TEMA 9: CONVERGENCIA SIMPLE Y UNIFORME DE SUCESIONES DE FUNCIONES

1. DEFINICIONES

Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$. Denotamos por $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones reales definidas en E.

Una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ se dice una sucesión de funciones:

$$n\in\mathbb{N} \longrightarrow f_n \in \mathcal{F}(E;\mathbb{R}).$$

DEFINICION: CONVERGENCIA SIMPLE O PUNTUAL DE UNA SUCESION DE FUNCIONES.

Se dice que una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ converge simplemente o puntualmente hacia $f\in\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ si para todo $x\in E$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$

$$\left[(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{F}(E;\mathbb{R})} f \text{ simplemente}\right] \Longleftrightarrow \left[(\forall x\in E)\wedge(\forall \varepsilon>0), \exists n_0(x,\varepsilon)\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon\right]$$

DEFINICION: CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SUCESION DE FUNCIONES.

Se dice que una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente hacia una función f en $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ si se verifica que:

$$\left[\forall\varepsilon>0, \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\ \forall x\in E\right]$$

Se ve en las definiciones las diferencias entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme. En la primera, el n_0 depende, en general, de ε y del punto $x\in E$; en la convergencia uniforme, n_0 sólo depende de ε.

1.1. TEOREMA: Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{F}(E;\mathbb{R})} f$ uniformemente, entonces $(f_n)_n \longrightarrow f$ puntualmente.

La demostración se deduce inmediatamente de la definición.

El recíproco no es cierto, en general.

CONTRAEJEMPLO: Sea $E=[0,1]$. Para cada $n\in\mathbb{N}$ definimos

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x)=x^n$$

$\forall x\in[0,1[$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, pues $0\leq x<1$.

Si $x=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$.

Como vemos $(f_n)_n$ converge puntualmente hacia la función $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,1[\\ 1 & x=1\end{cases}$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiese uniformemente en $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$, convergería hacia f, según el teorema anterior. Probemos que esto no es cierto.

Si $(f_n)_n$ convergiese uniformemente hacia f se tendría que:

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon, \forall x\in[0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon \quad (\mathrm{I})$

Pero $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1[}|f_n(x)-f(x)|$, pues si $x=1$, $f_n(x)=f(x)\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|=0$.

Pero $\forall x\in[0,1[, f(x)=0$. Luego de (I) se deduciría que:

$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,1[}|f_n(x)|\leq\varepsilon \quad (\mathrm{II})$

Pero fijado $n\in\mathbb{N}$, $\sup\limits_{x\in[0,1[}|f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1[} x^n = 1$. (III)

Tomado $\varepsilon=\frac{1}{2}$, para un $n\geq n_0$, n fijo se tendría

(por (II)) $\sup\limits_{x\in[0,1[}|f_n(x)|\leq\frac{1}{2}$

y (por (III)) $\sup\limits_{x\in[0,1[}|f_n(x)|=1$

lo cual es una contradicción.

Este mismo ejemplo sirve para poner de manifiesto que el hecho de que f_n sea continua, para todo $n\in\mathbb{N}$, no significa que f sea continua.

– Si tomamos $E=[0,a]$ con $0<a<1$ y $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=x^n$, $\forall x\in E$

Se tiene que $\forall x\in[0,a]$, $\lim\limits_n f_n(x)=0$, pues $0\leq x\leq a<1\Rightarrow x^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

La sucesión funcional $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente hacia la función nula sobre E: $f(x)=0$, $\forall x\in[0,a]$.

Entonces $\sup\limits_{t\in[0,a]}|f_n(t)-f(t)| = \sup\limits_{t\in[0,a]}|f_n(t)| = \sup\limits_{t\in[0,a]} t^n = a^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, pues $a<1$

Luego

$[\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0\Rightarrow \sup\limits_{t\in[0,a]}|f_n(t)-f(t)|=a^n\leq\varepsilon]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0\Rightarrow |f_n(t)-f(t)|\leq a^n\leq\varepsilon, \forall t\in[0,a]]$

Luego $(f_n)_n$ converge uniformemente hacia f.

