TEMA 2º: ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS.

1. DEFINICION:

Sea E un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $\mathcal{T}$ una topología sobre E.

<u>DEFINICION</u>: Se dice que $\mathcal{T}$ es compatible con la estructura de espacio vectorial de E si se verifican las condiciones siguientes

i) La aplicación $+ : (x,y) \in E \times E \longmapsto x+y \in E$ es continua.

ii) La aplicación $\cdot : (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \longmapsto \lambda x \in E$ es continua.

Se sobreentenderá, al hablar de la continuidad de las operaciones algebraicas en E, que en $E \times E$ tenemos definida la topología producto inducida por la topología $\mathcal{T}$ de E, y que en $\mathbb{K}$ tenemos definida la topología inducida por la métrica del módulo y en $\mathbb{K} \times E$ la topología producto correspondiente.

<u>DEFINICION</u>: (Espacio vectorial topológico)

Se llama espacio vectorial topológico al par formado por un espacio vectorial y una topología sobre él compatible con la estructura de espacio vectorial. (*)

<u>1.1. TEOREMA</u>: Sea E un espacio vectorial topológico. Las traslaciones en E y las homotecias de razón distinta de cero son homeomorfismos. Es decir

1) $\forall a \in E$, $\tau_a : x \in E \longmapsto x+a \in E$ es un homeomorfismo.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, $H_\lambda : x \in E \longmapsto \lambda x \in E$ es un homeomorfismo.

Demostr.: 1) Trivialmente τ_a es biyectiva y su inversa es τ_{-a}.

Consideremos las aplicaciones

$f : x \in E \longmapsto (x,a) \in E \times E$ y $g : (x,a) \in E \times E \longmapsto x+a \in E$.

Evidentemente $\tau_a = g \circ f$.

Como f es continua por serlo las aplicaciones $x \in E \mapsto x \in E$, $x \in E \mapsto a$ y g es continua en virtud de i) se tiene que τ_a es continua.

Análogamente τ_{-a} es continua. Por tanto, τ_a es un homeomorfismo.

2) H_λ es biyectiva y su inversa es $H_{\lambda^{-1}}$.

(*) En adelante hablaremos simplemente de topología compatible.

Sean las aplicaciones $f: x\in E \longmapsto (\lambda, x) \in \mathbb{K}\times E$ y $g: (\lambda, x)\in \mathbb{K}\times E \longmapsto \lambda x \in E$. Trivialmente $H_\lambda = g\circ f$. Puesto que f es continua, por serlo la aplicación constante $x\in E \longmapsto \lambda$ y la identidad en E, y g también es continua, en virtud de ii), se verifica que H_λ es continua.

Análogamente $H_{\lambda^{-1}}$ es continua. Por tanto, H_λ es un homeomorfismo. c.s.q.d.

El siguiente resultado, corolario inmediato del teorema anterior, nos dice que las bases de entornos son iguales "por todas partes" en el espacio vectorial topológico.

1.2. COROLARIO: Si $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0 del espacio vectorial topológico E entonces, para todo $x\in E$, $x+\mathcal{U}$ es una base de entornos de x. (*)

La demostración es trivial si tenemos en cuenta que $\forall x\in E$, τ_x es un homeomorfismo que transforma entornos de cero en entornos de x y recíprocamente.

Otro resultado importante es

1.3. COROLARIO: Si U es un entorno de 0 y $\lambda\in\mathbb{K}-\{0\}$ entonces λU es entorno de 0.

La demostración es trivial pues H_λ es un homeomorfismo tal que $H_\lambda(0)=0$.

El siguiente teorema da algunas propiedades de los entornos de cero en un espacio vectorial topológico.

1.4. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial topológico y $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero. Entonces

1) $\forall U\in\mathcal{U}$, U es absorbente.
2) $\forall U\in\mathcal{U}$, $\exists V\in\mathcal{U} / V+V\subset U$.
3) Para todo $U\in\mathcal{U}$ existe un entorno equilibrado de cero V tal que $V\subset U$.

Demostr.: 1) Probaremos que $\forall a\in E$, $\exists \varepsilon>0 / \lambda a\in U$ si $|\lambda|\le\varepsilon$, y esto para cualquier $U\in\mathcal{U}$.

Sea entonces $U\in\mathcal{U}$ y $a\in E$.

Consideremos la aplicación $g_a: \lambda\in\mathbb{K}\longmapsto g_a(\lambda)=\lambda\cdot a\in E$.

g_a es continua como composición de las aplicaciones continuas $\lambda\in\mathbb{K}\longmapsto(\lambda,a)\in\mathbb{K}\times E$ y $(\lambda,a)\in\mathbb{K}\times E\longmapsto\lambda\cdot a\in E$.

Puesto que $g_a(0)=0$, dado $U\in\mathcal{U}$, existe un entorno A de cero en $\mathbb{K}$, que podemos tomar de la forma $A=\{\lambda\in\mathbb{K} / |\lambda|\leq\varepsilon\}$ tal que $g_a(A)\subset U$, lo que equivale a que
$\lambda a\in U$ siempre que $|\lambda|\leq\varepsilon$.
Queda así probado que U es absorbente.

2) La aplicación $+:(x,y)\in E\times E\longmapsto x+y\in E$ es continua.
Puesto que $0+0=0$, dado $U\in\mathcal{U}$ existen entornos V_1 y V_2 de 0 en E tales que $V_1+V_2\subset U$.
Siendo $\mathcal{U}$ base de entornos de 0 y $V_1\cap V_2$ un entorno de cero existe $V\in\mathcal{U}$ tal que $V\subset V_1\cap V_2$. Trivialmente $V+V\subset V_1+V_2$ y por tanto, $V+V\subset U$.

3) La aplicación $\cdot:(\lambda,x)\in\mathbb{K}\times E\longmapsto\lambda x\in E$ es continua, y puesto que 0 es la imagen de $(0,0)$ se tiene que dado $U\in\mathcal{U}$ existen $W\in\mathcal{U}$ y $A=\{\lambda\in\mathbb{K}/|\lambda|\leq\varepsilon\}$ tal que $\lambda W\subset U$, $\forall\lambda\in A$.
En virtud de COROLARIO 1.3., εW es entorno de cero.
Probemos además que $\varepsilon W\subset\bigcap_{|\mu|\geq 1}\mu U$.

Dado $\mu\in\mathbb{K}$ tal que $|\mu|\geq 1$ se verifica que $\frac{\varepsilon}{\mu}\in A$, pues $\left|\frac{\varepsilon}{\mu}\right|\leq\varepsilon$.
Por tanto, $\frac{\varepsilon}{\mu}W\subset U$, lo cual equivale a que $\varepsilon W\subset\mu U$ y por tanto $\varepsilon W\subset\bigcap_{|\mu|\geq 1}\mu U$.

Sea $V=\bigcap_{|\mu|\geq 1}\mu U$. V es entorno de cero pues contiene a εW que es entorno de cero. Además $V\subset U$ pues $U\in\{\mu U\subset E/|\mu|\geq 1\}$.
Veamos ahora que V es equilibrado:
Sea $x\in V$ y $\lambda\in\mathbb{K}$ tal que $|\lambda|\leq 1$. Tratamos de probar que $\lambda x\in V$.
Si $\lambda=0$, la tesis es trivial pues V es entorno de cero.
Sea entonces $\lambda\neq 0$ tal que $|\lambda|\leq 1$.
Para probar que $\lambda x\in V$ basta ver que $\lambda x\in\mu U$ siempre que $|\mu|\geq 1$.
Para cualquier $\mu\in\mathbb{K}$ tal que $|\mu|\geq 1$ se verifica que $\left|\frac{\mu}{\lambda}\right|\geq 1$ y por tanto, $x\in\frac{\mu}{\lambda}U$, pues $x\in V$, lo que equivale a que $\lambda x\in\mu U$ y esto para cualquier μ tal que $|\mu|\geq 1$.

