMA: 1er teorema fundamental del cálculo integral.

Sea f una función integrable Riemann en $[a,b]$ y F la función que a cada $x \in [a,b]$ le asocia $F(x) = \int_a^x f$. Entonces, si f es continua en un punto $c \in [a,b]$ se verifica que F es derivable en el punto c y se tiene que $F'(c) = f(c)$.

Demostr.: Supongamos que $c \in]a,b[$ (si fuese un extremo se estudiaría la derivada lateral correspondiente).

Se trata de probar que existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h}$ y vale $f(c)$.

Si $h>0$, $F(c+h)-F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$.

Si $h<0$, $F(c+h)-F(c) = -\int_{c+h}^c f$.

Siendo f acotada podemos considerar los números reales siguientes:

si $h>0$, $m_h = \inf\limits_{x\in[c,c+h]} f(x)$ y $M_h = \sup\limits_{x\in[c,c+h]} f(x)$

si $h<0$, $m_h^* = \inf\limits_{x\in[c+h,c]} f(x)$ y $M_h^* = \sup\limits_{x\in[c+h,c]} f(x)$

Entonces, si $h>0$, $m_h \cdot h \le \int_c^{c+h} f \le M_h \cdot h$

y si $h<0$, $m_h^*(-h) \le \int_{c+h}^c f \le M_h^*(-h) \Rightarrow m_h^* \cdot h \ge -\int_{c+h}^c f \ge M_h^* \cdot h$

Luego si $h>0$, $m_h \le \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \le M_h$

y si $h<0$, $m_h^* \le \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \le M_h^*$

Si probamos que $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} m_h = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} M_h = f(c)$ y $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} m_h^* = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} M_h^* = f(c)$

quedará probado que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c)$.

Probemos que $\lim\limits_{h\to 0^+} M_h = f(c)$, o bien que $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / 0<h<\delta \Rightarrow |M_h - f(c)| \le \varepsilon$.

Si f es continua a la derecha de c se verifica que:

dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0 / 0 \le t-c \le \delta \Rightarrow |f(t)-f(c)| \le \varepsilon$, o bien

$c \le t \le c+\delta \Rightarrow f(t) \le f(c)+\varepsilon$

Entonces $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / 0<h<\delta \Rightarrow [\forall x\in[c,c+h], c \le x \le c+h \Rightarrow$

$\Rightarrow c \le x \le c+\delta \Rightarrow f(x) \le f(c)+\varepsilon, \forall x\in[c,c+h]] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[c,c+h]} f(x) \le f(c)+\varepsilon$.

Luego $M_h \le f(c)+\varepsilon \Rightarrow M_h - f(c) \le \varepsilon \Rightarrow |M_h - f(c)| \le \varepsilon$.

Luego $\lim\limits_{h\to 0^+} M_h = f(c)$.

Análogamente, $\lim\limits_{h\to 0^+} m_h = f(c)$ y $\lim\limits_{h\to 0^-} m_h^* = \lim\limits_{h\to 0^-} M_h^* = f(c)$.

Luego $F'(c) = f(c)$. csqd.

2.3. COROLARIO: Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Supongamos que existe una función $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g' = f$. Entonces
$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Demostr.: Si f es continua, es integrable Riemann en $[a,b]$.
Consideremos la función $x \in [a,b] \xrightarrow{F} F(x) = \int_a^x f$

Siendo f continua, por el 1.er teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que F es derivable y $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
Entonces F y g son dos funciones cuyas derivadas coinciden sobre $[a,b]$. Según TEMA 7.º, Teorema 2.2. sobre caracterización de funciones constantes, la función $F-g$ es constante, pues $(F'-g')(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.
Luego $\exists K \in \mathbb{R} \,/\, F(x) = g(x) + K$, $\forall x \in [a,b]$.
En particular, $F(a) = g(a) + K$
Pero $F(a) = \int_a^a f = 0$, pues, según COROLARIO 1.10, $\left|\int_a^a f\right| \leq M(a-a) = 0$.

Luego $K = -g(a)$. Entonces: $F(b) = g(b) + K = g(b) - g(a)$.
Por tanto $\int_a^b f = g(b) - g(a)$. c.s.q.d.

2.4. TEOREMA: 2.º Teorema fundamental del cálculo integral.
Sea f una función integrable Riemann en $[a,b]$ y $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f = g'$. Entonces
$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Demostr.: Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición cualquiera de $[a,b]$.
Sea $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ y $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$
Entonces $L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ y $U(f,P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$.
La función g es derivable y continua en $[x_{i-1}, x_i]$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$; entonces, por el teorema de los incrementos finitos
$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \exists t_i \in]x_{i-1}, x_i[\,/\, g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(t_i)\Delta x_i.$$
Pero $g'(t_i) = f(t_i)$. Luego, $1 \leq i \leq n \Rightarrow g(x_i) - g(x_{i-1}) = f(t_i)\Delta x_i$.
Siendo $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$ se deduce que:
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = U(f,P)$$
Pero $\sum_{i=1}^n f(t_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) = g(x_n) - g(x_0) = g(b) - g(a)$
Luego $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $L(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f,P)$

Si $f\in R([a,b])$, $\forall \varepsilon>0, \exists P\in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$

Luego $\forall \varepsilon>0$, $\left|\int_a^b f - [g(b)-g(a)]\right| \le U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f = g(b)-g(a)$. csqd.

3. TEOREMAS DEL VALOR MEDIO PARA FUNCIONES INTEGRABLES RIEMANN

3.1. TEOREMA: 1er teorema del valor medio del cálculo integral.

a) Sea $f\in R([a,b])$; entonces si $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$

$\exists \mu\in[m,M] \,/\, \int_a^b f = \mu(b-a)$.

b) Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe $\xi\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

Demostr.: a) Si $m=\inf_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$ se tiene que:

$m(b-a)\le \int_a^b f \le M(b-a)$

Entonces $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f \le M$.

Luego si $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$, $\mu\in[m,M]$ y $\int_a^b f = \mu(b-a)$. csqd.

b) Si f es continua en $[a,b]$, alcanza su valor maximo y su valor minimo en el compacto $[a,b]$; es decir:

$\exists t_0, t_0' \in [a,b] \,/\, m=f(t_0)$ y $M=f(t_0')$.

