TEMA 11º: SERIES FUNCIONALES

1. DEFINICION. PRIMERAS PROPIEDADES

Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $(f_n)_n$ una sucesión de funciones de $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ llamaremos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{F}(E;\mathbb{R}).$$

Consideremos, entonces, la sucesión de sumas parciales $(S_n)_n$. Decimos entonces que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

es uniformemente convergente en E hacia una función $f \in \mathcal{F}(E;\mathbb{R})$ si $(S_n)_n$ converge uniformemente en E hacia f.

1.1. TEOREMA: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones continuas de $\mathcal{F}(E;\mathbb{R})$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E hacia f, entonces f es continua

Demostr.: $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k es continua. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ es continua.

Como $(S_n)_n$ converge uniformemente hacia f, entonces según Teorema 2.2., Tema 9º, f es continua en E. c.s.q.d.

1.2. TEOREMA: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones integrables Riemann en el compacto $[a,b]$ de modo que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente hacia f en $[a,b]$. Entonces, f es integrable Riemann en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

Demostr.: $[\forall k \in \mathbb{N},\ f_k \in \mathcal{R}([a,b])] \Rightarrow [\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{R}([a,b])]$

Como $(S_n)_n \longrightarrow f$ uniformemente en $[a,b]$, según Th. 2.4, tema 9º, f es integrable Riemann en $[a,b]$.

Además
$$\int_a^b f = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_a^b \lim_n S_n = \lim_n \int_a^b S_n =$$
$$= \lim_n \int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n \quad \text{c.s.q.d.}$$

* Para funciones diferenciables podemos enunciar un teorema análogo.

2. Criterio de convergencia de Cauchy para series funcionales.

2.1. TEOREMA: Una serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es uniformemente convergente en E si y solo si
$$\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|\leq\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in E.$$

Demostr.: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ converge uniformemente en } E\right) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \left((s_n)_n \text{ converge uniformemente en } E\right) \overset{Th.1.3.\,(Tema\ 9°)}{\Longleftrightarrow}$

$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0 \Rightarrow |s_{n+p}(x)-s_n(x)|\leq\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in E\right) \Leftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right|\leq\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in E\right)$. csqd.

3. Criterio de convergencia uniforme de Weierstrass

3.1. TEOREMA: Una serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en $E\subset\mathbb{R}$ si existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente de números positivos tales que $|f_n(x)|\leq M_n, \forall x\in E, \forall n\in\mathbb{N}$.

Demostr.: Si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ es convergente se verifica que
$$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \leq \varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}$$
Entonces $\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}/n\geq n_0 \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| \leq$
$$\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k \leq\varepsilon, \forall p\in\mathbb{N}, \forall x\in E.$$
Entonces, por el criterio de convergencia de Cauchy, queda probado el teorema.

OBSERVACIONES: ① Si $|f_n(x)|\leq M_n, \forall x\in E$, a partir de un natural N, es decir si $|f_n(x)|\leq M_n, \forall x\in E, \forall n\geq N$, el teorema sigue siendo cierto con solo tomar, para la demostración del mismo, $n\geq\max\{n_0, N\}$.

② Si las funciones f_n son funciones complejas de variable real, los teoremas anteriores siguen siendo ciertos.

4. SERIES DE POTENCIAS: Círculo y radio de convergencia

Estudiaremos la series de potencias en el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Como caso particular quedarán estudiadas las series de potencias en $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN: Consideremos para cada natural n la función compleja

$$f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto a_n(z-a)^n$$

siendo $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{C}$. Entonces, una serie funcional de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad (I)$$

se llama serie de potencias.

Al conjunto de números complejos z que sustituidos en (I) nos dan una serie convergente le llamaremos campo de convergencia de la serie de potencias (I). Este campo de convergencia, que evidentemente contiene al punto a, será un subconjunto del plano complejo. Cuando la serie de potencias sea real, el campo de convergencia será un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Consideremos los siguientes ejemplos

EJEMPLOS: ① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

Si llamamos $a_n = \frac{z^n}{n!}$, para un z fijo, el criterio del cociente nos garantiza que si existe $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = R$ y $R<1$, la serie converge absolutamente, y si $R>1$, la serie diverge, no pudiendo asegurar nada para el caso $R=1$.