Luego $\lambda x\in\bigcap_{|\mu|\geq 1}\mu U=V$ y por tanto V es equilibrado. c.s.q.d.

Como consecuencia inmediata del apartado 3) del teorema anterior deducimos el siguiente

1.5. COROLARIO: En todo espacio vectorial topológico existe una base de entornos de cero equilibrados.

2. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS LOCALMENTE CONVEXOS

Según se ha probado en el teorema 1.4. es posible encontrar para cada punto de un espacio vectorial topológico una base de entornos absorbentes y equilibrados. Sin embargo, no siempre es posible encontrar una base de entornos convexos, propiedad muy útil para probar resultados importantes en espacios vectoriales topológicos. Por ello damos la siguiente

DEFINICION: (Espacio vectorial topológico localmente convexo).

Un espacio vectorial topológico se dice localmente convexo si posee una base de entornos de cero formada por conjuntos convexos.

En adelante hablaremos simplemente de espacios localmente convexos y supondremos que los espacios vectoriales topológicos que utilizaremos lo son, mientras no se diga lo contrario.

Puesto que el trasladado de un conjunto convexo es trivialmente convexo, se verifica que todo punto de un espacio localmente convexo posee una base de entornos convexos.

El siguiente teorema caracteriza las topologías localmente convexas.

2.1. TEOREMA: **a]** Sea E un espacio localmente convexo. Existe entonces una base de entornos de cero $\mathcal{U}$ con las siguientes propiedades:

i) $\forall U, V \in \mathcal{U}, \exists W \in \mathcal{U} / W \subset U \cap V$.

ii) $\forall U \in \mathcal{U}, \forall \alpha \in \mathbb{K}-\{0\}, \alpha U \in \mathcal{U}$.

iii) Si $U \in \mathcal{U}$, U es absorbente y absolutamente convexo.

b] Recíprocamente, si $\mathcal{U}$ es una familia no vacía de subconjuntos de E verificando i), ii) e iii) entonces existe en E una topología compatible localmente convexa para la cual $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero.

Demostr.: a] Puesto que E es localmente convexo existe una base $\mathcal{W}$ de entornos convexos de cero.

Sea $\mathcal{V} = \{\bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu W / W \in \mathcal{W}\}$.

En la demostración del TEOREMA 1.4. se vió como, siendo W entorno de cero, $\bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu W$ es tambien entorno de cero y, puesto que $\forall W \in \mathcal{W}, \bigcap_{|\mu| \geq 1} \mu W \subset W$

se verifica que $\mathcal{V}$ es una base de entornos de cero. Vimos también como $\bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu W$ es equilibrado, para todo $W \in \mathcal{W}$.

Por otra parte, como W es convexo, el homotético de un conjunto convexo es convexo y la intersección de conjuntos convexos es convexo se verifica que $\forall W \in \mathcal{W}$, $\bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu W$ es convexo.

Por tanto, $\mathcal{V}$ es una base de entornos absolutamente convexos de cero.

Consideremos ahora la familia de partes de E

$$\mathcal{U} = \{\alpha V \,/\, \alpha \in \mathbb{K} - \{0\},\ V \in \mathcal{V}\}$$

Veamos que $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0 que verifica i), ii) y iii).

Puesto $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0.

Trivialmente se verifica i) por ser $\mathcal{U}$ base de entornos.

De la definición de $\mathcal{U}$ se verifica ii) trivialmente.

Los elementos de $\mathcal{U}$ son entornos de 0 y, por tanto, absorbentes (TEOREMA 1.4. y puesto que los elementos de $\mathcal{V}$ son absolutamente convexos, los de $\mathcal{U}$ también lo son; luego se verifica iii).

b) Sea $\mathcal{U}$ una familia no vacía de partes del espacio vectorial E que verifica i), ii) e iii). Se trata de definir en E una topología localmente convexa compatible para la cual $\mathcal{U}$ sea base de entornos de cero.

Dicha topología quedará unívocamente determinada si definimos la familia de entornos de cada punto de E.

Consideremos la familia de partes de E siguiente

$$\mathcal{V} = \{V \subset E \,/\, \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U \subset V\}$$

Para cada punto $a \in E$ consideremos la familia $a + \mathcal{V}$. Veamos que $a + \mathcal{V}$ satisface las condiciones que ha de satisfacer una familia de entornos del punto a. Se trata de probar lo siguiente

1) $\forall H \in a + \mathcal{V}$, $a \in H$.

2) $\forall H_1, H_2 \in a + \mathcal{V}$, $H_1 \cap H_2 \in a + \mathcal{V}$.

3) Si $H \in a + \mathcal{V}$ y $H' \supset H$ entonces $H' \in a + \mathcal{V}$.

4) $\forall H \in a + \mathcal{V}$, $\exists H' \in a + \mathcal{V} \,/\, \forall y \in H'$, $H \in y + \mathcal{V}$.

Vamos a probar estas cuatro condiciones que caracterizan la familia de entornos de un punto:

1) Si $H \in a + \mathcal{V}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $H = a + V$.

Dado $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset V$. Puesto que U es absolutamente convexo (iii)), $0 \in U$ y, por tanto, $a = a+0 \in a+U \subset a+V = H$.

2) Si $H_1, H_2 \in a + \mathcal{V}$, existen $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $H_1 = a+V_1$ y $H_2 = a+V_2$.
Es trivial que $(a+V_1) \cap (a+V_2) = a + (V_1 \cap V_2)$ y, por tanto, $H_1 \cap H_2 = a + (V_1 \cap V_2)$.
Si probamos que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$ quedará visto que $H_1 \cap H_2 \in a + \mathcal{V}$.
Pero esto es trivial, pues $\exists U_1, U_2 \in \mathcal{U} \,/\, U_1 \subset V_1, U_2 \subset V_2$ y por i) existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U_1 \cap U_2$. Luego $\exists W \in \mathcal{U} \,/\, W \subset V_1 \cap V_2$, que prueba que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}$.

3) Evidente.

4) Dado $H \in a + \mathcal{V}$, $\exists V \in \mathcal{V} \,/\, H = a+V$.
Dado $V \in \mathcal{V}$, $\exists U \in \mathcal{U} \,/\, U \subset V$.
En virtud de ii), $\frac{1}{2} U \in \mathcal{U}$.
Sea $H' = a + \frac{1}{2} U$. Probemos que $\forall y \in H'$, $H \in y + \mathcal{V}$.
Para ello basta, por 3), probar que $H \supset y + \frac{1}{2} U$, pues $y + \frac{1}{2} U \in y + \mathcal{V}$.

Si $z \in y + \frac{1}{2} U$, como $y \in a + \frac{1}{2} U$ se tiene que $z \in a + \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = a + U$, por ser U absolutamente convexo. Pero $a + U \subset a + V = H$.
Luego $y + \frac{1}{2} U \subset H$ y, por tanto, $H \in y + \mathcal{V}$, $\forall y \in H'$.

Queda de esta forma definida una topología sobre E para la cual $\mathcal{U}$ es base de entornos de 0, pues $0 + \mathcal{V} = \mathcal{V}$ es la familia de entornos de 0 y $\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U} \,/\, U \subset V$.