NOTA: El concepto de convergencia en ciertos espacios métricos funcionales coincide con el concepto de convergencia uniforme que hemos enunciado anteriormente. Consideremos el conjunto $\mathcal{C}(I)$ de las funciones continuas definidas en un intervalo compacto I. En $\mathcal{C}(I)$ definimos una norma del siguiente modo:

$$f \in \mathcal{C}(I) \longmapsto \|f\| = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \in \mathbb{R}$$

$\sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \in \mathbb{R}$, pues f continua en $I \Rightarrow |f|$ continua en I. Luego, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $|f|$ alcanza el máximo en I.

Definimos, entonces, una distancia:

$$d: \mathcal{C}(I) \times \mathcal{C}(I) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, g) \longmapsto d(f,g) = \|f-g\|$$

Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones en $(\mathcal{C}(I), d)$. Entonces:

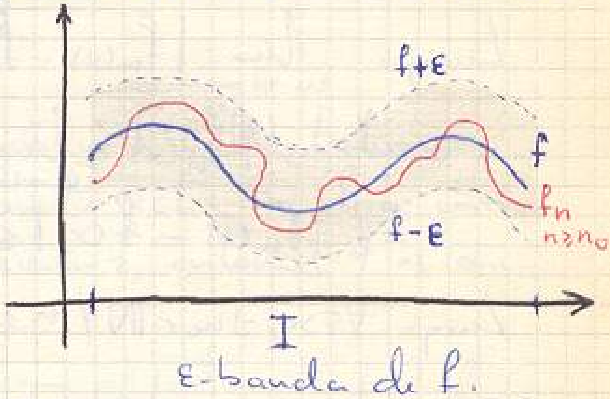
$$[\,(f_n)_n \to f \in \mathcal{C}(I)\,] \Leftrightarrow [\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f) \leq \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|f_n - f\| = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\,] \quad (1)$$

Luego en el espacio métrico $(\mathcal{C}(I), d)$ el concepto de convergencia coincide con la idea que tenemos de convergencia uniforme de sucesiones funcionales.

La condición (1) equivale a que si $n \geq n_0$

$$f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon, \ \forall x \in [a,b]$$

es decir f_n pertenece a la bola de centro f y radio ε en el espacio métrico $(\mathcal{C}(I), d)$. Esto significa que la gráfica de f_n $(n\geq n_0)$ en $\mathbb{R}^2$ está comprendida en la ε-banda de la gráfica de f.



ε-banda de f.

1.2. TEOREMA: CRITERIO DE CAUCHY PARA CONVERGENCIA PUNTUAL.

Dado $E \subset \mathbb{R}$, una sucesión de funciones $(f_n)_n$ de $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ converge puntualmente hacia $f \in \mathcal{F}(E; \mathbb{R})$ si y solo si, para cada $x \in E$, $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Demostr.: Dado $x \in E$, $(f_n(x))_n$ constituye una sucesión de números reales. Como $(f_n)_n \to f$ puntualmente se tiene por definición que, dado $x \in E$

$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Luego $\forall x \in E$, la sucesión $(f_n(x))_n$ es convergente, y por tanto de Cauchy.

El recíproco es totalmente análogo, si tenemos en cuenta que $\mathbb{R}$ es completo.

1.3. TEOREMA: CRITERIO DE CONVERGENCIA UNIFORME DE CAUCHY

Una sucesión de funciones $(f_n)_n$ converge uniformemente en E hacia una función f si y solo si se verifica que
$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n,m\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon, \forall x\in E$$

Demostr.: $\Rightarrow$] Si $(f_n)_n \to f$ uniformemente se tiene que
$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}, \forall x\in E.$$
Luego $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/ n,m\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)|\leq$
$$\leq |f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon, \forall x\in E.$$

$\Leftarrow$] Si se verifica la condición de Cauchy se tiene que $\forall x\in E$, $(f_n(x))_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Luego es convergente en $\mathbb{R}$. Es decir, $\exists y_x\in\mathbb{R} / \lim_n f_n(x)=y_x$

Consideremos la función $x\in E \xrightarrow{f} f(x)=y_x\in\mathbb{R}$.