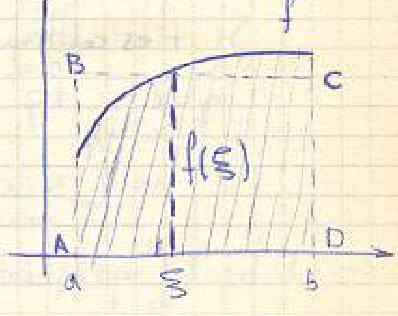
Por a), $\exists \mu\in[f(t_0), f(t_0')] \,/\, \int_a^b f = \mu(b-a)$.

Si $\mu\in[f(t_0), f(t_0')]$, $\exists \xi\in J \,/\, \mu=f(\xi)$

siendo J el intervalo determinado por t_0 y t_0'.

Luego $\exists \xi\in J\subset[a,b] \,/\, \int_a^b f = f(\xi)(b-a)$. csqd.

INTERPRETACION GEOMETRICA DEL TEOREMA:



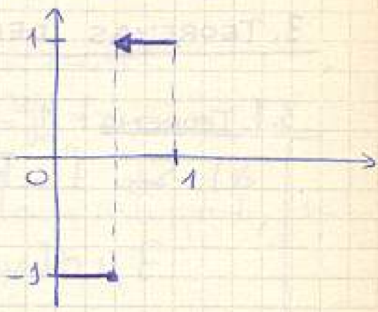
La integral $\int_a^b f$ representa el area comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=a$ y $x=b$. Lo que nos dice este primer teorema del valor medio es que si f es continua existe al menos un punto ξ en $[a,b]$ tal que el area del rectángulo ABCD coincide con el valor de $\int_a^b f$.

ξ no tiene porque ser interior necesariamente.

Para la función $f:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto f(x)=1$

se tiene que $\forall \xi \in [0,1]$, $f(\xi)(1-0)=\int_0^1 f$.

OBSERVACION: Si f no es continua, el apartado b no es cierto.
Consideremos la función



$$f:[0,1]\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=\begin{cases} =-1 & \text{si } x\in[0,\tfrac{1}{2}] \\ =1 & \text{si } x\in]\tfrac{1}{2},1] \end{cases}$$

f es integrable en $[0,1]$ por ser monótona creciente.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f=(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{-1}{2}, \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 f=1\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

Entonces $\int_0^1 f=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$.

Si el teorema, aptdo b), se verificase debería existir $\xi\in[0,1]$ tal que $f(\xi)=0$; pero no existe $\xi\in[0,1]$ que verifique que $f(\xi)=0$.

En este mismo ejemplo se ve que $\left|\int_a^b f\right|$ no tiene que ser necesariamente igual a $\int_a^b |f|$, pues

$$\left|\int_0^1 f\right|=|0|=0 \quad \text{y} \quad \int_0^1 |f|=\int_0^1 1=1.$$

3.2. TEOREMA: 1^er teorema del valor medio generalizado.

Sea f una función continua en $[a,b]$ y g una función positiva e integrable Riemann en $[a,b]$. Entonces existe un punto $\xi\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt=f(\xi)\int_a^b g(t)\,dt$$

Demostr.: Sea $m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ y $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Entonces $m\le f(x)\le M$, $\forall x\in[a,b]$. Siendo g positiva:

$$\forall x\in[a,b],\ m\,g(x)\le f(x)\,g(x)\le M\,g(x).$$

Si f es continua en $[a,b]$, $f\in R([a,b])$. Como $g\in R([a,b])$ se tiene que $fg\in R([a,b])$. Entonces:

$$m\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)\,dx\le M\int_a^b g(x)\,dx$$

Si $\int_a^b g(x)\,dx=0$, entonces $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=0$ y el teorema es trivial.

Si $\int_a^b g(x)\,dx\ne0$, entonces $\int_a^b g(x)\,dx>0$, pues g es positiva.

Entonces $m\le\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b}\le M$.

Siendo f continua, por el teorema de los valores intermedios $\exists \xi \in [a,b] \,/\, f(\xi) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$. csqd.

OBSERVACIONES: ① Este teorema generaliza el teorema 3.1 para la función $g(t) = 1$, $\forall t \in [a,b]$.

② No se puede suprimir la hipótesis de que g sea positiva. Consideremos las funciones:

$$f, g : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x,\ g(x) = x.$$

$$\int_{-1}^{1} fg = \int_{-1}^{1} x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$\int_{-1}^{1} x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Luego $\forall \xi \in [-1,1]$, $f(\xi) \int_{-1}^{1} g = 0$

Luego $\forall \xi \in [-1,1]$, $\int_{-1}^{1} fg \neq f(\xi) \int_a^b g$

3.3. TEOREMA: 2º teorema del valor medio del cálculo integral.

Sea f una función integrable Riemann en $[a,b]$ y $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces existe un punto $\xi \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt = g(a) \int_a^{\xi} f(t)\, dt + g(b) \int_{\xi}^{b} f(t)\, dt$$

Demostr.: Si g es creciente, es integrable en $[a,b]$. Entonces $fg \in R([a,b])$. Consideremos la aplicación:

$$h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto h(x) = g(a) \int_a^x f(t)\, dt + g(b) \int_x^b f(t)\, dt.$$

h es continua en $[a,b]$, pues si $f \in R([a,b])$ la función $x \longrightarrow \int_a^x f$ es continua y la función $x \longrightarrow \int_x^b f$ también lo es, pues:

$$\int_x^b f = \int_a^b f - \int_a^x f$$

Además: $h(a) = g(a) \int_a^a f(t)\, dt + g(b) \int_a^b f(t)\, dt = g(b) \int_a^b f(t)\, dt$

y $h(b) = g(a) \int_a^b f$.