Veamos ahora que la topología es compatible:

I) Continuidad de la suma: Hay que probar que la adición es continua en todo punto $(a,b) \in E \times E$. Sea, entonces, $(a,b) \in E \times E$. Hemos de probar que dado un entorno de $a+b$ en E, que es de la forma $(a+b)+V$, $V \in \mathcal{V}$, existen sendos entornos de a y b en E que se aplican en dicho entorno $(a+b)+V$ mediante la suma.

Por definición de $\mathcal{V}$, dado $(a+b)+V$, entorno de $a+b$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \subset V$.

En virtud de ii), $a + \frac{1}{2} U$ es entorno de a y $b + \frac{1}{2} U$ es entorno de b.
Por tanto, $(a + \frac{1}{2}U) \times (b + \frac{1}{2} U)$ es entorno de (a,b) en $E \times E$. Veamos que dicho entorno se aplica mediante la adición en $(a+b)+V$.
Esto es evidente pues $(a + \frac{1}{2}U) + (b + \frac{1}{2}U) = (a+b) + U$, por ser U absolutamente convexo, y $(a+b) + U \subset (a+b) + V$.

II) Continuidad del producto por escalar: Se trata de probar que $\forall (\lambda, a) \in \mathbb{K} \times E$, $\forall V \in \mathcal{V}$, $\exists \varepsilon > 0$ y $\exists W \in \mathcal{V} \,/\, \beta x \in \lambda a + V$ siempre que $|\beta - \lambda| < \varepsilon$ y $x \in a + W$.

Sea pues $(\lambda, a) \in \mathbb{K} \times E$ y $V \in \mathcal{V}$. Existe entonces $U \in \mathcal{U} / U \subset V$.
Tenemos que determinar un entorno de λ en $\mathbb{K}$, que será de la forma $A = \{\beta / |\beta - \lambda| < \varepsilon\}$, y un entorno de a, que buscaremos de la forma $a + \delta U$, $\delta > 0$, tal que $\beta x \in \lambda a + V$, $\forall \beta \in A$, $\forall x \in a + \delta U$.
Veamos como han de ser ε y δ.
Si βx debe pertenecer a $\lambda a + V$, $\beta x - \lambda a$ deberá pertenecer a V.
Trivialmente, $\beta x - \lambda a = \beta(x-a) + (\beta - \lambda) a$.
Sea $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $a \in \mu U$. Dicho escalar existe pues U es absorbente.
Si x ha de pertenecer a $a + \delta U$, $x - a$ debe estar en δU. Por tanto
$$\beta x - \lambda a = \beta(x-a) + (\beta-\lambda) a \in \beta \delta U + (\beta - \lambda)\mu U.$$
Tomemos $\varepsilon > 0$ de forma que $\varepsilon < \frac{1}{2\mu}$, con lo cual, si $|\beta - \lambda| < \varepsilon$ se tendrá que $(\beta - \lambda) a \in \frac{1}{2} U$ (si μ no fuese real positivo podremos tomar $|\mu|$).
Tomado ya ε, tomemos $\delta > 0$ de forma que $\delta < \frac{1}{2(\varepsilon + |\lambda|)}$, con lo cual siendo $|\beta - \lambda| < \varepsilon$ y, por tanto, $|\beta| < \varepsilon + |\lambda|$ se tiene que $\beta(x-a) \in \beta\delta U \subset \frac{1}{2} U$ por ser U absolutamente convexo.

En definitiva, si $|\beta - \lambda| < \varepsilon$ y $x \in a + \delta U$ se verifica que
$$\beta x - \lambda a = \beta(x-a) + (\beta - \lambda) a \in \beta \delta U + (\beta-\lambda)\mu U \subset \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} U = U \subset V$$
y, por tanto, $\beta x \in \lambda a + V$, siempre que $|\beta - \lambda| < \varepsilon$ y $x \in a + \delta U$.

Falta probar, por último, que la topología definida anteriormente es localmente convexa, pero esto es trivial si tenemos en cuenta que $\mathcal{U}$ es una base de entornos de 0 absolutamente convexos. **c.s.q.d.**

El siguiente teorema garantiza la existencia de una topología localmente convexa bajo hipótesis menos restrictivas que las del teorema anterior.

22. TEOREMA: Sea $\mathcal{V}$ una familia de conjuntos absorbentes y absolutamente convexos del espacio vectorial E. Existe entonces en E una topología localmente convexa que es la menos fina para la cual los elementos de $\mathcal{V}$ son entornos de cero. Una base de entornos de cero para esta topología la constituye la familia
$$\mathcal{U} = \{\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \,/\, V_i \in \mathcal{V}, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}.$$

Demostr.: Si probamos que $\mathcal{U}$ verifica las propiedades i), ii) e iii) del teorema anterior quedará probado, en virtud de éste, que existe una topología localmente convexa en E para la cual $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero. Probémoslo:

i) $\forall U', U'' \in \mathcal{U}$, $\exists U \in \mathcal{U} / U \subset U' \cap U''$: Sean $U' = \varepsilon' \bigcap_{i=1}^{n} V_i'$, $U'' = \varepsilon'' \bigcap_{i=1}^{m} V_i'' \in \mathcal{U}$.

Sea $U = \varepsilon\left[\left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i'\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{m} V_i''\right)\right]$ donde $\varepsilon = \inf(\varepsilon', \varepsilon'')$. Entonces $U \in \mathcal{U}$ y, trivialmente, $U \subset U' \cap U''$, por ser U' y U'' absolutamente convexos.

ii) e iii) son triviales. (*)

Puesto que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, los elementos de $\mathcal{V}$ son entornos de cero.

La topología definida por la familia $\mathcal{U}$ es la topología localmente convexa menos fina para la cual los elementos de $\mathcal{V}$ son entornos de cero pues cualquier otra topología localmente convexa que satisfaga esta condición debe contener necesariamente a los elementos de $\mathcal{U}$. c.s.q.d.

La siguiente proposición nos permitirá probar un teorema muy importante que nos da más información sobre las bases de entornos de cero.

2.3. PROPOSICION: Sea E un espacio vectorial topológico sobre $\mathbb{K}$. Entonces la clausura o adherencia de un conjunto equilibrado (convexo, absolutamente convexo) es un conjunto equilibrado (resp. convexo, absolutamente convexo).

Demostr.: • La clausura de un conjunto absolutamente convexo es absolutamente convexo:

Sea A un disco en E. Para probar que $\bar{A}$ es tambien un disco hay que probar que si $a, b \in \bar{A}$ y λ, μ son escalares tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ entonces $\lambda a + \mu b \in \bar{A}$. Basta para ello probar que todo entorno de $\lambda a + \mu b$ corta a A. En virtud de COROLARIO 1.2. los entornos de $\lambda a + \mu b$ son de la forma $\lambda a + \mu b + U$ donde U es entorno de cero. Dado U, entorno de cero, por TEOREMA 1.4., existe un entorno de cero V equilibrado tal que $V + V \subset U$.

Consideremos los entornos $a + V$ y $b + V$ de a y b, respectivamente.

Puesto que $a, b \in \bar{A}$, $(a+V) \cap A \neq \emptyset$ y $(b+V) \cap A \neq \emptyset$.

Sean $x \in (a+V) \cap A$ e $y \in (a+V) \cap A$.

Siendo A absolutamente convexo, $\lambda x + \mu y \in A$.

Si probamos que $\lambda x + \mu y \in (\lambda a + \mu b) + U$ quedará visto que $((\lambda a + \mu b) + U) \cap A \neq \emptyset$ y $\lambda a + \mu b \in \bar{A}$, como queremos probar.