Por hipótesis dado $\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/ n, m\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon, \forall x\in E$.

Sea $n\in\mathbb{N}$ fijo tal que $n\geq n_0$, y hagamos que $m\to+\infty$.
Entonces, dado $\varepsilon>0$, $|f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon, \forall x\in E$

Luego $\lim_{m\to+\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\leq\varepsilon$, $\forall x\in E$

y también $|f_n(x)-\lim_{m\to+\infty}f_m(x)|\leq\varepsilon, \forall x\in E \Rightarrow$
$$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon.$$

Luego $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/ n\geq n_0 \Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon, \forall x\in E$ c.s.q.d.

2. ESTABILIDAD DE LA CONTINUIDAD, INTEGRABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD POR LA CONVERGENCIA UNIFORME

2.1. TEOREMA: Sea $E\subset\mathbb{R}$ y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de E en $\mathbb{R}$ que converge uniformemente hacia $f\in\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$. Sea x un punto de acumulación de E. Supongamos que para todo natural n existe $\lim_{t\to x} f_n(t)=A_n$. Entonces la sucesión $(A_n)_n$ es convergente en $\mathbb{R}$ y se verifica que
$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{t\to x}f(t)$$

Demostr.: Si $(f_n)_n\to f$ uniformemente en E, por la condición de Cauchy
$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n,m\geq n_0 \Rightarrow |f_n(t)-f_m(t)|\leq\varepsilon, \forall t\in E.$$
Entonces, dados $n,m\geq n_0$ se tiene que $\lim_{t\to x}|f_n(t)-f_m(t)|=|A_n-A_m|\leq\varepsilon$

Luego $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/ \ldots |A_n-A_m|\leq\varepsilon$

Es decir, la sucesión $(A_n)_n$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, y, por tanto, convergente. Luego

$$\exists A \in \mathbb{R} \,/\, \lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Probemos que $\lim_{t\to x} f(t) = A$ con lo cual quedará terminada la demostración. Hay que probar que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \underset{t\in E}{|t-x|} \leq \delta \Rightarrow |f(t) - A| \leq \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0' \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0' \Rightarrow |A_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, pues $(A_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} A$

y también $\exists n_0'' \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0'' \Rightarrow |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, $\forall t \in E$, pues $(f_n)_n \to f$ uniformemente en E.

Además $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$, luego dado $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \,/\, \underset{t\in E}{|t-x|} \leq \delta \Rightarrow |f_n(t) - A_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Tomando $N = \sup\{n_0', n_0''\}$ para cualquier $n \geq N$ se verifica que:

$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$, siempre que $|t-x| \leq$

Luego $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \,/\, \underset{t\in E}{|t-x|} \leq \delta \Rightarrow |f(t) - A| \leq \varepsilon.$

Luego $\lim_{t\to x} f(t) = A$. csqd.

2.2. TEOREMA: Sea $E \subset \mathbb{R}$, $(f_n)_n$ una sucesión en $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua en un punto $x \in E$. Si $(f_n)_n$ converge uniformemente en E hacia una función f, entonces f es continua en x.

Demostr.: Si x es un punto aislado de E el teorema es trivial, pues es suficiente que f esté definida en x para ser continua en dicho punto. Si x es un punto de acumulación tendremos que probar que $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$.

Pero $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n es continua en x, luego $\lim_{t\to x} f_n(t) = f_n(x)$.

Entonces, por el teorema anterior.

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ pues } (f_n)_n \to f. \text{ csqd.}$$

OBSERVACIONES: ① Lo que hemos probado en los teoremas anteriores es que:

$$\lim \lim f_n(t) = \lim \lim f_n(t)$$

② En el conjunto $E=[0,1[$ la sucesión de funciones (f_n) definidas

$$\forall n\in\mathbb{N},\ t\in[0,1[\longrightarrow f_n(t)=t^n$$

verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)=0$, $\forall t\in[0,1[$.

Luego $(f_n)_n \to f$ puntualmente siendo $f(t)=0$, $\forall t\in[0,1[$.

