1ª PARTE: TEORIA GENERAL DE LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS

TEMA 1º: NOCIONES DE ALGEBRA LINEAL

1. Generalidades sobre espacios vectoriales.

A) Todos los espacios vectoriales que consideremos serán reales o complejos. Denotaremos por $\mathbb{K}$ al cuerpo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Cuando algún resultado se verifique solo en uno de estos cuerpos se especificará poniendo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Cuando pongamos $\mathbb{K}$, será válido para ambos cuerpos.

B) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, A un subconjunto de E, x un vector de E y $\lambda\in\mathbb{K}$. Definimos

$$x+A=\{x+y\in E \,/\, y\in A\}$$
$$\lambda\cdot A=\{\lambda\cdot y\in E \,/\, y\in A\}$$

A $x+A$ se le llama el conjunto trasladado de A por el vector x y de $\lambda\cdot A$ se dice que es un conjunto homotético de A.

Si $A, B\subset E$ denotaremos

$$A+B=\{x+y\in E \,/\, x\in A,\ y\in B\}.$$

Si $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos de E y $x\in E$ denotaremos

$$x+\mathcal{A}=\{x+A \,/\, A\in\mathcal{A}\}.$$

y la llamaremos familia trasladada de $\mathcal{A}$ por x.

C) Un subconjunto M de E se dice subespacio vectorial de E si se verifican las condiciones

- $M+M\subset M$
- $\lambda\cdot M\subset M,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$.

Dado $A\subset E$ existe el menor subespacio vectorial de E que contiene a A. Denotaremos dicho subespacio por $\langle A\rangle$. Se prueba fácilmente que $\langle A\rangle$ coincide con el conjunto de las combinaciones lineales finitas de elementos de A. Llamaremos a $\langle A\rangle$ la envolvente lineal de A.

D) Un subconjunto $B \subset E$ se dice linealmente independiente si cada vez que una combinación lineal finita de elementos de B sea cero se verifica que los escalares que intervienen en ella son nulos.

$B \subset E$ se dice una base algebraica o de Hamel de E si $\langle B \rangle = E$ y B es linealmente independiente.

Como consecuencia del axioma de Zorn se deduce el siguiente

1.1. TEOREMA: Si en un espacio vectorial E un subconjunto A genera el espacio y contiene un subconjunto G linealmente independiente entonces existe una base B algebraica de E tal que

$$G \subset B \subset A.$$

Si convenimos que $\emptyset$ es base del espacio vectorial $\{0\}$ obtenemos como consecuencia inmediata del teorema anterior que

1.2. COROLARIO: Todo espacio vectorial admite una base algebraica.

Se demuestra también el siguiente

1.3. TEOREMA: Todas las bases algebraicas de un espacio vectorial E tienen el mismo cardinal, al que llamaremos dimensión de E y denotaremos por $\dim(E)$.

2. CONJUNTOS CONVEXOS Y ABSOLUTAMENTE CONVEXOS EN UN ESPACIO VECTORIAL.

DEFINICIONES: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y A un subconjunto de E.

- Diremos que A es convexo si para cualesquiera $x, y \in A$ y para cualesquiera escalares λ y μ tales que $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ y $\lambda + \mu = 1$ se verifica que $\lambda x + \mu y \in A$, o de otra forma, si $\lambda A + \mu A \subset A$ siempre que λ y μ verifiquen lo anterior.
- Diremos que A es equilibrado si para cualquier $x \in A$ y para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ se verifica que $\lambda x \in A$.
- Diremos que A es absolutamente convexo o disco si es convexo y equilibrado.

OBSERVACION: Debe notarse que, en general, no es cierto que
$\lambda A + \mu A = (\lambda + \mu) A$.

2.1. PROPOSICION: Un conjunto $A \subset E$ es absolutamente convexo si, y solo si, para cualesquiera $x, y \in A$ y dados $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ se verifica que $\lambda x + \mu y \in A$.

Demostr.: $\Longrightarrow$ Si alguno de los escalares, por ejemplo λ, fuese cero el resultado es trivial pues se tendría $|\mu| \leq 1$ y por tanto $\mu y \in A$, por ser A equilibrado.

Supongamos entonces que $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$.

