TEMA 10º: SERIES NUMERICAS

1. DEFINICION

* Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales o complejos. A partir de esta sucesión construimos una nueva sucesión $(s_n)_n$ del siguiente modo: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., En general:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Cada término de esta nueva sucesión se dice una suma parcial y la sucesión $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se llama serie numérica de término general a_n.

* DEFINICIONES Se dice que la serie es convergente cuando la sucesión $(s_n)_n$ es convergente. En este caso, si s es el límite de $(s_n)_n$, s es, por definición, la suma de la serie. Se utiliza la notación:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Si la sucesión $(s_n)_n$ no converge o tiende a $\pm\infty$ se dice que la serie es divergente.

Aunque es un abuso de notación, la serie $(s_n)_n$, ya sea convergente o divergente, se acostumbra a representar por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

* El conjunto de las series numéricas convergentes sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Dadas dos series convergentes $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, y dos escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, se deduce de las propiedades de los límites y de la definición que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. Criterio de convergencia de Cauchy. Condición necesaria de convergencia de una serie

2.1. TEOREMA: (Criterio de convergencia de Cauchy).

Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales o complejos. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y solo si se verifica que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}$$

Demostr.: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sii la sucesión $(s_n)_n$ es convergente, siendo $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, y $(s_n)_n$ converge sii es una sucesión de Cauchy, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sii $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n,m\geq n_0 \Rightarrow |s_n - s_m|\leq \varepsilon$

o lo que es equivalente, si $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/ n\geq n_0 \Rightarrow |s_{n+p}-s_n|\leq \varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}$

pero $s_{n+p}-s_n = \sum_{k=1}^{n+p} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = a_{n+1}+\dots+a_{n+p}$

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sii $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|\leq\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}$. csqd.

2.2. TEOREMA: Condición necesaria de convergencia de una serie.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_n a_n = 0$.

Demostr.: Por el criterio de Cauchy, si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, se tiene para $p=1$ que $\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1}|\leq\varepsilon$

Luego $(a_n)_n \to 0$. csqd.

Ejemplos: Deducimos del teorema anterior que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente, pues de ser convergente sería $\lim_n n = 0$.

Sin embargo esta condición no es suficiente pues, como probaremos más adelante, la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente, aunque $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

3. Criterios de convergencia para series de términos positivos.

Recordemos un resultado del TEMA 3º que dice que: "Toda sucesión convergente está acotada" y "toda sucesión monótona creciente acotada superiormente es convergente".

Veamos a continuación una relación de criterios de convergencia de series.

3.1. TEOREMA: CRITERIO DE COMPARACION

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $a_n, b_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$.

Supongamos que existe una constante c tal que $a_n\leq c\, b_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

Entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.

Demostr.: Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Como $a_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$, se deduce que la sucesión $(s_n)_n$ es monótona creciente. Probemos ahora que todas las sumas parciales están acotadas superiormente, es decir, que

$\exists N>0 / s_n\leq N, \forall n\in\mathbb{N}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, por hipótesis, está acotada superiormente, es decir,

$$\exists M>0 \ / \ \sum_{k=1}^{n} b_k \leq M, \ \forall n\in\mathbb{N}$$

Como $a_n \leq c\, b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, se deduce que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \ \sum_{k=1}^{n} a_k \leq c \sum_{k=1}^{n} b_k \leq cM.$$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. csqd.

- Se deduce de este teorema que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tambien diverge.

<u>OBSERVACION</u>: En el teorema anterior podemos suprimir la hipótesis de que $a_n \leq c\, b_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$ por otra menos fuerte en la que solo exigiriamos que a_n sea menor o igual que $c\, b_n$ a partir de un cierto natural p.
Probemos que dada una sucesión $(a_n)_n$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si converge la serie $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$, es decir, que si suprimimos un número finito de términos de la sucesión la naturaleza de las series es la misma (convergen ó divergen, simultaneamente) aunque la suma de ambas series, caso de que converjan, no tiene porque ser la misma.
Para $n>p$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{p-1} a_k + \sum_{k=p}^{n} a_k$$

Como $\sum_{k=1}^{p-1} a_k \in \mathbb{K}$, por propiedades de los límites se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge sii } \sum_{n=p}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Entonces si $a_n \leq c\, b_n$, para $n\geq N$ se tiene por el teorema anterior que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

3.2. TEOREMA: CRITERIO DE COMPARACION POR PASO AL LIMITE

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones en $\mathbb{K}$ tales que $a_n\geq 0$ y $b_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$
Supongamos que $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$
Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sii converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Demostr.: Si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 1$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists N\in\mathbb{N} / n\geq N \Rightarrow \left|\frac{a_n}{b_n} - 1\right| < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}$

Siendo $b_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ se deduce que si

$n \geq N \Rightarrow \frac{1}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2} b_n$.

Entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, como $b_n \leq 2a_n$, para $n \geq N$, se deduce por el teorema anterior que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge

y si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, siendo $a_n \leq \frac{3}{2} b_n$, para $n \geq N$, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. csqd.

OBSERVACION: – Si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pues

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c b_n} = 1 \Rightarrow \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c b_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge}\right]$.

– Si $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0$ entonces, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge se verifica que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, pues, para n suficientemente avanzado

$\frac{a_n}{b_n} \leq 1 \Rightarrow a_n \leq b_n$. Luego si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

El recíproco no es cierto. Veamos un contraejemplo

Sea $a_n = \frac{1}{n^2}$ y $b_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{1}{n} = 0$

Sin embargo, como probaremos más adelante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no converge.

3.3. TEOREMA: CRITERIO DE LA INTEGRAL.

Sea $f: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función positiva y decreciente. Para cada natural n llamamos

$$s_n = \sum_{K=1}^{n} f(K) \quad \text{y} \quad t_n = \int_1^n f$$

Entonces, la serie $(s_n)_n$ converge si y solo si converge la sucesión (t_n)

Demostr.: Siendo f monótona, para cada natural n existe $\int_1^n f$.

Por ser f decreciente, el máximo de f en el compacto $[m, m+1]$ es $f(m)$ y el mínimo es

$\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ es la suma superior de f para la partición $P = \{1, 2, ..., n\}$ pues la longitud de cada intervalo de la partición $[m, m+1]$ es 1 y el máximo de la función en dicho intervalo es $f(m)$. Luego:

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f$$

Análogamente, $\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n} f(k)$ es la suma inferior de f con respecto a P. Luego:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f$$

Pero $\sum_{k=2}^{n} f(k) = s_n - f(1)$ y $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = s_{n-1}$

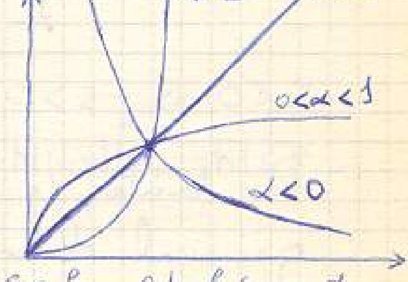
Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n - f(1) \leq \int_1^n f \leq s_{n-1}$, o bien, $s_n - f(1) \leq t_n \leq s_{n-1}$.

La sucesión $(s_n)_n$ es creciente, pues f es positiva, luego si $(t_n)_n$ converge, la serie $(s_n)_n$ converge, pues si $s_n - f(1) \leq t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(s_n - f(1))_n$ converge y, por tanto, $(s_n)_n$ converge ya que $f(1) \in \mathbb{R}$.

Análogamente, la sucesión $(t_n)_n$ es creciente por ser f positiva. Luego si $(s_n)_n$ converge se verifica que (t_n) converge pues $t_n \leq s_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. [(t_n) converge por ser creciente y acotada]. c.s.q.d.

EJEMPLOS: ① Estudiemos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbb{R}$.

Consideremos la función $f(x) = x^{-s}$



Gráficas de las funciones x^α

- Caso en que $s > 1$: Si $s > 1 \Rightarrow -s < -1$.

Luego $f(x) = x^{-s}$ es una función monótona decreciente y positiva en $[1, +\infty[$. Entonces podemos aplicar el criterio de la integral:

$$t_n = \int_1^n x^{-s}\, dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right]_1^n = \frac{1}{1-s}\left[n^{1-s} - 1\right]$$

Siendo $s > 1 \Rightarrow 1 - s < 0$. Luego $\lim_{n\to\infty} n^{1-s} = 0$.