$(\lambda x + \mu y) - (\lambda a + \mu b) = \lambda(x - a) + \mu(y - b) \in \lambda V + \mu V$, pues $x \in a + V$ e $y \in b + V$.

Siendo V equilibrado, y $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$, $\lambda V \subset V$ y $\mu V \subset V$

(*) Observar que los elementos de $\mathcal{U}$ son equilibrados y que, por tanto, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha U = |\alpha| U$

con lo cual $(\lambda x+\mu y)-(\lambda a+\mu b)\in V+V\subset U$ y por tanto
$\lambda x+\mu y\in(\lambda a+\mu b)+U$.

- La clausura de un conjunto equilibrado es equilibrado:

Sea A un conjunto equilibrado en E. Para probar que $\bar{A}$ es equilibrado hemos de ver que $\forall a\in\bar{A}$ y $\forall\lambda\in\mathbb{K}$ tal que $|\lambda|\leq 1$, $\lambda a\in\bar{A}$.

Veamos que todo entorno de λa corta a A, es decir que $\forall V$ entorno de cero, $(\lambda a+U)\cap A\neq\emptyset$.

Dado U, entorno de cero, existe V, entorno de cero, tal que $V\subset U$, donde V es equilibrado.
Consideremos el entorno $a+V$ de a. Puesto que $a\in\bar{A}$, $(a+V)\cap A\neq\emptyset$.
Sea $x\in(a+V)\cap A$. Siendo A equilibrado, $\lambda x\in A$.
Probemos que $\lambda x\in\lambda a+U$, con lo cual $\lambda x\in(\lambda a+U)\cap A$ y por tanto $(\lambda a+U)\cap A\neq\emptyset$, como queremos probar.
$\lambda x-\lambda a=\lambda(x-a)\in\lambda V\subset V\subset U$ y por tanto $\lambda x\in\lambda a+U$, pues siendo V equilibrado y $|\lambda|\leq 1$, $\lambda V\subset V$.

- Analogamente, la clausura de un conjunto convexo es convexo. ■

El siguiente teorema nos asegura la existencia de bases de entornos de cero cerrados.

2.4. TEOREMA: 1) Sea E un espacio vectorial topológico. Entonces E posee una base de entornos de cero cerrados y equilibrados.
2) Sea E un espacio localmente convexo. Entonces E posee una base de entornos de cero cerrados y absolutamente convexos que satisface las propiedades i), ii) e iii) del TEOREMA 2.1.

Demostr.: 1) Sabemos que existe en E una base $\mathcal{U}$ de entornos de cero equilibrados. Consideremos la familia

$$\bar{\mathcal{U}}=\{\bar{U}\,/\,U\in\mathcal{U}\}.$$

Trivialmente los elementos de $\bar{\mathcal{U}}$ son entornos de cero cerrados y equilibrados.
Veamos que $\bar{\mathcal{U}}$ es una base de entornos: Sea V un entorno arbitrario de cero. Existe entonces un entorno U de cero tal que $U+U\subset V$, con $U\in\mathcal{U}$ pues $\mathcal{U}$ es base. Veamos que $\bar{U}\subset V$:
Dado $y\in\bar{U}$, puesto que $y+U$ es entorno de y, $(y+U)\cap U\neq\emptyset$.
Sea $z\in(y+U)\cap U$.
Entonces $y=(y-z)+z\in U+U\subset V$.
2) Siendo E localmente convexo existe una base $\mathcal{U}$ de entornos de cero satisfaciendo i), ii) e iii). Consideremos la familia $\bar{\mathcal{U}}=\{\bar{U}/U\in\mathcal{U}\}$.

entornos de cero cerrados absolutamente convexos. Del mismo modo, $\overline{\mathcal{U}}$ es una base de entornos de cero; probemos que verifica i), ii) e iii).

i) Sean $\overline{U}, \overline{V} \in \overline{\mathcal{U}}$, con $U, V \in \mathcal{U}$. Existe entonces $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$ y, por tanto, $\overline{W} \subset \overline{U \cap V} \subset \overline{U} \cap \overline{V}$.

ii) $\forall \overline{U} \in \overline{\mathcal{U}}$, $\forall \alpha \in K - \{0\}$, $\alpha \overline{U} \in \overline{\mathcal{U}}$, pues $\alpha \overline{U} = \overline{\alpha U}$ y $\alpha U \in \mathcal{U}$.

iii) Trivial.

Sólo falta probar que $\alpha \overline{U} = \overline{\alpha U}$: Puesto que $U \subset \overline{U}$ se verifica que $\alpha U \subset \alpha \overline{U}$ y siendo $\alpha \overline{U}$ cerrado se verifica que $\overline{\alpha U} \subset \alpha \overline{U}$. Veamos que $\alpha \overline{U} \subset \overline{\alpha U}$, es decir, que $\forall y \in \overline{U}$, $\alpha y \in \overline{\alpha U}$. Basta ver que todo entorno de αy, que es de la forma $\alpha y + V$, corta a αU. Puesto que $y \in \overline{U}$, dado el entorno de y $y + \frac{1}{\alpha} V$ se tiene que $(y + \frac{1}{\alpha} V) \cap U \neq \emptyset$.

Sea $z \in (y + \frac{1}{\alpha} V) \cap U$. Puesto que $z \in U$, $\alpha z \in \alpha U$. Veamos que $\alpha z \in \alpha y + V$ con lo cual $(\alpha y + V) \cap \alpha U \neq 0$, como queremos ver:

$z \in y + \frac{1}{\alpha} V \Rightarrow z - y \in \frac{1}{\alpha} V \Rightarrow \alpha z - \alpha y \in V \Rightarrow \alpha z \in \alpha y + V$. c.s.q.d.

3. Espacios vectoriales topológicos separados.

Recordemos que un espacio topológico se dice separado o de Haussdorf si para cada dos puntos distintos del mismo existen entornos de dichos puntos disjuntos. El siguiente teorema caracteriza los espacios vectoriales topológicos separados.

3.1. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial topológico y $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero. Es condición necesaria y suficiente para que E sea separado que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Sea E un espacio vectorial topológico separado y $x \in E - \{0\}$. Puesto que $x \neq 0$ existe un entorno $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin U$ y por tanto $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$, pues $0 \in U$, $\forall U \in \mathcal{U}$.

$\Leftarrow$] Suponemos que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$. Sean $x, y \in E$, $x \neq y$.
Puesto que $x - y \neq 0$, $\exists U \in \mathcal{U} / x - y \notin U$.
Dado este U, existe un entorno equilibrado $V \in \mathcal{U}$ tal que $V + V \subset U$.
Veamos que $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$, con lo cual acabará la demostración.
Supongamos que $\exists z \in E / z \in (x + V) \cap (y + V)$
$z \in x + V \Rightarrow z - x \in V$ y por tanto $x - z \in V$, pues V es equilibrado. $z \in y + V \Rightarrow z - y \in V$.
Entonces $x - y = (x - z) + (z - y) \in V + V \subset U$, en contra de que $x - y \notin U$.
Luego $(x + V) \cap (y + V) = \emptyset$. c.s.q.d.

4. DETERMINACION DE UNA TOPOLOGIA LOCALMENTE CONVEXA MEDIANTE UNA FAMILIA DE SEMINORMAS.

Una norma sobre un espacio vectorial induce en este una topologica. De la misma forma, la topología de un espacio localmente convexo se puede describir a partir de una familia de seminormas.