Veamos, entonces, qué vale, para un z fijo, $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$

$$\lim_n \frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim_n \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{|z|}{n} = 0, \text{ esto si } |z| \neq 0$$

Si $|z| = 0$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0}{n!} = 0$

Como $\forall z \in \mathbb{C}-\{0\}$, $\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 < 1$

la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ es absolutamente convergente en $\mathbb{C}$.

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^n$

Aplicando nuevamente el criterio del cociente, como $\lim_n \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = |z|$

si $|z|<1$, la serie es absolutamente convergente; si $|z|>1$, la serie es divergente; si $|z|=1$, el criterio no dice nada, pero si $z=1$, $\lim_n z^n \neq 0$, luego la serie es divergente, pues de ser convergente, el término general convergería, necesariamente, a cero.

Luego, la serie es absolutamente convergente [illegible] complejo cuyo módulo sea menor que 1, es decir, para aquellos complejos situados en el interior del círculo unidad.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ Aplicando el criterio del cociente y siendo

$$\lim_n \frac{|z|^{n+1}/n+1}{|z|^n/n} = \lim_n |z| \frac{n}{n+1} = |z|$$

se deduce que, si $|z|<1$ la serie es absolutamente convergente; si $|z|>1$, la serie es divergente y si $|z|=1$, el criterio no dice nada. Estudiemos este caso por separado:

Si $|z|=1 \wedge z=1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que es divergente

Si $|z|=1 \wedge z \neq 1$, la serie converge por el criterio de Dirichlet y la OBSERVACION del aptdo 5 del tema anterior, pues $(\frac{1}{n})_n$ es decreciente y converge a cero.

Por tanto, la serie es convergente en el interior del círculo unidad y en la frontera, excepto en el punto $(1,0)$. En este punto y en el exterior del círculo, la serie diverge.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. Como $\lim_n \frac{|z|^{n+1}/(n+1)^2}{|z|^n/n^2} = \lim_n |z| \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = |z|$

si $|z|<1$, la serie es absolutamente convergente y si $|z|>1$, la serie es divergente. Estudiemos el caso en que $|z|=1$.

- Si $z=1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ que es convergente
- Si $z \neq 1$, como $\lim_n \frac{1}{n^2} = 0$, y $(\frac{1}{n^2})$ es decreciente la serie es convergente por el criterio de Dirichlet

Por tanto, esta serie converge en el interior y frontera del círculo unidad y diverge en el exterior.

* Observamos que en los ejemplos anteriores existe un círculo (que puede ser degenerado, es decir, que sea $\mathbb{C}$ o $\{\bar{0}\}$) en el interior del cual la serie es convergente. Probaremos después que toda serie de potencias admite un círculo de convergencia, y por tanto un radio de convergencia, que puede ser degenerado ($+\infty$ ó 0) en el interior del cual la serie converge y en cuyo exterior, la serie diverge. Entonces

4.1. TEOREMA: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias y supongamos que existe un complejo $z_1 \neq 0$ de modo que la serie ...

numérica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ es convergente. Entonces:

a) En todo círculo de centro el punto $(0,0)$ y de radio $R<|z_1|$ la serie es uniformemente convergente.

b) Para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z|<|z_1|$, la serie es absolutamente convergente

Demostr.: a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge, necesariamente $\lim_n a_n z_1^n = 0$.

Entonces $\forall \varepsilon>0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow |a_n z_1^n| < 1$
$\varepsilon = 1$

Siendo $z_1 \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|a_n z^n| = |a_n z^n| \dfrac{|z_1^n|}{|z_1|^n} = |a_n z_1^n| \left|\dfrac{z}{z_1}\right|^n$

Consideremos el círculo de centro el origen y radio $R<|z_1|$, es decir

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq R < |z_1|\}$$

Si $|z| \leq R$, $|a_n z^n| \leq |a_n z_1^n| \left|\dfrac{R}{z_1}\right|^n \leq \left|\dfrac{R}{z_1}\right|^n$, para $n \geq n_0$

Si hacemos $t = \dfrac{R}{|z_1|}$, $t<1$, pues $R<|z_1|$

Siendo $t<1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ es convergente.