Por tanto, $\lim_n t_n = \frac{-1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$. Luego $(t_n)_n$ converge

Por tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ converge siempre que $s > 1$

- <u>Caso en que $s=1$</u>. Entonces $f(x)=\frac{1}{x}$
Esta función es positiva y decreciente en $[1,+\infty[$.
Entonces, podemos aplicar criterio de la integral.

$$t_n=\int_1^n \frac{dx}{x}=\log n$$

$\lim_n t_n=+\infty$. Por tanto, (t_n) no es convergente en $\mathbb{R}$. Luego la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

- <u>Caso en que $0<s<1$</u>: Entonces $-1<-s<0$
Por tanto la función $f(x)=x^{-s}$ es decreciente y positiva en $[1,+\infty[$. Entonces, podemos aplicar el criterio de la integral:

$$t_n=\int_1^n x^{-s}\,dx=\frac{1}{1-s}\left(n^{1-s}-1\right)$$

$s<1 \Rightarrow 1-s>0$. Luego $\lim_n n^{1-s}=+\infty \Rightarrow \lim_n t_n=+\infty$.

Luego si $0<s<1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ no converge.

- <u>Caso en que $s=0$</u>: Entonces $\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=n$.
Luego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ diverge.

- <u>Caso en que $s<0$</u>: Si $s<0$, $f(x)=x^{-s}$ es creciente. Luego no podemos aplicar el criterio de la integral.
Sin embargo sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ diverge pues

$$s<0 \Rightarrow -s>0 \Rightarrow \lim_n n^{-s}=+\infty$$

Por tanto, la serie no converge, pues si convergiese, el término general debería converger a 0.

② <u>SERIE GEOMETRICA</u>: Se llama serie geométrica a una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}x^n$ con $0\leq x$.

La serie geométrica converge si $0\leq x<1$ y diverge si $x\geq 1$.

Sea $S_n=\sum_{k=1}^{n}x^k$. Entonces $xS_n=\sum_{k=2}^{n+1}x^k$

Luego $xS_n-S_n=x^{n+1}-x$, y por tanto:

$$S_n=\frac{x^{n+1}-x}{x-1}=\frac{x^{n+1}}{x-1}-\frac{x}{x-1}$$

Si $0 \leq x < 1$, $\lim_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_n s_n = -\frac{x}{x-1} = \frac{x}{1-x}$

Si $x = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = n$. Luego $(s_n)_n$ diverge.

Si $x > 1$, $\lim_n x^{n+1} \pm +\infty \Rightarrow \lim_n s_n = +\infty$. Luego $(s_n)_n$ diverge.

3.4. TEOREMA: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos

a) Si existe un natural N tal que para todo $n \geq N$, $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, con $0<r<1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $\exists r \geq 1 \wedge \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq r$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Demostr.: a) Si $0<r<1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es convergente.

Entonces, $\forall n \geq N, \sqrt[n]{a_n} \leq r \Rightarrow a_n \leq r^n$

Luego, por comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $r \geq 1$, la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es divergente.

Como $\forall n \geq N$, $a_n \geq r^n$, se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente. c.s.q.d.

3.5. TEOREMA: CRITERIO DE LA RAIZ.

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos. Supongamos que existe en $\mathbb{R}$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$

Entonces:

a) Si $R < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $R > 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Demostr.: a) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = R < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow |\sqrt[n]{a_n} - R| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq R + \varepsilon$.

Siendo $R < 1$, $\exists \varepsilon > 0 / R + \varepsilon < 1$. Sea $r = R + \varepsilon$.

Entonces $\exists r < 1 \wedge \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq r$

Luego, por el teorema anterior, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = R \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq R - \varepsilon$

Siendo $R > 1$, $\exists \varepsilon > 0 / R - \varepsilon \geq 1$. Sea $r = R - \varepsilon$.

Entonces $\exists r \geq 1 \wedge \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq r$.

Por el teorema anterior, $\sum a_n$ diverge. c.s.q.d.

OBSERVACION: Si en el teorema anterior $R=1$, es indecidible la naturaleza de la serie y hay que recurrir a otros criterios.