DEFINICION: (Seminorma)

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Una seminorma p en E es una aplicación $p: E \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades

I) $p(x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

II) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$.

III) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Observacion: Una seminorma p será una norma cuando la igualdad $p(x)=0$ se satisfaga solamente para $x=0$.

En la siguiente proposición recogemos una serie de propiedades de las seminormas.

4.1. PROPOSICION: Sea E un espacio vectorial topológico y p una seminorma en E.

a) $p^{-1}(\{0\})$ es un subespacio vectorial de E.

b) $\forall x, y \in E$, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.

c) Si p y q son dos seminormas en E que satisfacen la implicación $(p(x) < 1) \Rightarrow (q(x) < 1)$ entonces $q(x) \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

Demostr.: a) - $\forall x, y \in p^{-1}(\{0\})$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0$ y por tanto $x+y \in p^{-1}(\{0\})$.

- $\forall x \in p^{-1}(\{0\})$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x \in p^{-1}(\{0\})$, pues $0 \leq p(\lambda x) \leq |\lambda| p(x) = 0$.

b) $\forall x, y \in E$, $p(x) = p(x-y+y) \leq p(x-y) + p(y)$ y por tanto $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$

Analogamente, $p(y) - p(x) \leq p(y-x) = p(x-y)$.

Por tanto, $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.

c) Supongamos que existiese $x \in E$ tal que $p(x) < q(x)$. Sea $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $p(x) < \alpha < q(x)$. Entonces $p\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1$ y $q\left(\frac{x}{\alpha}\right) > 1$, contra lo supuesto. ∎

4.2. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial. Entonces:

1) Si p es una seminorma en E, para cada $\alpha > 0$ los conjuntos $\{x \in E / p(x) < \alpha\}$ y $\{x \in E / p(x) \leq \alpha\}$ son discos absorbentes.

2) Sea A un disco absorbente. La función $p_A: E \to \mathbb{R}$ definida por $p_A(x) = \inf\{\lambda \geq 0 / x \in \lambda A\}$ es una seminorma en E que satisface la condición

$$\{x \in E / p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in E / p_A(x) \leq 1\}.$$

... que $\{x\in E / p(x)<\alpha\}$ es un disco absorbente. Análogamente se procedería para $\{x\in E/ p(x)\leq\alpha\}$. Sea $A=\{x\in E/ p(x)<\alpha\}$

- $\{x\in E/ p(x)<\alpha\}$ es un disco: Sean $x,y\in E$ tales que $p(x)<\alpha$ y $p(y)<\alpha$. Sean $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ tales que $|\lambda|+|\mu|\leq 1$. Entonces
  $p(\lambda x+\mu y)\leq|\lambda|\,p(x)+|\mu|\,p(y)<|\lambda|\alpha+|\mu|\alpha=(|\lambda|+|\mu|)\alpha\leq\alpha$.
  Luego $\{x\in E/ p(x)<\alpha\}$ es absolutamente convexo.
- Puesto que A es un disco, para ver que es absorbente, basta probar que $\forall x\in E,\ \exists\lambda>0\ /\ \lambda x\in A$.
  Sea $x\in E$. Si $p(x)=0$, trivialmente $1\cdot x\in A$. Supongamos que $p(x)\neq 0$. Tomando $\lambda=\frac{\alpha}{2p(x)}$ queda visto que $\lambda x\in A$, pues $p(\lambda x)=\frac{\alpha}{2}<\alpha$.

2) Sea A un disco absorbente. Se trata de probar que la aplicación

$$p_A: x\in E\longmapsto p_A(x)=\inf\{\lambda\geq 0/ x\in\lambda A\}\in\mathbb{R}$$

es una seminorma.

- p_A está bien definida: para probar esto hay que ver que $\forall x\in E$, $\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\}\neq\emptyset$ lo cual es trivial por ser A absorbente y observando que el escalar λ, cuya existencia garantiza el carácter absorbente de A, lo podemos tomar positivo pues $\lambda A=|\lambda|A$.
- $p_A(x)\geq 0,\ \forall x\in E$ trivialmente.
- $p_A(\alpha x)=|\alpha|\,p_A(x),\ \forall x\in E, \forall\alpha\in\mathbb{K}$: Si $\alpha=0$, la tesis es trivial. Supongamos $\alpha\neq 0$.
  Si $\mu\in\{\lambda\geq 0/\alpha x\in\lambda A\}$ entonces $\alpha x\in\mu A$ y también $x\in\frac{\mu}{\alpha}A=\frac{\mu}{|\alpha|}A$.
  Por tanto, $\frac{\mu}{|\alpha|}\in\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\}$. Luego $p_A(x)\leq\frac{\mu}{|\alpha|}$, o bien, $|\alpha|\,p_A(x)\leq\mu$.
  Como esto es cierto para cualquier μ debe ser $|\alpha|\,p_A(x)\leq p_A(\alpha x)$.
  Si $\mu\in\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\}$ entonces $x\in\mu A$ y también $\alpha x\in\alpha\mu A=|\alpha|\mu A$.
  Por tanto, $|\alpha|\mu\geq p_A(\alpha x)$ y también $\frac{1}{|\alpha|}p_A(\alpha x)\leq\mu$. Siendo esto cierto para cualquier μ debe ser $\frac{1}{|\alpha|}p_A(\alpha x)\leq p_A(x)$, es decir, $p_A(\alpha x)\leq|\alpha|\,p_A(x)$.
  Luego $p_A(\alpha x)=|\alpha|\,p_A(x)$.
- $p_A(x+y)\leq p_A(x)+p_A(y)$: Sean $\lambda,\mu\geq 0$ tales que $x\in\lambda A$, $y\in\mu A$. Entonces $x+y\in(\lambda+\mu)A$.
  Por tanto, $p_A(x+y)\leq\lambda+\mu$ y esto $\forall\lambda\in\{\nu\geq 0/x\in\nu A\}$ y $\forall\mu\in\{\nu\geq 0/y\in\nu A\}$.
  Luego $p_A(x+y)\leq p_A(x)+p_A(y)$.

Probaremos, por último, que $\{x\in E/p_A(x)<1\}\subset A\subset\{x\in E/p_A(x)\leq 1\}$.

- $A\subset\{x\in E/p_A(x)\leq 1\}$: $\forall x\in A$, $x\in 1\cdot A$; luego $1\in\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\}$; por tanto, $p_A(x)\leq 1$.
- $\{x\in E/p_A(x)<1\}\subset A$: Sea $x\in E$ tal que $p_A(x)<1$. Entonces $1\in\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\}$, por ser A equilibrado. Luego $x\in 1\cdot A=A$. c.s.q.d.

<u>OBSERVACION</u>: El teorema anterior, de naturaleza puramente algebraica, pone de manifiesto la estrecha relación que existe entre las seminormas y

Los discos absorbentes.

DEFINICIONES: Sea E un espacio vectorial.

a) Si p es una seminorma en E al conjunto $\{x\in E / p(x)<\alpha\}$ ($\{x\in E/p(x)\leq\alpha\}$) se le llama bola abierta (resp. cerrada) de radio α asociada a p.

b) Sea A un disco absorbente. A la seminorma p_A se le llama indicador, gauge o funcional de Minkowsky de A.

4.3. PROPOSICION: Sean A y B discos absorbentes en E y $\alpha\in\mathbb{K}-\{0\}$. Entonces

1) $p_{\alpha A}=|\alpha|^{-1}p_A$

2) $p_{A\cap B}=\sup(p_A,p_B)$

3) $A\subset B \Rightarrow p_B\leq p_A$.