La función f es continua, sin embargo no hay convergencia uniforme pues

$$\sup_{t\in[0,1[}|f(t)-f_n(t)| = \sup_{t\in[0,1[} t^n = 1.$$

Sirve esto de contraejemplo para comprobar que el recíproco del teorema anterior no es cierto, ni aún siendo la sucesión $(f_n)_n$ monótona, como lo es en este caso. Sin embargo, si E es compacto el recíproco sí es cierto:

2.3. TEOREMA: TEOREMA DE DINI: PASO DE CONVERGENCIA PUNTUAL A UNIFORME.

Sea E un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones que converge puntualmente en E hacia $f\in\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ de forma que f_n $(n\in\mathbb{N})$ y f son continuas en E. Supongamos además que $(f_n)_n$ es monótona. Entonces $(f_n)_n$ converge uniformemente hacia f.

Demostr.: Supongamos que $(f_n)_n$ es monótona creciente. Es suficiente probar que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N} / f_{n_0}(x)>f(x)-\varepsilon$, $\forall x\in E$, pues entonces si $n\geq n_0 \Rightarrow f_n(x)\geq f_{n_0}(x)$, $\forall x\in E \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)-\varepsilon < f_{n_0}(x)\leq f_n(x) \underset{(1)}{\leq} f(x) < f(x)+\varepsilon,\ \forall x\in E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\ \forall x\in E$$ que es lo que queremos probar.

La desigualdad (1) es cierta pues (f_n) es creciente y $(f_n)\to f$ puntualmente.

Probemos entonces que $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N} / f_{n_0}(x)>f(x)-\varepsilon$, $\forall x\in E$.

Dado $\varepsilon>0$, $\forall y\in E$, $\exists n_y\in\mathbb{N} / f(y)-\varepsilon < f_{n_y}(y) < f(y)+\varepsilon$ (I)

pues $(f_n)_n\to f$ puntualmente.

Consideremos la función $z\in E \xrightarrow{\phi} (f_{n_y}-f+\varepsilon)(z)$

Esta función es continua pues f_{n_y} y f lo son y ε es constante.

Según **(I)**, $\phi(y)=f_{n_y}(y)-f(y)+\varepsilon>0$.

Siendo ϕ continua, $\exists V^y$ abto $\in\mathcal{F}(y) / \phi(z)>0$, $\forall z\in V^y\cap E$

Es decir $\forall z\in V^y\cap E$, $f_{n_y}(z)>f(z)-\varepsilon$. (II)

Luego a cada $y\in E$, le asociamos un entorno abierto V^y de y

Entonces $E \subset \bigcup_{y \in E} V^y$

Tenemos un recubrimiento abierto de E, del cual por ser E compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito:

$\exists \{y_1, \dots, y_m\} \subset E \;/\; E \subset \bigcup_{k=1}^{m} V^{y_k}$

Sea $n_0 = \sup\{n_{y_1}, \dots, n_{y_m}\}$. Luego:

dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \;/\; f_{n_0}(x) > f(x) - \varepsilon$, $\forall x \in E$

pues $\forall x \in E \subset \bigcup_{k=1}^{m} V^{y_k}$, $\exists y_k \,/\, x \in V^{y_k}$

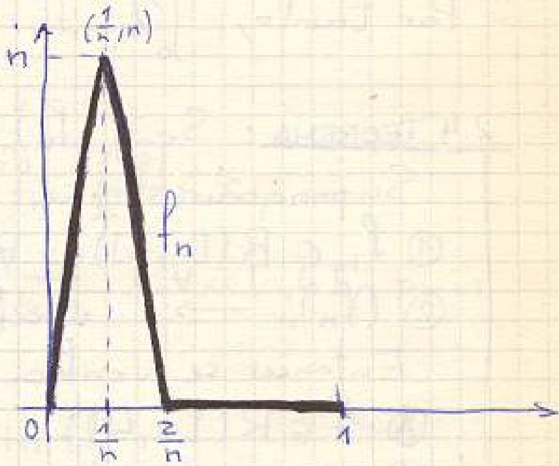
Según (II), $x \in V^{y_k} \cap E \Rightarrow f_{n_{y_k}}(x) > f(x) - \varepsilon$

Como $n_0 \geq n_{y_k} \Rightarrow f_{n_0}(x) \geq f_{n_{y_k}}(x) > f(x) - \varepsilon$. c.s.q.d.