Como $|a_n z^n|$ está acotado por t^n para $n \geq n_0$ y $|z| \leq R$, se deduce, por el criterio de convergencia de Weierstrass que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ es uniformemente convergente.

b) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z|<|z_1|$. Entonces, para $n \geq n_0$

$$|a_n z^n| < \left|\frac{z}{z_1}\right|^n$$

Sea $t = \left|\dfrac{z}{z_1}\right| < 1$. Entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ es convergente.

Entonces, como a partir de n_0, los términos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ están acotados por t^n, dicha serie es absolutamente convergente (pues $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ es convergente) c.s.q.d.

4.2. Teorema: Existencia del círculo de convergencia

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Supongamos que existe $z_1 \in \mathbb{C}-\{0\}$ tal que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge; supongamos también que existe un punto z_2 en el cual la serie es divergente. Entonces existe un número real $r>0$ tal que si $|z|<r$ la serie es convergente absolutamente y si $|z|>r$ la serie es divergente.

Demostr.: Consideremos el subconjunto de $\mathbb{R}$ siguiente:

$A = \{|z| \,/\, z\in\mathbb{C} \wedge \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge}\}$

Este conjunto es no vacío pues $|z_1|\in A$. Además está acotado superiormente por $|z_2|$, ya que $\forall |z|\in A$, $|z|\leq |z_2|$, pues de existir $|z|\in A \wedge |z|>|z_2|$ siendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente, por el teorema anterior convergería $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ en contra de la hipótesis.

Sea, entonces, $r=\sup A$; $r>0$, pues $|z_1|\in A$ y $|z_1|>0$ ya que $z_1\neq 0$.
Entonces:

a) Si $|z|>r$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es divergente, pues de ser convergente, se tendría que $|z|\in A$, lo cual contradice que $r=\sup A$.
Por tanto, si $|z|>r$, la serie es divergente.

b) Hay que probar que si $|z|<r$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente.

Sea $\varepsilon = r-|z|>0$. Siendo $r=\sup A$, existe $|z_0|\in A$ tal que $r-\varepsilon = |z|<|z_0|$.

Si $|z_0|\in A$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ es convergente. Entonces, por el teorema anterior, siendo $|z|<|z_0|$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es absolutamente convergente. csqd.

OBSERVACIONES: ① Hemos probado la existencia del círculo de convergencia para una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Para una serie de potencias de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ también existe un círculo de convergencia centrado en el punto a, pues haciendo $Z=z-a$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$ admite un círculo de convergencia centrado en el origen $\{Z\in\mathbb{C} / |Z|<r\} = \{z\in\mathbb{C}/ |z-a|<r\}$, que es un círculo de radio r centrado en el punto a.

② Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ es una serie de potencias en $\mathbb{R}$ ($a_n, x, a\in\mathbb{R}$), el círculo de convergencia de la serie degenera en un intervalo abierto centrado en el punto a y de radio el radio de convergencia.

4.3. TEOREMA: Sea $r\in\mathbb{R}$ el radio de convergencia de una serie de potencias en $\mathbb{R}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Sea $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, $\forall x\in\,]a-r, a+r[$. Entonces, f es continua en todo punto de $]a-r,a+r[$ y f se puede integrar, término a término, en todo intervalo contenido en $]a-r, a+r[$

Demostr.: - Sea $x_0 \in]a-r, a+r[$. Siempre podemos encontrar un intervalo compacto I centrado en el punto x_0 y contenido en $]a-r, a+r[$. Como la serie es uniformemente convergente en todo intervalo compacto contenido en $]a-r, a+r[$, en virtud del teorema 4.1 y teniendo en cuenta la observación ① anterior, la serie converge uniformemente en I. Como las funciones $a_n(x-a)^n$ son continuas en x_0, en virtud del teorema 1.1., la función f es continua en x_0.