Se verifica en este caso que

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \left[\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\lambda}{|\lambda|} x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\mu}{|\mu|} y \right]$$

Por ser A equilibrado se verifica que $\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in A$ y $\frac{\mu}{|\mu|} y \in A$

Entonces, puesto que $\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} = 1$ y A es convexo, se verifica que

$$\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\lambda}{|\lambda|} x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \frac{\mu}{|\mu|} y \in A.$$

Por fin, $\lambda x + \mu y \in A$ pues $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ y A es equilibrado.

$\Longleftarrow$ A es equilibrado pues dado $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ se tiene que $\lambda x \in A$ aplicando la hipótesis para $\mu = 0$.

Además A es convexo, trivialmente. csqd.

2.2. PROPOSICION: Sea E un espacio vectorial y $A \subset E$ un conjunto absolutamente convexo no vacío. Entonces:

1) $0 \in A$
2) Si $|\lambda| \leq |\mu|$ entonces $\lambda A \subset \mu A$
3) Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ se verifica que

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i A) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) A.$$

Demostr.: 1) Sea $x \in A$, que existe pues $A \neq \emptyset$. Siendo A equilibrado y $|0| \leq 1$ se verifica que $0 = 0x \in A$.

2) Supongamos que $|\lambda| \leq |\mu|$.

Si $\mu = 0$ necesariamente $\lambda = 0$ y es trivial que $\lambda \cdot A = \{0\} \subset \mu A = \{0\}$.

Supongamos que $\mu \neq 0$. Entonces $\frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{K}$ y $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \leq 1$.

Entonces, $\forall x \in A$, $\frac{\lambda}{\mu} x \in A$, lo que equivale a que $\lambda x \in \mu A$, pues $\exists y = \frac{\lambda}{\mu} x \in A$ tal que $\lambda x = \mu y$.

3) Probaremos que $\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i A) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) A$ por inducción sobre n.

- Para n=2: Hay que probar que $\lambda A + \mu A = (|\lambda| + |\mu|) A$

Es trivial que $(|\lambda|+|\mu|)A \subset |\lambda|A + |\mu|A$.

En virtud de 2) se verifica que $|\lambda|A + |\mu|A \subset \lambda A + \mu A$.

Luego $(|\lambda|+|\mu|)A \subset \lambda A + \mu A$.

Veamos entonces que $\lambda A + \mu A \subset (|\lambda|+|\mu|)A$.

Si $\lambda = \mu = 0$ la tesis es trivial.

Supongamos que $|\lambda|+|\mu| \neq 0$.

Sean $x, y \in A$. Veamos que $\lambda x + \mu y \in (|\lambda|+|\mu|)A$.

Puesto que

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda|+|\mu|)\left[\frac{\lambda}{|\lambda|+|\mu|}x + \frac{\mu}{|\lambda|+|\mu|}y\right]$$

y $\frac{\lambda}{|\lambda|+|\mu|}x + \frac{\mu}{|\lambda|+|\mu|}y \in A$ por ser A absolutamente convexo, se verifica que $\lambda x + \mu y \in (|\lambda|+|\mu|)A$ y por tanto $\lambda A + \mu A = (|\lambda|+|\mu|)A$.

- Supuesto cierto para n-1, es trivial que también lo es para n pues

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A + \lambda_n A = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|\right) A + \lambda_n A = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) A. \text{ csqd.}$$

Es trivial la siguiente

2.3. PROPOSICION: Toda intersección de conjuntos convexos (absolutamente convexos) de un espacio vectorial es un conjunto convexo (resp. absolutamente convexo).

2.4. COROLARIO: Dado un subconjunto A de un espacio vectorial E existe el menor conjunto convexo (resp. absolutamente convexo) que contiene a A y coincide con la intersección de los conjuntos convexos (absolutamente convexos) que contienen a A. (*)

DEFINICION: Se llama envolvente convexa (envolvente absolutamente convexa) de un conjunto $A \subset E$ al menor convexo (resp. absolutamente convexo) que contiene a A.

Denotaremos por $C(A)$ la envolvente convexa de A y por $\Gamma(A)$ la envolvente absolutamente convexa de A.

Puesto que todo subespacio vectorial es absolutamente convexo y todo conjunto absolutamente convexo es convexo se tiene trivialmente que

$$C(A) \subset \Gamma(A) \subset \langle A \rangle .$$

El siguiente teorema caracteriza las envolventes convexa y absolutamente convexa de un conjunto.

2.5. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $A \subset E$.

1) $C(A)$ es el conjunto de las combinaciones lineales finitas de la forma $\sum \lambda_i x_i$ donde $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$ y $\sum \lambda_i = 1$.