OBSERVACIONES: ① No se puede suprimir la hipótesis de que $(f_n)_n$ sea monótona. Para cada natural $n \geq 2$ definimos la función

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} = n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ = -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right) & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ = 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Se verifica que $\forall x \in [0,1]$, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, pues si $x>0$ para n suficientemente grande $\frac{2}{n} < x \Rightarrow f_n(x) = 0$, y si $x=0$, $f_n(x) = 0$.



Luego la sucesión $(f_n)_n$ converge puntualmente a la función nula en $[0,1]$:

$f(t) = 0$, $\forall t \in [0,1]$

$[0,1]$ es compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua y f también es continua, además $(f_n)_n \to f$ puntualmente; pero $(f_n)_n$ no es monótona. Veamos que (f_n) no converge uniformemente hacia f. Supongamos que $(f_n)_n \to f$ uniformemente.

Entonces, para n suficientemente grande podríamos hacer $\sup |f_n(t) - f(t)|$ menor que un número positivo fijado de antemano. Pero:

$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in [0,1]} f_n(t) = n$ que converge a $+\infty$ cuando $n \to +\infty$. Luego no hay convergencia uniforme.

② Podemos preguntarnos en qué condiciones una sucesión de funciones continuas (f_n) ... en $[a,b]$ ... hacia una funci-

f puntualmente verifica que, de existir $\lim_n \int_a^b f_n$

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f$$

es decir si $\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_n f_n$, pues $\lim_n f_n = f$.

Esto, en general, no es cierto, si (f_n) no converge uniformemente hacia f. Consideremos la sucesion $(f_n)_n$ del apartado anterior. $(f_n)_n \to f$ puntualmente pero no uniformemente, siendo f la función nula en $[0,1]$. Entonces

$$\int_0^1 f = 0.$$

Pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 f_n = \int_0^{1/n} n^2 x \, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} -n^2\left(x - \frac{2}{n}\right) dx + \int_{\frac{2}{n}}^{1} 0 \, dx =$

$$= n^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/n} - n^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2}{n} x\right]_{\frac{1}{n}}^{2/n} =$$

$$= n^2 \left(\frac{1}{2n^2}\right) - n^2 \left(\frac{4}{2n^2} - \frac{4}{n^2} - \frac{1}{2n^2} + \frac{2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(2 - 4 - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Luego $\lim_n \int_0^1 f_n = 1$.

Por tanto, $\int_0^1 \lim_n f_n \neq \lim_n \int_0^1 f_n$

<u>2.4. TEOREMA</u>: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones definidas en $[a,b]$. Supongamos que:

① $f_n \in R([a,b])$, $\forall n \in \mathbb{N}$

② $(f_n)_n \longrightarrow f$ uniformemente en $[a,b]$.

Entonces se verifica que:

Ⓐ $f \in R([a,b])$

Ⓑ $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$

Demostr.: Ⓐ Probemos que $f \in R([a,b])$, o lo que es equivalente, según la condición (ε, P) de Riemann, que

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([a,b]) / U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$ consideremos un $\delta > 0$ tal que $\delta(b-a) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Si $(f_n) \to f$ uniformemente, para este $\delta > 0$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \delta$, $\forall x \in [a,b]$.

Luego si $n \geq n_0 \Rightarrow f_n(x) - \delta < f(x) < f_n(x) + \delta$, $\forall x \in [a,b]$

Tomemos un natural n fijo tal que $n \geq n_0$.
Por ①, $f_n \in R([a,b])$, luego
dado $\varepsilon/3 > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([a,b]) \,/\, \mathcal{U}(f_n,P) - \mathcal{L}(f_n,P) < \varepsilon/3$ (II)
Probemos, entonces, que para esta partición P, $\mathcal{U}(f,P) - \mathcal{L}(f,P) < \varepsilon$.
Supongamos que $P = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, entonces:

$$\mathcal{U}(f,P) = \sum_{i=1}^{m} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \cdot \Delta x_i$$