Supongamos que f es positiva. Si g es creciente:

$\forall t \in [a,b]$, $g(a) \leq g(t) \leq g(b) \Rightarrow g(a) f(t) \leq g(t) f(t) \leq g(b) f(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(a) \int_a^b f(t)\, dt \leq \int_a^b f(t) g(t)\, dt \leq g(b) \int_a^b f(t)$

Luego $h(b) \leq \int_a^b f(t) g(t)\, dt \leq h(a)$

Siendo h continua, por el teorema de los valores intermedios, se tiene que
$\exists \xi \in [a,b] \,/\, h(\xi) = \int_a^b fg$

Es decir, existe $\xi \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f$$

Veamos que si f no es positiva también es cierto el teorema.
Si $f \in R([a,b])$, f es acotada. Entonces $\exists c \geq 0 \,/\, f(t)+c \geq 0, \forall t \in [a,b]$.
Para la función $t \in [a,b] \longrightarrow f(t)+c$ el teorema es cierto. Luego:

$$\exists \xi \in [a,b] \,/\, \int_a^b [f(t)+c]g(t)\,dt = g(a)\int_a^\xi [f(t)+c]dt + g(b)\int_\xi^b [f(t)+c]dt \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b c\,g(t)dt = g(a)\int_a^\xi f(t)dt + g(b)\int_\xi^b f(t)dt + g(a)\int_a^\xi c\,dt + g(b)\int_\xi^b c\,dt$$

Si probamos que $\int_a^b c\,g(t)dt = g(a)\int_a^\xi c\,dt + g(b)\int_\xi^b c\,dt$

el teorema quedaría probado. Pero esto es cierto, pues la función constante $x \in [a,b] \longrightarrow c$ es positiva, y para una función positiva hemos probado el teorema anteriormente. Luego:

$$\exists \xi \in [a,b] \,/\, \int_a^b fg = g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f. \quad \text{csqd.}$$

OBSERVACIONES: ① No se puede suprimir la hipótesis de que g sea monótona (si g fuese decreciente se puede enunciar un teorema análogo).
Consideremos una función f sobre $[a,b]$ tal que $f(t)=1$, $\forall t \in [a,b]$, y una función g tal que $g(a)=g(b)=0$ y $g(x)>0, \forall x \in]a,b[$.
Entonces: $\int_a^b fg = \int_a^b g > 0$

Sin embargo $g(a)\int_a^\xi f + g(b)\int_\xi^b f = 0, \ \forall \xi \in [a,b]$.

4. Cambio de variables en una integral de Riemann.

4.1. TEOREMA: Sea $I=[c,d]$ un intervalo de $\mathbb{R}$ y $g:[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivada continua en $[c,d]$. Sea $f: g(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(c)=a$ y $g(d)=b$.
Definimos la función $y \in g(I) \xrightarrow{F} F(y) = \int_a^y f(x)dx$.
Entonces, para todo $x \in I$ existe la integral

$$G(x) = \int_c^x f[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

y es igual a $F[g(x)]$.
En particular $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[g(t)]\,g'(t)\,dt$

Demostr.: Si I es un intervalo y g es continua en I (por ser derivable), $g(I)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.
Además, g' es continua en $[c,d]$, luego es integrable Riemann en $[c,d]$.
La función $f\circ g$ es continua en $[c,d]$ por ser composición de funciones continuas. Luego, la función $t\in[c,d] \longrightarrow f[g(t)]\,g'(t)$ es continua en $[c,d]$ y también en $[c,x]$, $\forall x\in[c,d]$. Luego, para todo $x\in[c,d]$ existe la integral

$$G(x)=\int_c^x f[g(t)]\,g'(t)\,dt$$

Se trata de probar que $\forall x\in[c,d]$, $G(x)=F[g(x)]$
Según el 1er teorema fundamental del cálculo integral, para todo $x\in I$ existe la derivada $G'(x)$ y se tiene que:

$$G'(x)=f[g(x)]\,g'(x)$$

Por otro lado, $\forall y\in g(I)$, $F(y)=\int_a^y f(x)\,dx$.
Siendo f continua, F tiene derivada en $g(I)$ y se tiene que:

$$\forall y\in g(I),\quad F'(y)=f(y). \qquad (1)$$

Consideremos la composición $x\in I \xrightarrow{g} g(x)\in g(I) \xrightarrow{F} F[g(x)]$.
Esta función es derivable como composición de funciones derivables, y se tiene según la regla de la cadena que:

$$\frac{d}{dx}\left(F[g(x)]\right)=F'[g(x)]\,g'(x) \overset{(1)}{=} f[g(x)]\,g'(x)$$

Por tanto, las funciones G y $F\circ g$ tienen la misma función derivada en I. Luego se diferencian en una constante K:

$$\forall x\in I,\quad G(x)=F[g(x)]+K$$

En particular, $G(c)=F[g(c)]+K$.
Pero $G(c)=\int_c^c f[g(t)]\,g'(t)\,dt=0$

y $F[g(c)]=F(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0$.

Por tanto $K=0$. Luego $\forall x\in I$, $G(x)=F[g(x)]$.
En particular, $G(d)=F[g(d)]$. Luego, como

$$G(d)=\int_c^d f[g(t)]\,g'(t)\,dt \quad \text{y} \quad F[g(d)]=F(b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

se tiene que $\int_a^b f(x)\,dx=\int_c^d f[g(t)]\,g'(t)\,dt$. csqd.

5. Aproximación de una integral mediante las sumas de Riemann.

Hasta ahora solo conocemos una condición necesaria y suficiente para

caracterizar funciones integrables Riemann: la condición (ε, P) de Riemann.
Vamos a dar en este apartado nuevas caracterizaciones de funciones integrables.

* Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se definen las sumas de Riemann de f para la partición P del siguiente modo:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i$$

siendo t_i un punto de $[x_{i-1}, x_i]$. Evidentemente, para una partición P el valor de $S(f,P)$ depende de los puntos t_i que elijamos.
Se dice que $\lim_{|P| \to 0} S(f,P) = A$ sii se verifica que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, |P| < \delta \Rightarrow |S(f,P) - A| < \varepsilon$$

y esto cualesquiera que sean los puntos t_i que tomemos en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

5.1. TEOREMA: Si existe $\lim_{|P| \to 0} S(f,P) = A$ entonces $f \in R([a,b])$ y se tiene que $\int_a^b f = A$.

Demostr.: $\lim_{|P| \to 0} S(f,P) = A \Rightarrow \left[\forall \varepsilon > 0, (\tfrac{\varepsilon}{2}), \exists \delta > 0 \,/\, |P| < \delta \Rightarrow |S(f,P) - A| < \tfrac{\varepsilon}{2}\right]$

o bien $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, |P| < \delta \Rightarrow A - \frac{\varepsilon}{2} < S(f,P) < A + \frac{\varepsilon}{2}$.
Sea P una partición de $[a,b]$ de modo que su diámetro, $|P|$, sea menor que δ. Entonces:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta x_i < A + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall t_i \in [x_{i-1}, x_i]. \quad (I)$$

Consideremos el número real $\sup_{t_i} S(f,P)$ cuando variamos t_i en $[x_{i-1}, x_i]$.
Veamos que $\sup_{t_i} S(f,P) = \mathcal{U}(f,P)$.