- Ejemplo: Sabemos que $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

Entonces $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$ y $\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

EJEMPLO: La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$ es convergente pues

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{(\log n)^n}} = \lim_n \frac{1}{\log n} = 0 < 1$$

3.6. TEOREMA: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos.

a) Si $\exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, con $0<r<1$

entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

b) Si $\exists r \geq 1 \wedge \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demostr.:

a) Si $n \geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r = \frac{r^{n+1}}{r^n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \frac{a_n}{r^n}$

En particular, si $n \geq N$, $\frac{a_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \frac{a_N}{r^N}$

Sea $K = \frac{a_N}{r^N} \in \mathbb{R}$.

Entonces, si $n \geq N \Rightarrow a_{n+1} \leq K r^{n+1}$

Siendo $0<r<1$, la serie geométrica $\sum_{n=1} r^{n+1}$ converge. Luego, también es convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} K r^{n+1}$. Luego, por comparación, también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Análogo.

3.7. TEOREMA: CRITERIO DEL COCIENTE

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos no nulos. Supongamos que existe $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = R \in \mathbb{R}$. Entonces:

a) Si $R<1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Si $R>1$, la serie es divergente.

Demostr.: a) $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = R \Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N} / n\geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq R+\varepsilon$

Siendo $R<1$, $\exists \varepsilon>0 / R+\varepsilon<1$. Sea $r=R+\varepsilon$.

Luego, si $n\geq N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$, con $0<r<1$

Por el teorema anterior, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

b) Análogo.

<u>OBSERVACION</u>: Si en el teorema anterior $R=1$, la naturaleza de la serie es indecidible.

<u>Ejemplo</u>: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

Sin embargo $\lim_n \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1$ y $\lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$

<u>EJEMPLO</u>: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge

pues $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \lim_n \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)(n+1)^n} =$

$$= \lim_n \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_n \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

4. CONVERGENCIA ABSOLUTA DE SERIES

Estudiaremos la convergencia absoluta de series en $\mathbb{C}$, con lo cual quedará también estudiada la convergencia absoluta de series de números reales.

<u>4.1. TEOREMA</u>: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y se verifica que $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Demostr.: Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, en virtud del criterio de convergencia de Cauchy,

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow |s_{n+p}-s_n| \leq \varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}$

siendo $s_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Entonces para $n\geq n_0$, $\left|\sum_{k=1}^{n+p} |a_k| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|\right| < \varepsilon$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es una serie de términos positivos, luego la sucesión de sumas parciales es creciente. Por tanto:

Para una suma finita siempre se verifica que: $|\sum_{i=1}^{n} x_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Luego

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k| \leq \varepsilon$.

que prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Además $|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| = |\lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k| = \lim_n |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq$

$\leq \lim_n \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. csqd.

DEFINICION: Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente. A las series que no son absolutamente convergentes se les llama series condicionalmente convergentes.

OBSERVACIONES: ① Si una serie es absolutamente convergente, es convergente, según hemos probado antes; el recíproco, en general, no es cierto. Probaremos después que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es convergente; sin embargo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ no es convergente, como sabemos.

② Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de números complejos (ó reales) podemos estudiar su convergencia mediante los criterios expuestos en el apartado 3 para series de términos positivos. Para ello se estudia la naturaleza de la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ mediante dichos criterios, y si es convergente, la serie dada es convergente o, aun más, absolutamente convergente. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge, en principio, no podemos afirmar nada para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4.2. TEOREMA: (Fórmula de sumación parcial de Abel.)

Sean $(a_k)_k$ y $(b_k)_k$ dos sucesiones de números complejos. Llamamos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $A_0 = 0$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$$

Demostr.: Si $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ y $A_0 = 0$ tenemos que

$\forall k \in \mathbb{N}, \; a_k = A_k - A_{k-1}$.

Entonces $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k =$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_k b_{k+1} + A_n b_{n+1} =$$

$$= A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1}) \ . \quad \text{csqd.}$$

4.3. TEOREMA: (CRITERIO DE DIRICHLET)

Sea $\sum_{n=1} a_n$ una serie de números complejos tal que la sucesión $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_n$ está acotada. Sea $(b_n)_n$ una sucesión de números reales decreciente y con límite cero. Entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente.