Según (I), $f(x) < f_n(x) + \delta$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) - \delta < \sup_{y\in[a,b]} f_n(y)$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x) < \sup_{y\in[a,b]} f_n(y) + \delta,\ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \sup_{y\in[a,b]} f(y) < \sup_{y\in[a,b]} f_n(y) + \delta$$

Entonces $\mathcal{U}(f,P) < \sum_{i=1}^{m} \delta \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_n(x) \Delta x_i = \delta(b-a) + \mathcal{U}(f_n,P)$

Por otro lado, $\mathcal{L}(f_n,P) = \sum_{i=1}^{m} \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f_n(x) \Delta x_i \overset{(I)}{<} \delta(b-a) + \mathcal{L}(f,P)$ (III)

Luego $\mathcal{U}(f,P) < \delta(b-a) + \mathcal{U}(f_n,P) \overset{(II)}{<} \delta(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{L}(f_n,P) \overset{(III)}{<}$

$$< \delta(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} + \delta(b-a) + \mathcal{L}(f,P)$$

Pero $\delta(b-a) < \frac{\varepsilon}{3}$. Luego, $\mathcal{U}(f,P) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \mathcal{L}(f,P) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathcal{U}(f,P) - \mathcal{L}(f,P) < \varepsilon.$$

Luego $f \in R([a,b])$

Ⓑ Probemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| < \varepsilon$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, $\forall x \in [a,b]$, pues $(f_n)_n \to f$ uniformemente.

Entonces, como $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f|$

se deduce que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Luego $\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$. c.s.q.d.

* Podemos preguntarnos si para una sucesión $(f_n)_n$ de funciones derivables en un compacto $[a,b]$ que converge uniformemente hacia una función f se verifica que $(f'_n)_n \to f'$ uniformemente en $[a,b]$.
Esto, en general, no es cierto, como se pone de manifiesto en el siguiente

Contraejemplo: Para cada natural n consideramos la función

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{\sqrt{n}}$$

Evidentemente, las funciones f_n son derivables en $[0,1]$ y se verifica que: $\forall x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ (I)

Si llamamos f a la función nula sobre $[0,1]$ se tiene que $(f_n)_n \longrightarrow f$ uniformemente en $[0,1]$, pues dado un $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$. Luego:

dado $\varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \overset{(I)}{\Rightarrow} \sup |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, $\forall x \in [0,1]$.

Veamos que, sin embargo, $(f'_n)_n$ no converge hacia f' ni siquiera puntualmente. $\forall x \in [0,1]$, $f'(x) = 0$, pues $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_n(x) = \frac{n}{\sqrt{n}} \cos nx = \sqrt{n} \cos nx$

Si $(f'_n)_n$ convergiese puntualmente hacia f' se verificaría que $\lim_n f'_n(0) = f'(0) = 0$, en particular. Pero:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f'_n(0) = \sqrt{n}$. Luego $\lim_n f'_n(0) = +\infty$

Por tanto, como $f'(0) = 0$ se deduce que $(f'_n)_n$ no converge puntualmente, y, por tanto, tampoco uniformemente, hacia f'.

No obstante:

2.5. TEOREMA: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones diferenciables en el intervalo compacto $[a,b]$. Supongamos que:

① $\exists x_0 \in [a,b]$ tal que la sucesión $(f_n(x_0))_n$ converge.

② $(f'_n)_n$ converge uniformemente en $[a,b]$.

Entonces se verifica que:

Ⓐ $(f_n)_n$ converge uniformemente hacia una función f.

Ⓑ $\forall x \in [a,b]$, $\lim_n f'_n(x) = f'(x)$.