$$\forall t_i \in [x_{i-1}, x_i],\ f(t_i) \le M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \Rightarrow \forall t_i,\ S(f,P) \le \mathcal{U}(f,P) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{t_i} S(f,P) \le \mathcal{U}(f,P).$$

Por otro lado:

$$f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n \le \sup_{t_i} S(f,P) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t_1 \in [x_0, x_1],\ f(t_1)\Delta x_1 \le \sup_{t_i} S(f,P) - [f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_1 \Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_n)\Delta x_n \le \sup_{t_i} S(f,P) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall t_2 \in [x_1, x_2],\ \sup_{t_i} S(f,P) - [M_1\Delta x_1 + f(t_3)\Delta x_3 + \dots + f(t_n)\Delta x_n] \ge f(t_2)\Delta x_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M_1\Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + f(t_3)\Delta x_3 + \dots + f(t_n)\Delta x_n \le \sup_{t_i} S(f,P)$$

Así sucesivamente probamos que $\mathcal{U}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \le \sup_{t_i} S(f,P)$

Luego $\mathcal{U}(f,P) = \sup_{t_i} S(f,P)$

Análogamente $L(f,P) = \inf_{t_i} S(f,P)$

Entonces, según (I), $\mathcal{U}(f,P) = \sup_{t_i} S(f,P) < A + \frac{\varepsilon}{2}$

y también $A - \frac{\varepsilon}{2} < \inf_{t_i} S(f,P) = L(f,P)$.

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}([a,b]) / \mathcal{U}(f,P) - L(f,P) < (A + \frac{\varepsilon}{2}) - (A - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$

Luego $f \in R([a,b])$.

Además $\forall \varepsilon > 0, \exists P / A - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,P) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(f,P) \leq A + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \left| \int_a^b f - A \right| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = A$. csqd.

- Este teorema, junto con el siguiente, una especie de recíproco del anterior, nos proporciona una nueva caracterización de funciones integrables Riemann.

5.2. TEOREMA: Si f es una función integrable Riemann en el compacto $[a,b]$ entonces existe $\lim_{|P| \to 0} S(f,P)$ y su valor es $\int_a^b f$.

Demostr.:

Si $f \in R([a,b])$, $\sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} L(f,P) = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} \mathcal{U}(f,P)$.

Siendo $\int_a^b f = \inf_{P \in \mathcal{P}([a,b])} \mathcal{U}(f,P)$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists P^* \in \mathcal{P}([a,b]) / \mathcal{U}(f,P^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f$ (I)

Sea $P^* = \{x_0, x_1, \dots, x_r\}$. Llamemos $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Sea $P \in \mathcal{P}([a,b]) / |P| < \frac{\varepsilon}{2rM}$, siendo $r = (\text{nº de términos de } P^*) - 1$.

Supongamos que $P = \{t_j\}_{j \in J}$, donde J es un conjunto finito.

Dividimos J en dos partes disjuntas A y B definidas como sigue:

$(j \in A) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (el intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ tiene uno o más puntos de $\{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}\}$).

$j \in B \Leftrightarrow j \in J - A$. Como máximo, A tiene $r-1$ índices de J.

Entonces $\mathcal{U}(f,P) = \sum_{j \in A} M_j \Delta t_j + \sum_{j \in B} M_j \Delta t_j$, siendo $M_j = \sup_{t \in [t_{j-1}, t_j]} f(t)$

Pero $\sum_{j \in A} M_j \Delta t_j \leq \sum_{j \in A} M \Delta t_j = M \sum_{j \in A} \Delta t_j$

Pero $\forall j \in A$, $\Delta t_j \leq |P| < \frac{\varepsilon}{2rM}$. Como A tiene, como máximo, $r-1$ índices de J se tiene que:

$\sum_{j \in A} M_j \Delta t_j \leq M \sum_{j \in A} \Delta t_j < M (r-1) \frac{\varepsilon}{2rM} = \frac{M}{M} \frac{r-1}{r} \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ (II)

Además $\sum_{j\in B} M_j \Delta t_j \leq \mathcal{U}(f, P\cup P^*)$, pues el conjunto de intervalos $\{[t_{j-1}, t_j] / j\in B\}$ está contenido en el conjunto de intervalos $\{[t_{i-1}, t_i] / t_{i-1}\in P\cup P^*\}$ pues si $j\in B$, por definición, en $[t_{j-1}, t_j]$ no hay ningún punto de P^*, y tampoco los hay de P, salvo t_{j-1} y t_j. $P\cup P^*$ es un refinamiento de P^*, luego:

$\sum_{j\in B} M_j \Delta t_j \leq \mathcal{U}(f, P\cup P^*) \leq \mathcal{U}(f, P^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f$, según (I).

Luego $\mathcal{U}(f,P) = \sum_{j\in J} M_j \Delta t_j \leq \sum_{j\in A} M_j \Delta t_j + \sum_{j\in B} M_j \Delta t_j <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f = \varepsilon + \int_a^b f$.

Analogamente, siendo $\int_a^b f = \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} L(f,P)$

dado $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon/2)$, $\exists P_1^* \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, -\frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b f < L(f, P_1^*)$

Sea $P_1^* = \{y_0, \dots, y_s\}$ y $P\in\mathcal{P}([a,b]) \,/\, |P| < \frac{\varepsilon}{2\cdot s\cdot M}$

Por un razonamiento enteramente análogo al hecho anteriormente

$\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P)$

Entonces, si tomamos $P\in\mathcal{P}([a,b]) \,/\, |P| < \inf\left(\frac{\varepsilon}{2rM}, \frac{\varepsilon}{2sM}\right) = \delta$

se tiene que $\int_a^b f - \varepsilon < L(f,P) \leq S(f,P) \leq \mathcal{U}(f,P) < \int_a^b f + \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left| S(f,P) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$. Luego

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \underset{P\in\mathcal{P}([a,b])}{|P| \leq \delta} \Rightarrow \left| S(f,P) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$.

Luego existe $\lim_{|P|\to 0} S(f,P) = \int_a^b f$. csqd.

– Este método para garantizar la existencia de funciones integrables Riemann se llama "aproximación de una integral mediante las sumas de Riemann".

6. Integrabilidad Riemann para funciones con valores en $\mathbb{R}^2$.

Sea $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una funcion con valores en $\mathbb{R}^2$. Entonces existen dos funciones $f_1, f_2: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $\forall x\in[a,b]$.
Decimos que f es integrable Riemann en $[a,b]$ si y solo si lo son las funciones f_1 y f_2, y tenemos que, por definición,:

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1 \,,\, \int_a^b f_2\right)$$

Vamos a dar unos teoremas análogos que para las funciones con valores en $\mathbb{R}$.