Demostr.: 1) Análogo a TEOREMA 4.2.2).

2) $p_{A\cap B}(x)=\inf\{\lambda\geq 0 / x\in\lambda(A\cap B)\}=\inf\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\cap\lambda B\}$.

Sea $\Delta=\{\lambda\geq 0/x\in\lambda A\cap\lambda B\}$. $\forall\mu\in\Delta$, $x\in\mu A\cap\mu B$ y por tanto $p_A(x)\leq\mu$ y $p_B(x)\leq\mu$ o bien $\sup(p_A(x),p_B(x))\leq\mu$. Puesto que esto se verifica para todo $\mu\in\Delta$ se tiene que $\sup(p_A(x),p_B(x))\leq p_{A\cap B}(x)$. Si probamos que $\forall\mu\geq\sup(p_A(x),p_B(x))$, $\mu\geq p_{A\cap B}(x)$ quedará probado que $p_{A\cap B}(x)=\sup(p_A(x),p_B(x))$. Pero eso es trivial, pues si $\mu\geq p_A(x)$ y $\mu\geq p_B(x)$ se tiene que $x\in\mu A\cap\mu B=\mu(A\cap B)$ y por tanto $\mu\geq p_{A\cap B}(x)$.

3) Trivial. ∎

Veamos a continuación que el paralelismo que existe, desde el punto de vista algebraico, entre seminormas y discos absorbentes se mantiene desde el punto de vista topológico.

4.4. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo. Entonces

1) Una seminorma $p: E\to\mathbb{R}$ es continua si, y sólo si, es continua en cero.

2) El disco absorbente U es entorno de cero si, y sólo si, su gauge p_U es una seminorma continua.

3) En las hipótesis de 2), la clausura del disco absorbente U es el conjunto $\overline{U}=\{x\in E/p_U(x)\leq 1\}$ y su interior, $\mathring{U}=\{x\in E/p_U(x)<1\}$. (*)

Demostr.: 1) Supongamos que p es continua en cero. Veamos que es continua en todo punto y de E. Se trata de probar que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists U \text{ entorno de cero} / x\in y+U \Rightarrow |p(x)-p(y)|\leq\varepsilon.$$

Dado $\varepsilon>0$, $\exists U$ entorno de cero $/ x\in U\Rightarrow p(x)\leq\varepsilon$, pues p es continua en cero. Si $x\in y+U$, $x-y\in U$ y por tanto $p(x-y)\leq\varepsilon$. Puesto que $|p(x)-p(y)|\leq p(x-y)$ queda probado que p es continua en y, $\forall y\in E$.

(*) Esto justifica que $\{x\in E/p_U(x)\leq\alpha\}$ ($\{x\in E/p_U(x)<\alpha\}$) se llame bola cerrada (resp. abierta).

2) $\Rightarrow$ Sea U entorno de cero absorbente y absolutamente convexo. Hemos de probar que su gauge p_U es continua, o lo que es equivalente, que p_U es continua en cero, es decir, que $\forall \varepsilon>0$, $\exists V$ entorno de cero / $x \in V \Rightarrow p_U(x) \leq \varepsilon$.

Dado $\varepsilon>0$, sea $V = \varepsilon U$. Si $x \in \varepsilon U$, entonces $p_U(x) \leq \varepsilon$.

Luego p_U es continua en cero.

$\Leftarrow$ Suponemos que p_U es continua en 0. Puesto $p_U(0)=0$ y $]-1,1[$ es entorno de cero en $\mathbb{R}$, $p_U^{-1}(]-1,1[)$ es entorno de cero en E.

Pero, trivialmente, $p_U^{-1}(]-1,1[) = \{x \in E / p_U(x) < 1\}$.

Como $\{x \in E / p_U(x) < 1\} \subset U$, por teorema 4.2, y $\{x \in E / p_U(x) < 1\}$ es entorno de cero, se verifica que U es entorno de cero.

3) - $\overline{U} = \{x \in E / p_U(x) \leq 1\}$, donde U es entorno de cero.

Como $\{x \in E / p_U(x) \leq 1\} = p_U^{-1}([-1,1])$ es cerrado pues p_U es continua y $U \subset \{x \in E / p_U(x) \leq 1\}$ (TEOREMA 4.2), se verifica que $\overline{U} \subset \{x \in E / p_U(x) \leq 1\}$ pues $\overline{U}$ es el menor cerrado que contiene a U.

Veamos que $\{x \in E / p_U(x) \leq 1\} \subset \overline{U}$.

Sea $x \in E$ tal que $p_U(x) \leq 1$. Basta ver que todo entorno de x corta a $\overline{U}$.

Sea W un entorno de cero equilibrado cualquiera. Si probamos que $(x+W) \cap U \neq \emptyset$ quedará probado que $x \in \overline{U}$, por COROLARIO 1.5.

Puesto que todo entorno de cero es absorbente, existe μ que podemos tomar en $]0,1[$, por ser W equilibrado, tal que $\mu x \in W = -W$.

Por tanto, $-\mu x \in W$.

Veamos que $(1-\mu)x \in (x+W) \cap U$.

$-\mu x \in W \Rightarrow x - \mu x \in x + W$, es decir $(1-\mu)x \in x+W$.

$x - \mu x \in U$, pues $p_U[(1-\mu)x] = (1-\mu)\, p_U(x) < p_U(x) \leq 1$

Luego $(1-\mu)x \in \{y \in E / p_U(y) < 1\} \subset U$.

- $\overset{\circ}{U} = \{x \in E / p_U(x) < 1\}$: $\{x \in E / p_U(x) < 1\} = p_U^{-1}(]-1,1[)$ es abierto pues p_U es continua. Como $\{x \in E / p_U(x) < 1\} \subset U$ se verifica que $\{x \in E / p_U(x) < 1\} \subset \overset{\circ}{U}$ pues $\overset{\circ}{U}$ es el mayor abierto contenido en U.

Veamos que $\overset{\circ}{U} \subset \{x \in E / p_U(x) < 1\}$.

Sea $x \in \overset{\circ}{U}$. Existe entonces V, entorno de cero, tal que $x + V \subset U$.

Puesto que V es absorbente, $\exists \mu \in]0,1[/ \mu x \in V$.

Entonces $x + \mu x = (1+\mu)x \in x + V \subset U$, de donde se deduce que $x \in \frac{1}{1+\mu} U$. Por tanto, por definición de p_U se tiene que $p_U(x) \leq \frac{1}{1+\mu} < 1$.

Luego, $x \in \{z \in E / p_U(z) < 1\}$. c.s.q.d.

Veamos por fin como podemos determinar una topología localmente convexa compatible mediante una familia de seminormas.

4.5. TEOREMA: (construcción de topologías localmente convexas mediante seminormas)

Sea E un espacio vectorial y sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas en E. Existe entonces en E una topología localmente convexa compatible que es la menos fina para la cual las seminormas de $\mathcal{P}$ son continuas. Para esta topología una base de entornos de cero está formada por los conjuntos siguientes

$$U = \{x \in E \,/\, \sup_{1 \le i \le n} p_i(x) \le \varepsilon\},\ \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N},\ p_i \in \mathcal{P}.$$

Demostr.: Para cada $p_i \in \mathcal{P}$ consideremos la bola cerrada unidad

$$V_i = \{x \in E \,/\, p_i(x) \le 1\}$$

p_i es la gauge de V_i (*). Según TEOREMA 4.2. V_i es un disco absorbente. En virtud del teorema fundamental (TEOREMA 2.2.) existe una topología localmente convexa compatible que es la menos fina para la cual los V_i son entornos de cero, lo que equivale (TEOREMA 4.4.) a que las seminormas p_i sean continuas.