Demostr.: Si hacemos $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ tenemos, por hipótesis, que la sucesión $(A_n)_n$ está acotada. Es decir $\exists M>0 / |A_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$.
Como $(b_n)_n \to 0$, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |b_{n+1}| \leq \frac{\varepsilon}{M}$

Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |A_n b_{n+1}| \leq M |b_{n+1}| \leq \varepsilon$

Luego $(A_n b_{n+1})_n \to 0$.
Probemos ahora que $\left(\sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})\right)_n$ es convergente con lo cual, siendo $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k (b_k - b_{k+1})$, se verificará que $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)_n$ converge, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ será convergente.

Probaremos para ello que $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}|$ es convergente, con lo cual $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ será absolutamente convergente.

Pero $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$

Entonces, si $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ converge, también converge $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}|$.

Siendo $(b_n)_n$ decreciente, $|b_k - b_{k+1}| = b_k - b_{k+1}$. Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = \lim_{n} \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) =$$

$$= \lim_{n} (b_1 - b_{n+1}) = b_1 .$$

Por tanto $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq M b_1 \in \mathbb{R}$. Luego $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ es convergente (absolutamente) y, por tanto, como se indicó anteriormente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente. csqd.

4.4. TEOREMA: CRITERIO DE ABEL

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente y $(b_n)_n$ una sucesión decreciente y convergente de números reales. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente

Demostr.: Si llamamos, como en los teoremas anteriores, A_n a $\sum_{k=1}^{n} a_k$ siendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente se deduce que $(A_n)_n$ es convergente.

Además $(b_n)_n$ es convergente. Luego $(A_n \cdot b_{n+1})_n$ es convergente.

Probemos que $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente; es más: es absolutamente convergente.

$(A_n)_n$ es convergente, luego está acotada. Es decir, $\exists M > 0 / |A_n| \leq M, \forall n$.

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| =$

$= M \lim_n \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = M \lim_n \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})$, pues $(b_n)_n$ es decreciente.

Luego $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| |b_k - b_{k+1}| \leq M \lim_n (b_1 - b_{n+1}) = M(b_1 - \lim_n b_{n+1}) \in \mathbb{R}$

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_n \left(A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})\right)$ es convergente. csqd.

5. Series alternadas

5.1. TEOREMA Sea θ un número real distinto de $k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\theta k} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} e^{i(n+1)\theta}$$

y $$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\theta k}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|}$$

Demostr.: Sea x un número complejo, $x \neq 1$. Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$

Entonces $x S_n - x = \sum_{k=2}^{n+1} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k = x^{n+1} - x$

Luego $S_n = \sum_{k=1}^{n} x^k = x \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$ (I)

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, para $x = e^{2i\theta}$ se tiene $x \neq 1$ y $|x| = 1$. Recordemos que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

4.4. TEOREMA: CRITERIO DE ABEL

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente y $(b_n)_n$ una sucesión decreciente y convergente de números reales. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ es convergente

Demostr.: Si llamamos, como en los teoremas anteriores, A_n a $\sum_{k=1}^{n} a_k$ siendo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergente se deduce que $(A_n)_n$ es convergente.

Además $(b_n)_n$ es convergente. Luego $(A_n \cdot b_{n+1})_n$ es convergente.

Probemos que $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente; es más: es absolutamente convergente.

$(A_n)_n$ es convergente, luego está acotada. Es decir, $\exists M > 0 / |A_n| \leq M, \forall n$.

Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| =$

$= M \lim_n \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = M \lim_n \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})$, pues $(b_n)_n$ es decreciente.

Luego $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| \leq M \lim_n (b_1 - b_{n+1}) = M(b_1 - \lim_n b_{n+1}) \in \mathbb{R}$

Por tanto $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(b_n - b_{n+1})$ es absolutamente convergente.

Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \lim_n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \lim_n \left(A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k(b_k - b_{k+1})\right)$ es convergente. csqd.