6.1. TEOREMA: Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ es integrable Riemann en $[a,b]$ y existe $g:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ derivable tal que $g' = f$, entonces

$$\int_a^b f = g(b) - g(a)$$

Demostr.: Sea $f = (f_1, f_2)$ y $g = (g_1, g_2)$

Entonces $g' = (g_1', g_2')$. Si $g' = f$, entonces $g_1' = f_1$ y $g_2' = f_2$. Segun el 2º teorema fundamental del cálculo integral.

$$\int_a^b f_1 = g_1(b) - g_1(a) \quad y \quad \int_a^b f_2 = g_2(b) - g_2(a)$$

Luego $\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \int_a^b f_2\right) = (g_1(b) - g_1(a), g_2(b) - g_2(a)) = (g_1(b), g_2(b)) - (g_1(a), g_2(a)) = g(b) - g(a)$. csqd.

6.2. TEOREMA: Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ una función integrable Riemann en $[a,b]$. Entonces $\|f\| \in R([a,b])$. Además

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$$

Demostr.: Sea $y_1 = \int_a^b f_1$, $y_2 = \int_a^b f_2$ e $y = (y_1, y_2) = \int_a^b f$

La función $\|f\|$ está definida del siguiente modo: $\|f\| = (f_1^2 + f_2^2)^{\frac{1}{2}}$

Como $f_1, f_2 \in R([a,b]) \Rightarrow f_1^2, f_2^2 \in R([a,b]) \Rightarrow f_1^2 + f_2^2 \in R([a,b]) \Rightarrow (f_1^2 + f_2^2)^{1/2} \in R([a,b])$

Luego $\|f\| \in R([a,b])$.

Ademas $\|y\|^2 = y_1^2 + y_2^2 = y_1 \int_a^b f_1 + y_2 \int_a^b f_2 \overset{y_1 \text{ e } y_2 \text{ son constantes}}{=}$

$= \int_a^b (y_1 f_1 + y_2 f_2) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{2} y_i f_i\right) \leq \int_a^b \|y\| \cdot \|f\|$, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwartz. Luego, como $\|y\|$ es constante.

$$\|y\|^2 \leq \|y\| \int_a^b \|f\| \qquad (I)$$

Si $\|y\| = 0 \Rightarrow y = \bar{0} = (0,0) \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$. Luego $\left\|\int_a^b f\right\| = 0 \leq \int_a^b \|f\|$

Si $\|y\| \neq 0$, entonces $\|y\| > 0$. Luego, segun (I), dividiendo por $\|y\|$

$$\|y\| \leq \int_a^b \|f\| \iff \left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|. \text{ csqd.}$$

* **VARIACION DE UNA FUNCION** $f:[a,b] \to \mathbb{R}^2$

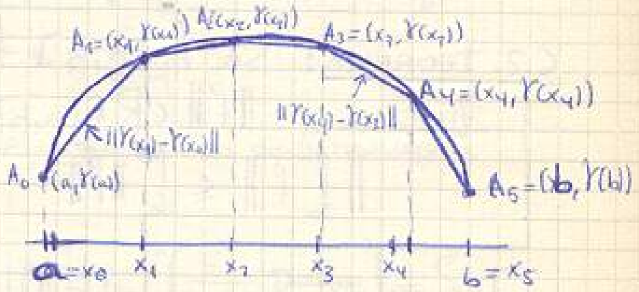
Sea una función $f:[a,b] \to \mathbb{R}^2$ y $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b])$

Se define la variación de f con respecto a P como sigue
$$V_f(P) = \sum_{i=1}^{n} \| f(x_i) - f(x_{i-1}) \|$$
Se define la variación total de f en $[a,b]$ como:
$$V_f([a,b]) = \sup_{P\in \mathcal{P}([a,b])} V_f(P) \in \overline{\mathbb{R}}$$
Se dice que f es de variación acotada si $V_f([a,b]) \in \mathbb{R}$.

Si $f=(f_1,f_2)$ se deduce fácilmente que f es de variación acotada sii f_1 y f_2 son de variación acotada si tenemos en cuenta las desigualdades:
$$|f_1(x_i) - f_1(x_{i-1})| \leq \| f(x_i) - f(x_{i-1}) \| \leq |f_1(x_i) - f_1(x_{i-1})| + |f_2(x_i) - f_2(x_{i-1})|.$$

* DEFINICIONES: – Un camino en $\mathbb{R}^2$ es una aplicación continua
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
– Un camino γ en $\mathbb{R}^2$ **se** dice rectificable si la aplicación γ es de variación acotada.

– La longitud de un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ rectificable es, por definición,
$$L(\gamma) = V_\gamma([a,b]).$$



Para una partición $P=\{x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ de $[a,b]$, $V_\gamma(P) = \sum_{i=1}^{5} \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$

Luego $V_\gamma(P)$ es la longitud de la poligonal $(A_0,A_1,A_2,A_3,A_4,A_5)$. La longitud de γ es el superior de las longitudes de las poligonales, cuando P recorre $\mathcal{P}([a,b])$.

6.3. TEOREMA: Sea un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ derivable tal que γ' es continua en $[a,b]$. Entonces
a) γ es de variación acotada.
b) $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

Demostr.: a) Sea $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)$. Entonces, si $\gamma'=(\gamma_1',\gamma_2')$ es continua, γ_1' y γ_2' son continuas en $[a,b]$, y, por tanto, acotadas en $[a,b]$. Luego γ_1 y γ_2 son continuas y sus derivadas acotadas en $[a,b]$, entonces por Teorema 3.1, Tema 7º, γ_1 y γ_2 son de variación acotada. Luego γ es de variación acotada.

b) $$L(\gamma) = V_\gamma([a,b]) = \sup_{P\in\mathcal{P}([a,b])} V_\gamma(P)$$
$\forall P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, $V_\gamma(P) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$

Veamos si existe $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$.

Siendo $\gamma'=(\gamma_1',\gamma_2')$ continua, $\|\gamma'(t)\| = (\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2)^{1/2}$ es continua en $[a,b]$, y, por tanto, integrable Riemann en $[a,b]$.