Veamos ahora que la familia $\{U\}$ es una base de entornos de cero. En virtud del TEOREMA 2.2. una base de entornos de cero la constituyen los conjuntos de la forma $\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i$, $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Según PROPOSICION 4.3, las gauges de estos entornos son de la forma $\varepsilon^{-1} \sup_{1 \le i \le n} p_i$, y la bola unidad asociada a esta gauge es $\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i$.

Entonces $z \in \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i \iff \varepsilon^{-1} \sup_{1 \le i \le n} p_i(z) \le 1 \iff \sup_{1 \le i \le n} p_i(z) \le \varepsilon \iff z \in \{x \,/\, \sup_{1 \le i \le n} p_i(x) \le \varepsilon\}$

que prueba que $\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} V_i = \{x \in E \,/\, \sup_{1 \le i \le n} p_i(x) \le \varepsilon\}$, y por tanto $\{U\}$ es base de entornos de cero. c.s.q.d.

A la topología a que hace alusión el teorema anterior la llamaremos TOPOLOGIA GENERADA POR LA FAMILIA $\mathcal{P}$.

La expresión de los entornos U del teorema anterior se simplifica si la familia $\mathcal{P}$ de seminormas es saturada, concepto que se define a continuación:

DEFINICION: Una familia $\mathcal{P}$ de seminormas en el espacio vectorial E es saturada si $\forall p, q \in \mathcal{P}$, $\sup(p, q) \in \mathcal{P}$

Entonces, en virtud del teorema anterior, una base de en-

(*) Se deduce inmediatamente de la cadena de equivalencias: $x \in \lambda V_i \iff \lambda^{-1} x \in V_i \iff \lambda^{-1} p_i(x) \le 1 \iff p_i(x) \le \lambda$ pues $\forall \lambda \in \{\lambda > 0 \,/\, x \in \lambda V_i\}$, $p_i(x) \le \lambda$ y por tanto $p_i(x) \le p_{V_i}(x)$ y, además, $\forall \lambda \ge p_i(x)$, $\lambda \ge p_{V_i}(x)$ pues $\lambda \ge p_i(x) \Rightarrow x \in \lambda V_i \Rightarrow \lambda \ge p_{V_i}(x)$.

... generada por una familia saturada $\mathcal{P}$ de seminormas en E la constituyen los conjuntos de la forma

$$\{x\in E / p(x)\leq \varepsilon\}, \quad \varepsilon>0,\ p\in\mathcal{P}.$$

y para que esta simplificación sea útil deberemos probar el siguiente

4.6. TEOREMA: La topología de cualquier espacio localmente convexo puede definirse mediante una familia saturada de seminormas.

Demostr.: Sea E un espacio localmente convexo. Existe entonces una base de entornos de cero $\{V_i\}_{i\in I}$ que son discos absorbentes. Para cada $i\in I$, sea p_i la gauge de V_i y sea $\mathcal{P}=\{p_i\}_{i\in I}$. La topología generada por la familia $\mathcal{P}$ de seminormas continuas coincide con la que determina la $\{V_i\}_{i\in I}$, pues siendo las p_i continuas, los conjuntos $\{x\in E/ p_i(x)<1\}$ y $\{x\in E/p_i(x)\leq 1\}$ son entornos de cero para la topología generada por $\mathcal{P}$ y sabemos que $\{x\in E/p_i(x)<1\}\subset V_i\subset\{x\in E/p_i(x)\leq 1\}$.
Consideremos la familia de seminormas

$$\mathcal{P}^*=\{\sup_{1\leq i\leq n} p_i \ / \ n\in\mathbb{N},\ p_i\in\mathcal{P}\}$$

Es trivial que $\mathcal{P}^*$ es una familia saturada de seminormas.
Veamos ahora que $\mathcal{P}^*$ genera la misma topología generada por $\mathcal{P}$, que es la topología localmente convexa que ya teníamos en E.
Puesto que $\mathcal{P}\subset\mathcal{P}^*$, la topología generada por $\mathcal{P}$ es menos fina que la que genera $\mathcal{P}^*$. Si probamos ahora el recíproco quedará terminada la demostración. Un entorno de cero de una base de entornos de la topología generada por $\mathcal{P}^*$ es de la forma $\{x\in E/\sup_{1\leq i\leq n} p_i(x)\leq\varepsilon\}$ para un cierto $\varepsilon>0$ y unas seminormas $p_1,\dots,p_n$ de $\mathcal{P}$.
Puesto que $p_i\in\mathcal{P}$, $i=1,\dots,n$, $\{x\in E/\sup_{1\leq i\leq n} p_i(x)\leq\varepsilon\}$ es entorno de cero para la topología generada por $\mathcal{P}$, como intersección finita de entornos de cero para esta topología que son de la forma $\{x\in E/p_i(x)\leq\varepsilon\}$.
Luego las topologías generadas por $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}^*$ coinciden y, por tanto, la topología localmente convexa que teníamos en E puede generarse mediante la familia saturada $\mathcal{P}^*$ de seminormas. c.q.d.

Resumiendo lo dicho en este apartado, podemos decir que en todo espacio localmente convexo E existe una base de entornos de cero cuyas gauges son continuas y generan la topología que tenemos en E y, recíprocamente, dado un espacio vectorial E y una familia $\mathcal{P}$ de seminormas existe en E una topología localmente convexa para la cual las seminormas de $\mathcal{P}$ son continuas, y podemos, además, generar la topología que determina $\mathcal{P}$ mediante una familia saturada $\mathcal{P}^*$ de seminormas en E.

El siguiente teorema caracteriza los espacios localmente convexos separados.

4.7. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas que generan la topología de E. Entonces E es separado si, y solo si, $\forall x \neq 0, \exists p \in \mathcal{P} / p(x) \neq 0$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Suponemos que E es separado. Dado $x \neq 0$, existe un entorno de cero, que podemos tomar de la forma $\{z \in E / \sup_{1 \le i \le n} p_i(z) \le \varepsilon\}$ al cual x no pertenece. Existe entonces $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $p_i(x) > \varepsilon$. Por tanto, $\exists p_i \in \mathcal{P} / p_i(x) \neq 0$.

$\Leftarrow$] Suponemos que $\forall x \neq 0, \exists p \in \mathcal{P} / p(x) \neq 0$.

Sea $\varepsilon \in]0, p(x)[$. Entonces $x \notin \{z / p(z) \le \varepsilon\}$.

Como $\{z / p(z) \le \varepsilon\}$ es un entorno de cero, por ser p continua, existe un entorno de cero al que x no pertenece y, en virtud del teorema 3.1. E es separado. c.s.q.d.

OBSERVACION: La mayoría de los espacios localmente convexos que aparecen en Análisis Funcional son separados. Por ello, cuando acabemos con las consideraciones generales sobre espacios vectoriales topológicos, supondremos que los espacios localmente convexos que utilicemos son separados, y si no lo fueran en algun caso, se especificaría.

5. METRIZABILIDAD DE UN ESPACIO LOCALMENTE CONVEXO.

DEFINICION: (Espacio localmente convexo metrizable)

Un espacio localmente convexo E se dice metrizable si existe una función distancia d sobre E de forma que la topología inducida por la métrica en E coincide con la topología del espacio.

De otra forma, en un espacio localmente convexo metrizable existe una distancia d tal que los conjuntos $\{x \in E / d(x,0) \le \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, forman una base de entornos de cero en E.