- Análogamente, como la serie converge uniformemente en todo intervalo compacto contenido en $]a-r, a+r[$ y las funciones $a_n(x-a)^n$ son integrables en todo intervalo compacto de $\mathbb{R}$, se deduce que f es integrable Riemann en todo intervalo compacto contenido en el intervalo de convergencia de la serie (Th. 1.2). c.s.q.d.

4.4. TEOREMA: Sea $r \in \mathbb{R}$ el radio de convergencia de una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ en $\mathbb{R}$. Definimos para cada $x \in]a-r, a+r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Entonces: ① La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ tiene como intervalo de convergencia $]a-r, a+r[$.

② f tiene derivada en $]a-r, a+r[$ y $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$.

Demostr.: ① Consideremos una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$; probaremos para esta serie que $]-r, r[$ es el círculo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ se deduce fácilmente, una vez probado lo anterior, que la serie de las funciones derivadas tiene como intervalo de convergencia $]a-r, a+r[$.

Probemos, entonces, que si $x \in]-r, r[$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ es absolutamente convergente y si $x \notin [-r, r]$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ es divergente.

Tengamos presente que una combinación lineal de dos series absolutamente convergentes es absolutamente convergente, pues
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha a_n + \beta b_n| \leq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + \beta \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|,$$ caso de que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ converjan.

Sea entonces $x \in]-r, r[$ y supongamos que $x > 0$ (si fuese $x < 0$ se razona análogamente y si $x = 0$, el problema es trivial).
Siendo $0 < x < r$, $\exists h > 0 / 0 < x < x+h < r$. Como x y $x+h$ pertenecen al intervalo de convergencia, podemos escribir:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}[a_n(x+h)^n-a_nx^n]}{h}=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{h}[(x+h)^n-x^n] \qquad (\mathrm{I})$$

La función potencial x^n es derivable en el compacto $[x,x+h]$; entonces, por el teorema de los incrementos finitos, existe $c_n\in]x,x+h[$ tal que

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nc_n^{n-1} \quad , \text{pues } (x^n)'=nx^{n-1}$$

Por tanto $(x+h)^n-x^n=hnc_n^{n-1}$. Entonces, según (I)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{n=0}^{\infty}na_nc_n^{n-1}$$

Esta serie es absolutamente convergente, como combinación lineal de series absolutamente convergentes

Siendo $x<c_n$ se verifica que $\sum_{n=0}^{\infty}|na_nx^{n-1}|\leq\sum_{n=0}^{\infty}|na_nc_n^{n-1}|$

Por tanto, $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ es absolutamente convergente.

Luego, en $]-r,r[$, $\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$ es absolutamente convergente.

Sea $x\notin[-r,r]$, entonces $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ no es convergente. Si $a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ fuese convergente, también convergería $a_1+a_2x+a_3x^2+\dots$ y de aquí se deduciría que la serie $a_0+x(a_1+a_2x+\dots)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ sería convergente en contra de que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ no converge en $[-r,r]$.

Por tanto, el círculo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ es $]-r,r[$.

② Sea $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}$, $\forall t\in]-r,r[$

Por el teorema anterior podemos integrar término a término de la serie en todo intervalo compacto contenido en $]-r,r[$

Sea $x\in]0,r[$. Entonces:

$$\int_0^x g(t)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_n\int_0^x t^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n-a_0=f(x)-a_0$$

Como g es continua en $]-r,r[$, $f(x)-a_0$ es derivable y

$$f'(x)=D[f(x)-a_0]=D\left[\int_0^x g(t)\right]=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

5. SERIES DE TAYLOR

Se trata de estudiar en qué condiciones una función real o compleja de variable real puede expresarse como suma de una serie de potencias dentro del intervalo de convergencia de ésta.

Sea f una función real o compleja definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y que es de clase infinita (infinitamente derivable) en I. Supongamos que existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ de modo que $a \in I$, el radio de convergencia sea $r > 0$ y tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad , \quad \forall x \in I \cap]a-r, a+r[.$$

Se verifica, entonces, $f(a) = a_0$, $f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots, \ldots,$
$f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (n+1)n \cdots 3 \cdot 2 \cdot (x-a) + \ldots$

Luego $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f^{(n)}(a) = n!\, a_n$.