Según el teorema fundamental del cálculo integral
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt = \gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1}).$$

Luego $V_\gamma(P) = \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt \right\| \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt$, pues $\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$,

Luego $\forall P \in \mathcal{P}([a,b])$, $V_\gamma(P) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \Rightarrow L(\gamma) = \sup_P V_\gamma(P) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt.$

Probemos que $\int_a^b \|\gamma'(t)\|\,dt \leq L(\gamma)$, con lo cual quedará probada la igualdad.
γ_1' y γ_2' son continuas en el compacto $[a,b]$, luego son uniformemente continuas en $[a,b]$. Por tanto, γ' es uniformemente continua en $[a,b]$. Luego:
$\forall \varepsilon > 0 \left(\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$, $\exists \delta > 0 \,/\, \underset{s,t\in[a,b]}{|s-t| \leq \delta} \Rightarrow \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leq \varepsilon'$

Sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, |P| \leq \delta$

Entonces $\forall t \in [x_{i-1}, x_i]$, $|t - x_i| \leq |x_{i-1} - x_i| \leq |P| \leq \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\gamma'(t) - \gamma'(x_i)\| \leq \varepsilon' \Rightarrow \|\gamma'(t)\| \leq \varepsilon' + \|\gamma'(x_i)\|$

Luego, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\varepsilon' + \|\gamma'(x_i)\|)\,dt =$

$= \varepsilon' \Delta x_i + \|\gamma'(x_i)\| \Delta x_i$

Luego $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt - \varepsilon' \Delta x_i \leq \|\gamma'(x_i)\| \Delta x_i = \|\gamma'(x_i) \Delta x_i\|$, pues $\Delta x_i > 0$.

Luego $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt - \varepsilon' \Delta x_i \leq \|\gamma'(x_i) \Delta x_i\| =$

$= \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(x_i)\,dt \right\| = \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t) + \gamma'(t)]\,dt \right\| =$

$= \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right\| \leq$

$\leq \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt \right\| + \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right\|$

Luego $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt - \varepsilon' \Delta x_i \leq \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt \right\| + \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right\|$

Pero $\left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \gamma'(t)\,dt \right\| = \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$ y

$\left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\gamma'(x_i) - \gamma'(t)]\,dt \right\| \leq \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(x_i) - \gamma'(t)\|\,dt \right\| \leq \left\| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon'\,dt \right\| = \varepsilon' \Delta x_i.$

Luego: $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt - \varepsilon' \Delta x_i \leq \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\| + \varepsilon' \Delta x_i$

y también $\int_{x_{i-1}}^{x_i} \|\gamma'(t)\|\,dt \leq 2\varepsilon' \Delta x_i + \|\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})\|$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

Entonces $\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\|\gamma'(t)\|dt \leq 2\varepsilon'\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n}\|\gamma(x_i)-\gamma(x_{i-1})\| \leq$

$\leq 2\varepsilon'(b-a) + V_\gamma([a,b])$

Por tanto
$$\int_a^b \|\gamma'(t)\|dt \leq 2\varepsilon'(b-a) + V_\gamma([a,b])$$

Luego $\forall\varepsilon>0$, $\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt \leq 2\varepsilon'(b-a)+V_\gamma([a,b])$, donde $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

Luego $\forall\varepsilon>0$, $\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt \leq \varepsilon + V_\gamma([a,b]) \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b\|\gamma'(t)\|dt \leq V_\gamma([a,b])$

Por tanto $L(\gamma) = V_\gamma([a,b]) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$. csqd.

Este resultado se generaliza para un camino en $\mathbb{R}^n$, $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$.

<u>EJEMPLO</u>: Longitud de un arco de una curva en $\mathbb{R}^2$.

Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función real continua y derivable en $[a,b]$.

Definimos una aplicación
$$t\in[a,b]\xrightarrow{\gamma}\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))$$
siendo $\gamma_1(t)=t \wedge \gamma_2(t)=f(t)$.

Entonces $\gamma_1'(t)=1 \wedge \gamma_2'(t)=f'(t)$

Entonces $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2+\gamma_2'(t)^2} = \sqrt{1+[f'(t)]^2}$

Luego $L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b\sqrt{1+[f'(t)]^2}\,dt$

En otros casos podemos proceder de otro modo de manera que la integral que resulte sea más sencilla de calcular. Por ejemplo, para hallar la longitud de la circunferencia $x^2+y^2=R^2$ consideramos las coordenadas paramétricas de la circunferencia que son
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t\end{cases} \quad t\in[0,2\pi].$$

Luego $L(C) = \int_0^{2\pi}\sqrt{[(R\cos t)']^2+[(R\,\mathrm{sen}\,t)']^2}\,dt =$

$= \int_0^{2\pi}\sqrt{R^2(\mathrm{sen}^2t+\cos^2t)}\,dt = R\int_0^{2\pi}dt = 2\pi R.$

<u>7. INTEGRALES IMPROPIAS</u>

Hasta ahora hemos considerado la integración de funciones definidas en un compacto $[a,b]$. El concepto de integral de Riemann se puede extender también a funciones definidas en intervalos no acotados $[a,+\infty[$ ó $]-\infty,a]$, $]-\infty,+\infty[$ en intervalos **no cerrados** $]a,b]$ $[a,b[$ o $]a,b[$ y en intervalos ni cerrados ni acotados $]-\infty,a[$ ó $]a,+\infty[$.

** INTEGRALES IMPROPIAS DE PRIMERA ESPECIE

Sea una función $f:[a,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$.

Supongamos que $\forall b\geq a$, $\exists\int_a^b f$.

Considerenos entonces la aplicación $b\in[a,+\infty[\xrightarrow{\ I\ } I(b)=\int_a^b f$

DEFINICION: Decimos que existe la integral impropia de primera especie $\int_a^{+\infty} f$ si existe $\lim_{b\to+\infty} I(b)=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ y es un número real.

Si existe en $\mathbb{R}$ dicho límite llamamos

$$\int_a^{+\infty} f=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f.$$ Se dice también que $\int_a^{+\infty} f$ es convergente.

Ejemplo: Consideremos la función $f(x)=x^{-p}$.

$\forall b\in[1,+\infty[$, $\exists\int_1^b x^{-p}\,dx$, pues f es continua en $[1,+\infty[$.

- Si $p\neq 1$, $\int_1^b x^{-p}\,dx=\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b=\frac{1}{-p+1}\left[b^{-p+1}-1\right]$

Si $p>1\Rightarrow -p+1<0$. Luego $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-p+1}\left[b^{-p+1}-1\right]=\frac{-1}{-p+1}$

Luego si $p>1$, $\exists\int_1^{+\infty} x^{-p}dx=\frac{-1}{1-p}$

Si $p<1\Rightarrow -p+1>0$, Luego $\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-p+1}\left[b^{-p+1}-1\right]=+\infty$

Por tanto, si $p<1$ no existe la integral impropia $\int_1^{+\infty} x^{-p}dx$.