5. Series alternadas

5.1. TEOREMA Sea θ un número real distinto de $k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} e^{2i\theta k} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta} e^{i(n+1)\theta}$$

y $$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{2i\theta k}\right| \leq \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|}$$

Demostr.: Sea x un número complejo, $x \neq 1$. Sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} x^k$

Entonces $x s_n - x = \sum_{k=2}^{n+1} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k = x^{n+1} - x$

Luego $s_n = \sum_{k=1}^{n} x^k = x \frac{x^n - 1}{x - 1}$ (I)

Sea $\theta \in \mathbb{R} - \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, para $x = e^{2i\theta}$ se tiene que $x \neq 1$ y $|x| = 1$. Recordemos que $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$

Entonces según (I):

$$\sum_{K=1}^{n} e^{2i\theta K} = e^{2i\theta}\,\frac{e^{2i\theta n}-1}{e^{2i\theta}-1} \qquad (\text{II})$$

que podemos escribir también en la forma:

$$\sum_{K=1}^{n} e^{2i\theta K} = \frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\, e^{i(n+1)\theta} \qquad (\text{III})$$

pues $\dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}\, e^{i(n+1)\theta} = \dfrac{e^{in\theta}-\frac{1}{e^{in\theta}}}{e^{i\theta}-\frac{1}{e^{i\theta}}}\, e^{i(n+1)\theta} =$

$$= \frac{\frac{e^{2in\theta}-1}{e^{in\theta}}}{\frac{e^{2i\theta}-1}{e^{i\theta}}}\, e^{i(n+1)\theta} = \frac{e^{2in\theta}-1}{e^{2i\theta}-1}\,\frac{e^{i\theta}}{e^{in\theta}}\, e^{in\theta} e^{i\theta} =$$

$= e^{2i\theta}\,\dfrac{e^{2in\theta}-1}{e^{2i\theta}-1}$ expresión que coincide con (II)

Por la fórmula de Euler sabemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Entonces según (III): $\displaystyle\sum_{K=1}^{n} e^{2i\theta K} = \frac{\operatorname{sen} n\theta}{\operatorname{sen}\theta}\, e^{i(n+1)\theta}$

Además siendo $|e^{i(n+1)\theta}| = |\cos(n+1)\theta + i\operatorname{sen}(n+1)\theta| = \cos^2(n+1)\theta+\operatorname{sen}^2(n+1)\theta = 1$ y $|\operatorname{sen} n\theta| \le 1$ se tiene que

$$\left|\sum_{K=1}^{n} e^{2i\theta K}\right| \le \frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|} \qquad \text{csqd.}$$

OBSERVACIÓN: Se deduce, entonces, de este teorema que dado un número complejo x, $x \neq 1$ y $|x|=1$, y una sucesión $(b_n)_n$ decreciente de números reales y con límite cero, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ es convergente, pues la sucesión $(A_n)_n$, $A_n = \sum_{K=1}^{n} x^n$, está acotada por $\frac{1}{|\operatorname{sen}\theta|}$ según el teorema anterior; entonces, por el teorema de Dirichlet, queda probado que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ es convergente.

5.2. TEOREMA: (DE LEIBNITZ)

Sea $(b_n)_n$ una sucesión decreciente de números reales con límite cero. Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

La demostración es trivial, pues el número complejo $x=-1$ verifica que $x \neq 1$ y $|x|=1$. Entonces según lo dicho anteriormente

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$$

es convergente. csqd.

* SERIES ALTERNADAS:

DEFINICION: Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales positivos. Se llama serie alternada a una serie de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ó} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Ejemplo: La serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ es convergente en virtud del teorema de Leibnitz.

* El teorema de Leibnitz lo podemos enunciar también en los siguientes términos: "Si $(b_n)_n$ es una sucesión decreciente de números reales con límite cero, entonces la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ es convergente."

* Sabemos que una sucesión de números complejos converge sii convergen las sucesiones de las partes reales y las partes imaginarias. Se deduce inmediatamente de esto que una serie de números complejos converge sii convergen las partes real e imaginaria.

Ejemplo: Sabemos que si $\theta \neq 2K\pi$ y si $(b_n)_n$ es una sucesión decreciente de números reales con límite cero entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{i\theta n}$ es convergente

Siendo $b_n e^{i\theta n} = (b_n \cos n\theta) + i(b_n \operatorname{sen} n\theta)$ tenemos, según lo anterior, que las series de números reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\theta$$

son convergentes.