Demostr.: Ⓐ Si $(f_n(x_0))_n$ es convergente en $\mathbb{R}$, es una sucesión de Cauchy. Luego, dado $\varepsilon/2 > 0$, $\exists n'_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n'_0 \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Además, si $(f'_n)_n$ converge uniformemente en $[a,b]$ verifica la condición de Cauchy de convergencia uniforme. Luego:

dado $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$, $\exists n_0'' \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0'' \Rightarrow |f_n'(t) - f_m'(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, $\forall t \in [a,b]$ (I

Sea $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$. Entonces dados dos naturales $n, m \geq n_0$ cualesquiera, siendo f_n y f_m derivables en $[a,b]$ por hipótesis, en virtud del teorema de los incrementos finitos aplicado a la función derivable $f_n - f_m$ se tiene que:

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))| = |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)|\,|x-t| \qquad (\mathrm{II})$$

y esto para cualquier par de puntos $x, t \in [a,b]$, con $\xi \in [a,b]$.

Pero $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, pues $n, m \geq n_0 \geq n_0''$.

y $|x-t| \leq b-a$. Luego:

$$|(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(t) - f_m(t))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x, t \in [a,b].$$

Entonces, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| <$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in [a,b]$$

Luego $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

Por tanto, la sucesión $(f_n)_n$ verifica el criterio de convergencia uniforme de Cauchy. Luego, existe una función f definida en $[a,b]$ tal que $(f_n)_n \longrightarrow f$ uniformemente.

B Se trata de probar que $\forall x \in [a,b]$, $\lim_n f_n'(x) = f'(x)$

Sea $x \in [a,b]$; para cada punto $t \in [a,b]$, $t \neq x$ definimos las funciones

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} \quad \text{y} \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x}$$

Como las f_n son derivables se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \to x} \phi_n(t) = \lim_{t \to x} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} = f_n'(x)$$

Por otro lado, $(f_n)_n \longrightarrow f$ uniformemente según A, luego, en particular, converge puntualmente. Por tanto.

$$\lim_n f_n(t) = f(t) \quad \text{y} \quad \lim_n f_n(x) = f(x)$$

Luego, $\forall t \in [a,b] - \{x\}$, $\lim_n \phi_n(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x} = \frac{f(t) - f(x)}{t-x} = \phi(t)$

Este límite, como hemos dicho, es puntual. Probemos que también es uniforme. Para ello probaremos que se verifica la condición de Cauchy de convergencia uniforme.

Según (I) y (II), para $n, m \geq n_0'''$ se tiene que, para un $\varepsilon > 0$ fijo

$$\left|[f_n(t) - f_m(t)] - [f_n(x) - f_m(x)]\right| < \varepsilon\, |t - x|$$

Entonces

$$n, m \geq n_0''' \Rightarrow |\phi_n(t) - \phi_m(t)| = \left|\frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x} - \frac{f_m(t) - f_m(x)}{t - x}\right| =$$

$$= \frac{1}{|t-x|}\left|[f_n(t) - f_n(x)] - [f_m(t) - f_m(x)]\right| =$$

$$= \frac{1}{|t-x|}\left|[f_n(t) - f_m(t)] - [f_n(x) - f_m(x)]\right| < \frac{1}{|t-x|}\varepsilon\,|t-x| = \varepsilon, \ \forall t \in [a,b] - \{x\}$$

Por tanto, $(\phi_n)_n$ satisface la condición de Cauchy en $[a,b] - \{x\}$, luego converge uniformemente en $[a,b] - \{x\}$. Como $(\phi_n)_n$ converge puntualmente hacia ϕ debe verificarse que

$$(\phi_n)_n \longrightarrow \phi \text{ uniformemente en } [a,b] - \{x\}.$$

x es un punto de acumulación de $[a,b] - \{x\}$; además, para todo natural n existe $\lim_{t \to x} \phi_n(t) = f_n'(x)$

Entonces, en virtud del TEOREMA 2.1, $\exists \lim_n f_n'(x)$ y su valor es:

$$\lim_n f_n'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x). \text{ csqd.}$$

<u>OBSERVACION</u>: Si, para enunciar un teorema análogo para la estabilidad de la diferenciabilidad a los teoremas 2.2 y 2.4, ponemos como hipótesis que $(f_n) \to f$ uniformemente se verifica trivialmente la hipótesis ① del teorema 2.5. Entonces, si se verifica ②, el teorema también es cierto si suprimimos ① por la hipótesis más fuerte de que $(f_n) \to f$ uniformemente.