- Si $p=1$: $\int_1^b x^{-1}\,dx=\left.\log x\right]_1^b=\log b-\log 1=\log b$.

cuando $b\to+\infty$, $\log b\to+\infty$. Luego no existe $\int_1^{+\infty}x^{-1}dx$.

- Análogamente, si $f:]-\infty,a]\to\mathbb{R}$ es tal que $\forall b\leq a,\exists\int_b^a f$ y existe el límite, $\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f\in\mathbb{R}$ definimos

$$\int_{-\infty}^a f=\lim_{b\to-\infty}\int_b^a f$$

- Sea $f:]-\infty,+\infty[\to\mathbb{R}$ tal que $\exists a\in\mathbb{R}/\exists\int_{-\infty}^a f\ \wedge\ \exists\int_a^{+\infty} f$

Se define entonces la integral impropia de primera especie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f=\int_{-\infty}^a f+\int_a^{+\infty} f$$

Si c es un punto mayor que a, probemos que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_{c}^{+\infty}$$

Si $\exists \int_a^{+\infty} f$, existe $\int_a^c f \in \mathbb{R}$, y existe $\int_{-\infty}^{c} f$ y $\int_c^{+\infty} f$.

Luego $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{a} f + \int_a^{+\infty} = \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f + \lim_{b'\to+\infty}\int_a^{b'} f =$

$$= \lim_{b\to-\infty}\int_b^a f + \lim_{b'\to+\infty}\left[\int_a^c f + \int_c^{b'} f\right] =$$

$$= \lim_{b\to-\infty}\left[\int_b^a f + \int_a^c f\right] + \lim_{b'\to+\infty}\int_c^{b'} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{+\infty} f$$

DEFINICION: Se llama valor principal de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ o valor principal de Cauchy al límite
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f.$$

7.1. TEOREMA: Sea $f:]-\infty,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Si la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ es convergente (es decir, si existe) entonces existe el valor principal de dicha integral y se tiene que:
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f$$

Demostr.: Hay que probar que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{+x} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f$

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f - \int_{-x}^{x} f\right| = \left|\int_{-\infty}^{0} f + \int_0^{+\infty} f - \left(\int_{-x}^{0} f + \int_0^x f\right)\right| \leq$$
$$\leq \left|\int_{-\infty}^{0} f - \int_{-x}^{0} f\right| + \left|\int_0^{+\infty} f - \int_0^x f\right|$$

Cada uno de estos sumandos lo podemos mayorar por $\varepsilon/2$, para x suficientemente grande, por definición de $\int_0^{+\infty} f$.

Luego $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f$. c.q.d.

OBSERVACION: El recíproco de este teorema, en general, no es cierto, es decir, puede ser que exista el valor principal de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ pero no exista dicha integral.

Consideremos la función $t\in\mathbb{R} \longrightarrow f(t) = t \in \mathbb{R}$.
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} t\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right] = 0$$

Sin embargo, no existe $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$, pues no existe, por ejemplo, $\int_0^{+\infty} t\,dt$

Ya que $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty \notin \mathbb{R}$.

7.2. TEOREMA: Sea $f: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,+\infty[$.
Entonces, existe $\int_a^{+\infty} f$ si y sólo si existe una constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b f \leq M$, $\forall b \geq a$

Demostr.: $\Rightarrow$ Supongamos que existe $\int_a^{+\infty} f = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = \lim_{b\to+\infty} I(b)$

Siendo f positiva, si $b_1 < b_2$, entonces $I(b_1) < I(b_2)$, es decir, I es creciente.

Entonces $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = \sup_{b\geq a} I(b)$

Si $\exists \int_a^{+\infty} f$, $\sup_{b\geq a} I(b) = M \in \mathbb{R}$.

Luego $\exists M \in \mathbb{R} / \ I(b) \leq M$, $\forall b \geq a$.

$\Leftarrow$ Si $\exists M \in \mathbb{R} / \int_a^b f \leq M$, $\forall b \geq a \Rightarrow \sup_{b\geq a} I(b) \leq M$

Entonces $\exists \lim_{b\to+\infty} I(b) \in \mathbb{R}$. Luego $\exists \int_a^{+\infty} f$. c.s.q.d.

7.3. TEOREMA: DE COMPARACION

Sean $f, g: [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,+\infty[$
Entonces si $\int_a^{+\infty} g$ es convergente, $\int_a^{+\infty} f$ también es convergente

Demostr.: Consideramos las aplicaciones $b \in [a,+\infty[\xrightarrow{I_f} I_f(b) = \int_a^b f$

y $b \in [a,+\infty[\xrightarrow{I_g} I_g(b) = \int_a^b g$

Como $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,+\infty[\Rightarrow \forall b \in [a,+\infty[$, $I_f(b) \leq I_g(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f \leq \lim_{b\to+\infty} \int_a^b g$

Como f y g son positivas, $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f = \sup_{b\geq a} I_f(b)$ y $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b g = \sup_{b\geq a} I_g(b)$

Luego $\sup_{b\geq a} I_f(b) \leq \sup_{b\geq a} I_g(b) = \int_a^{+\infty} g$.

Pero $\int_a^{+\infty} g$ converge. Sea $M = \int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R}$.

Luego $\exists M \in \mathbb{R} / \int_a^{+\infty} f \leq M$. Entonces, por el teorema anterior, $\int_a^{+\infty} f$ converge. c.s.q.d.

7.4. TEOREMA: DE COMPARACION POR PASO AL LIMITE.

Sean $f, g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,+\infty[$ y $g(x) > 0$, $\forall x \in [a,+\infty[$. Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge si y solo si $\int_a^{+\infty} g$ converge

Demostr.: Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists A \in \mathbb{R} / x \geq A \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}$

Como g es positiva, $\exists A \in [a,+\infty[/ x \geq A \Rightarrow \frac{1}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2} g(x)$

Si $\int_a^{+\infty} f$ converge $\Rightarrow 2\int_a^{+\infty} f$ converge, luego

como para $x \geq A$ $g(x) \leq 2f(x) \Rightarrow \int_A^{+\infty} g \leq 2\int_A^{+\infty} f \Rightarrow \int_A^{+\infty} g$ converge.