Entonces, si una función es desarrollable en serie de potencias de $x-a$ en un entorno de a, y la función admite derivadas de todos los órdenes en un entorno de a y los coeficientes están univocamente determinados por la función y valen

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

En este caso, sería $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. A esta serie se le llama serie de Taylor.

Esta condición es, entonces, necesaria para que f pueda expresarse como suma de una serie de potencias. Sin embargo, no es suficiente, como demuestra el ejemplo siguiente: Consideremos la función $f(x) = e^{-\frac{a^2}{(x^2-a^2)}}$ si $|x| < a$ y $f(x) = 0$ si $|x| \geq a$. Esta función admite derivadas de todos los órdenes en el punto a y se verifica que $f^{(n)}(a) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$; sin embargo, esta función no es representable como serie de potencias en ningún entorno de a, pues de serlo, sería $f(x) = 0$, para todo x perteneciente a un cierto entorno de a, lo cual no es cierto, pues considerando un punto $x < a$ perteneciente a dicho entorno debería ser $e^{-\frac{a^2}{x^2-a^2}} = 0$, lo cual es imposible.

No es difícil, sin embargo, encontrar una condición suficiente para que la serie de Taylor en un punto de una función indefinidamente derivable tenga como suma dicha función en un entorno de dicho punto:

5.1. TEOREMA: FORMULA DE TAYLOR CON RESTO INTEGRAL

Sea $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) una función de clase n en $[a,b]$, es decir, que admite derivadas continuas hasta el orden n. Entonces:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

Demostr.: Definimos la función

$$x \in [a,b] \xrightarrow{T} T(x) = f(b) - \left[f(x) + \frac{(b-x)}{1!} f'(x) + \dots + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) \right] \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

Entonces $T'(t) = -\dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)$, $\forall t \in [a,b]$

Integrando en el intervalo $[a,x]$, con $x \in [a,b]$:

$$\int_a^x T'(t) = T(x) - T(a) = -\int_a^x \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$$

En particular, para $x=b$, $T(b) - T(a) = -\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$

Como $T(b)=0$, se deduce que $T(a) = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$

Entonces: $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + T(a) =$

$$= f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt. \text{ c.s.q.d.}$$

* Consideremos, entonces, una función real o compleja de variable real que admite derivadas de todos los órdenes. Denotamos por $T_n(x)$ el término complementario en forma integral y por $S_n(x)$ la suma de los n primeros términos de la serie de Taylor de la función f relativa al punto a. Entonces, $f(x) - S_n(x) = T_n(x)$.
Para que dicha serie de Taylor tenga como suma el número $f(x)$ es necesario y suficiente que $\lim_{n\to\infty} [f(x) - S_n(x)] = 0$, es decir, que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$. En este caso, para un x perteneciente al dominio de definición de f y al intervalo de convergencia de la serie de Taylor de la función f, podremos escribir

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Una condición suficiente para que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = 0$ es que exista una constante A tal que

$$|f^{(n)}(x)| \le A^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

pues $\left| \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \right| \le \frac{A^n}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt$

Como $t \in [a,x]$, $(x-t) \le (x-a)$. Luego

$$\left| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \right| \le \frac{A^n}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \int_a^x dt = \frac{A^n}{(n-1)!} (x-a)^n$$

Haciendo $B = A(x-a)$, resulta

$$|T_n(x)| = \left| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\, dt \right| \leq \frac{B^n}{(n-1)!}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{B^n}{(n-1)!} = 0$, puesto que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{B^n}{(n-1)!}$ es convergente, ya que $\lim\limits_{n} \frac{B^{n+1}/n!}{B^n/(n-1)!} = \lim\limits_{n} \frac{B}{n} = 0 < 1$,

Se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) = 0$.

EJEMPLOS: – La función exponencial es de clase infinita en $\mathbb{R}$. Como en todo entorno de cero de la forma $]-r, r[$, $r>0$, se verifica que $|e^x| \leq e^r \leq e^{rn}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in]-r, r[$, podemos escribir para $x \in]-r, r[$ que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

– Analogamente, como las derivadas del coseno estan acotadas por 1

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$