2) $\Gamma(A)$ es el conjunto de las combinaciones lineales finitas de la forma $\sum \lambda_i x_i$ donde $x_i \in A$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $\sum |\lambda_i| \leq 1$.

Demostr.: 1) Sea $B = \{\sum_{\text{finitas}} \lambda_i x_i / x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$.

Basta probar que B es un conjunto convexo que contiene a A y que está contenido en cualquier convexo que contenga a A.

- B es convexo: Dados $x = \sum \lambda_i x_i \in B$, $y = \sum \mu_i y_i \in B$ y escalares positivos λ y μ tales que $\lambda + \mu = 1$ se tiene que

$$\lambda x + \mu y = \sum \lambda \lambda_i x_i + \sum \mu \mu_i x_i$$

es una combinación lineal finita de elementos de A con coeficientes positivos y de forma que

$$\sum \lambda \lambda_i + \sum \mu \mu_i = \lambda \sum \lambda_i + \mu \sum \mu_i = \lambda + \mu = 1$$

Por tanto, $\lambda x + \mu y \in B$.

- Trivialmente $A \subset B$.
- Veamos ahora que para todo $C \subset E$ conjunto convexo que contenga a A se verifica que $B \subset C$.

Lo probaremos por inducción sobre el número de términos de la combinación lineal. Sea $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in B$.

- Si $n=2$, trivialmente $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ por ser C convexo.
- Supongamos que la tesis es cierta para $n-1$ y probemosla para n. Si los $n-1$ primeros coeficientes de la combinación lineal fuesen cero, esta se reduciría a $\lambda_n x_n = x_n$, pues $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, y trivialmente pertenece a C pues $x_n \in A \subset C$. Supondremos entonces que $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i > 0$. Trivialmente

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \right) + \lambda_n x_n$$

Por hipótesis de inducción $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} x_i \in C$, pues $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\alpha} = 1$

Además, [illegible]

verifica que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in C$.

En definitiva $C(A) = \{\sum_{\text{finitas}} \lambda_i x_i \,/\, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1\}$.

2) La demostración de este apartado es totalmente análoga. csqd.

3. Conjuntos absorbentes en un espacio vectorial.

DEFINICION: Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto A de E se dice absorbente si se verifica que

$\forall x \in E, \exists \lambda > 0 \,/\, x \in \mu A$, siempre que $|\mu| \geq \lambda$

Trivialmente se verifica que A es absorbente si, y sólo si

$\forall x \in E, \exists \lambda > 0 \,/\, \mu x \in A$, siempre que $|\mu| \leq \lambda$.

Veamos una serie de propiedades en la siguiente proposición de los conjuntos absorbentes.

3.1. PROPOSICION: 1) Toda intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente.

2) Un conjunto A absolutamente convexo es absorbente si, y sólo si $\forall x \in E, \exists \lambda > 0 \,/\, x \in \lambda A$.

3) Si A es absorbente entonces $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$.

Demostr.: 1) Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos absorbentes en E. Sea $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
Dado $x \in E$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\lambda_i > 0$ tal que $x \in \mu A_i$ si $|\mu| \geq \lambda_i$.
Sea $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. Si $\mu \in \mathbb{K}$ es tal que $|\mu| \geq \lambda$ se verifica, por ser los A_i absorbentes, que $x \in \mu A_i$, $i = 1, \ldots, n$. Luego para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $y_i \in A_i$ tal que $x = \mu y_i$, $i = 1, \ldots, n$, y puesto que $\mu \neq 0$, se tiene que $y_1 = \cdots = y_n$. Por tanto, si $y = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, $y \in A$, y por tanto, $x \in \mu A$.

2) Sea A un conjunto absolutamente convexo, o disco.

$\Rightarrow$) Es trivial por la definición de conjunto absorbente.

$\Leftarrow$) Si $\forall x \in E, \exists \lambda > 0 \,/\, x \in \lambda A$, se verifica que $\forall x \in E, \exists \lambda > 0 \,/\, x \in \mu A$ si $|\mu| \geq \lambda$ pues en virtud de PROPOSICION 2.2. 2) $\lambda A \subset \mu A$ si $|\mu| \geq |\lambda| = \lambda$.

3) Trivialmente $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA \subset E$.

Dado $x \in E$, $\exists \lambda > 0$ tal que $x \in \mu A$ si $|\mu| \geq \lambda$.
Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq \lambda$. Entonces $x \in nA$ y por tanto $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nA$. csqd.