Si $\int_a^{+\infty} g$ converge $\Rightarrow \frac{3}{2}\int_a^{+\infty} g$ converge

Como para $x \geq A$, $f(x) \leq \frac{3}{2} g(x) \Rightarrow \int_A^{+\infty} f \leq \frac{3}{2}\int_A^{+\infty} g \Rightarrow$ $\int_A^{+\infty} f$ converge.

Como $\int_A^{+\infty} f$ converge si y solo si converge $\int_a^{+\infty} f$ se tiene que $\exists \int_a^{+} f \iff \exists \int_a^{+\infty} g$. csqd.

OBSERVACION: - Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$ el teorema sigue siendo cierto pues $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{cg(x)} = 1$. Luego $\exists \int_a^{+} f \iff \exists \int_a^{+\infty} cg \iff \exists \int_a^{+\infty} g$.

- Si $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, dado un $\varepsilon > 0$, $\exists A \in [a,+\infty[/ \frac{f(x)}{g(x)} \leq \varepsilon$

Luego $f(x) \leq \varepsilon \cdot g(x)$. Luego si $\exists \int_A^{+\infty} g \Rightarrow \exists \int_A^{+\infty} f$

y tambien $\exists \int_a^{+\infty} g \Rightarrow \int_a^{+\infty} f$. Ahora bien, que existe $\int_a^{+\infty} f$ no implica que existe $\int_a^{+\infty} g$.

Contraejemplo: La integral $\int_1^{+\infty} x^{-p} dx$ converge si $p > 1$.

Entonces $\int_1^{+\infty} x^{-2} dx$ converge, pero $\int_1^{+\infty} x\, dx$ no converge.

Sin embargo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-2}}{x} = 0$, y ambas funciones son positivas en $[1,+\infty[$.

7.5. TEOREMA: Sea $f:[a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Si $\int_a^{+\infty}|f|$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Demostr.: $\forall x\geq a$, $0\leq |f(x)|-f(x)\leq 2|f(x)|$

Si $\int_a^{+\infty}|f|$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} 2|f(x)|$ converge $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^{+\infty}[|f(x)|-f(x)]$ converge $\Rightarrow \int_a^{+\infty}|f|-\int_a^{+\infty} f\in\mathbb{R}$

Luego $\int_a^{+\infty} f\in\mathbb{R}$, pues $\int_a^{+\infty}|f|$ converge. c.s.q.d.

El recíproco, en general, no es cierto. Esto da lugar la siguiente definición:

DEFINICION: Una integral $\int_a^{+\infty} f$ se dice condicionalmente convergente cuando converge $\int_a^{+\infty} f$ pero no $\int_a^{+\infty}|f|$.

** INTEGRALES IMPROPIAS DE SEGUNDA ESPECIE

Sea una función $f:]a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $\forall x\in]a,b]$, existe $\int_x^b f$.

Construimos la aplicación $x\in]a,b]\xrightarrow{I} I(x)=\int_x^b f$

Decimos que existe la integral impropia de 2ª especie $\int_{a+}^b f$ si existe $\lim_{x\to a+}\int_x^b f$ y es un número real. Caso de existir este límite definimos
$$\int_{a+}^b f=\lim_{x\to a+}\int_x^b f$$

EJEMPLO: Sea la función $t\in]0,1]\xrightarrow{f} f(t)=t^{-p}\in\mathbb{R}$. Veamos en qué casos existe $\int_{0+}^1 f$.

- Si $p=1$, $\lim_{x\to 0+}\int_x^1 t^{-1}dt=\lim_{x\to 0+}\log t\Big]_x^1=\lim_{x\to 0+}(\log 1-\log x)=\lim_{x\to 0+}-\log x=+\infty$.

Luego, si $p=1$ no existe $\int_{0+}^1\frac{1}{t}dt$.

- Si $p\neq 1$, $\forall x\in]0,1]$, $\int_x^1 t^{-p}dt=\frac{1}{1-p}[1-x^{1-p}]$

Si $p<1\Rightarrow 1-p>0\Rightarrow \lim_{x\to 0+}\int_x^1 t^{-p}dt=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to 0+}[1-x^{1-p}]=\frac{1}{1-p}$

Luego si $p<1$, $\int_{0+}^1 t^{-p}dt=\frac{1}{1-p}$

Si $p>1$, $\lim_{x\to 0+}\int_x^1 t^{-p}dt=\frac{1}{1-p}\lim_{x\to 0+}[1-x^{1-p}]=+\infty$. Luego no existe $\int_{0+}^1 t^{-p}dt$

* Análogamente, si $f: [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $\forall x \in [a,b[$, $f \in R([a,x])$ y existe

$$\lim_{x\to b-} \int_a^x f \in \mathbb{R}$$

se define:

$$\int_a^{b-} f = \lim_{x\to b-} \int_a^x f$$

* Si $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que existe $c \in]a,b[$ de modo que

$$\exists \int_{a+}^{c} f \quad y \quad \exists \int_c^{b-} f$$

se define

$$\int_{a+}^{b-} f = \int_{a+}^{c} f + \int_c^{b-} f$$

* Para integrales impropias de segunda especie podemos enunciar unos teoremas de convergencia enteramente análogos, en su demostración, a los de las de primera especie.

7.6. TEOREMA: Sea $f:]a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que $\forall x \in]a,b]$, existe la integral $\int_x^b f$ y de modo que $\forall x \in]a,b]$, $f(x) \geq 0$. Entonces:

$$\exists \int_{a+}^{b} f \iff \exists M \in \mathbb{R} \;/\; \int_x^b f \leq M, \ \forall x \in]a,b]$$

7.7. TEOREMA: Sean $f, g:]a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in]a,b]$.

Entonces si $\int_{a+}^{b} g$ converge, existe $\int_{a+}^{b} f$.

7.8. TEOREMA: Sean $f, g:]a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in]a,b]$. Supongamos que existe

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

Entonces $\int_{a+}^{b} f$ converge $\iff \int_{a+}^{b} g$ converge.

Si $c = 0$, la convergencia de $\int_{a+}^{b} g$ implica la convergencia de $\int_{a+}^{b} f$.

** INTEGRALES IMPROPIAS DE TERCERA ESPECIE

Son integrales del tipo $\int_{a+}^{+\infty} f$ o $\int_{-\infty}^{b-} f$.

Si $\exists c \in]a, +\infty[\;/\; \exists \int_{a+}^{c} f \wedge \exists \int_c^{+\infty} f$ se define

$$\int^{+\infty} f = \int^{c} f + \int^{+\infty} f$$