DEFINICION: (distancia invariante por traslaciones).

Una distancia en un espacio vectorial E se dice invariante por traslaciones si se verifica que

$$\forall x, y, z \in E,\ d(x+z, y+z) = d(x,y).$$

El siguiente teorema caracteriza los espacios localmente convexos metrizables.

5.1. TEOREMA: (fundamental de metrizabilidad)

Sea E un espacio localmente convexo. Entonces E es metrizable si, y solo si, es separado y posee una base numerable de entornos de cero. En este caso siempre existe una distancia invariante por traslaciones que genera la topología de E.

Demostr.: $\boxed{\Rightarrow}$ Si E es metrizable es separado, pues todo espacio métrico es separado y la familia $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $V_n=\{x\in E/d(x,0)\leq \frac{1}{n}\}$ es una base numerable de entornos de cero.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea E un espacio localmente convexo separado y $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de entornos de cero que podemos suponer formada por discos, pues dentro de cada entorno de cero existe un disco que también es entorno de cero. Sabemos también que son absorbentes.

Sea p_n, para cada $n\in\mathbb{N}$, la gauge de V_n.

Consideremos la función

$$f: x\in E \longmapsto f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\cdot \inf\{p_n(x),1\}\in\mathbb{R}$$

f está bien definida, pues la serie que la define es convergente, por estar majorada por la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$; aun más, es uniformemente convergente (Criterio de Weierstrass) pues $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}$ no depende de x.

La función f verifica las tres propiedades siguientes:

1) f es continua: pues es la suma de una serie uniformemente convergente de funciones continuas, pues $p_n(x)$ y 1 son continuas y el inferior de dos funciones continuas es continua.

2) $\forall x,y\in E$, $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$, por ser las p_n seminormas

3) $f(-x)=f(x)$, $\forall x\in E$, por ser $p_n(-x)=p_n(x)$.

A partir de la función f construimos la aplicación

$$d:(x,y)\in E\times E\longmapsto d(x,y)=f(x-y)\in\mathbb{R}.$$

Veamos que d es una distancia invariante por traslaciones de forma que la topología que induce en E coincide con la topología de E.

$\boxed{a}$ d es una distancia: $-\ d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$, pues

$$f(x-z+z-y)\leq f(x-z)+f(z-y)$$

$-\ d(x,y)=d(y,x)$ por 3).

$-\ d(x,y)\geq 0$ pues f es positiva.

- $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ pues $f(x-y)=0 \Rightarrow p_n(x-y)=0, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow x-y=0$, por ser el espacio separado (TEOREMA 4.7).

$\boxed{b}$ d es invariante por traslaciones pues
$$d(x+z,y+z)=f((x+z)-(y+z))=f(x-y)=d(x,y).$$

$\boxed{c}$ Una base de entornos de cero para la topología inducida por d en E está formada por conjuntos de la forma
$$U_n=\{x\in E / d(x,0)<\frac{1}{2^n}\},\ n\in\mathbb{N}$$
Puesto que $d(x,0)=f(x)$ se verifica que $U_n=f^{-1}(]-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}[)$, $n\in\mathbb{N}$
Por tanto, como f es continua (respecto de la topología original de E) y $]-\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}[$ es entorno de cero en $\mathbb{R}$ se verifica que los U_n son entornos de cero respecto de la topología original en E.

Veamos que $U_n\subset V_n$, $\forall n$, o bien, que si $x\notin V_n$ entonces $x\notin U_n$, con lo cual, siendo $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de 0-entornos respecto de la topología original en E, también $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ será base de 0-entornos para dicha topología.

Si $x\notin V_n$, tampoco pertenecerá a $\overset{\circ}{V}_n=\{x\in E / p_n(x)<1\}$, por ser V_n disco absorbente. Por tanto, $p_n(x)\geq 1$.

Por tanto, siendo $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}\inf\{p_k(x),1\}$, el sumando n-simo de esta serie es 2^{-n}, pues $p_n(x)\geq 1$.

Debe ser entonces $f(x)\geq 2^{-n}$. Por tanto, $d(x,0)=f(x)\geq\frac{1}{2^n}$, que prueba que $x\notin U_n$.

Se deduce de lo probado que todo entorno de cero para la topología original en E contiene a un V_n y, por tanto, a un U_n, que es entorno de cero para la topología inducida por la métrica; por tanto, todo entorno de cero para la topología de E es entorno de cero para la topología inducida por la métrica. Además, todo entorno de cero para esta topología contiene a un U_n que es entorno de cero para la topología de E. Por tanto, los entornos de 0 son los mismos para ambas topologías. Para cualquier punto x, los entornos de x para la topología de E son trasladados de los entornos de cero, y los entornos de x para la topología inducida en E por la métrica son trasladados de los 0-entornos. Por tanto, los entornos de x coinciden para ambas topologías. c.s.q.d.

Otra caracterización de los espacios localmente convexos metrizables en función de seminormas la da el siguiente

5.2. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo. E es metrizable si, y solo si, E es separado y su topología puede ser generada por una familia numerable de seminormas.

Demostr.: $\Rightarrow$] Supongamos que E es metrizable. Existe entonces una distancia $d: E\times E \to \mathbb{R}$ tal que $\{V_n\}_n$ es una base numerable de entornos de cero donde $V_n=\{x\in E \,/\, d(x,0)\leq \frac{1}{n}\}$. Sea para cada natural n un disco U_n tal que $U_n\subset V_n$, y U_n entorno de cero.

$\{U_n\}_n$ es una base de 0-entornos absolutamente convexos.

Sea la familia $\mathcal{P}=\{p_n\}_n$ donde p_n es la gauge de U_n.

La topología de E está generada por $\mathcal{P}$, que evidentemente es numerable. Como todo espacio métrico es separado queda probada la condición necesaria.

$\Leftarrow$] Sea E un espacio localmente convexo separado y $\mathcal{P}$ una familia numerable de seminormas que generan la topología de E.

Para cada par de naturales n, m y cada subfamilia finita $p_1,\dots,p_n$ de $\mathcal{P}$ consideremos el conjunto

$$\{x\in E \,/\, \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x) \leq \frac{1}{m}\}$$

Dichos conjuntos constituyen una familia numerable de 0-entornos, pues el conjunto de las partes finitas de $\mathcal{P}$ es numerable (Teorema 4.5.)

Además es base de entornos, pues una base de entornos de cero la constituyen los conjuntos de la forma $\{x\in E \,/\, \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x)\leq \varepsilon\}$, $\varepsilon>0$, $n\in\mathbb{N}$, $p_i\in\mathcal{P}$, y dado $\varepsilon>0$, existe $m\in\mathbb{N} \,/\, \frac{1}{m}\leq\varepsilon$ y por tanto

$$\{x\in E \,/\, \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x)\leq \frac{1}{m}\} \subset \{x\in E \,/\, \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x)\leq\varepsilon\}.$$

Luego, en virtud del TEOREMA 5.1, E es metrizable, pues E es separado y posee una base numerable de cero-entornos. c.q.d.

6. EJEMPLOS DE ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS.

Ejemplo 1: Todo espacio normado E es un espacio localmente convexo, que además es separado y metrizable. Sea $\|\cdot\|$ la norma que genera la topología de E. Una base de 0-entornos la forman los conjuntos

$$V_n=\{x\in E \,/\, \|x\|\leq \frac{1}{n}\}.$$

Los V_n son discos absorbentes. Se verifica que $V_{2n}+V_{2n}\subset V_n$.

Además dados V_n, V_m se verifica que $V_{\sup(n,m)}\subset V_n\cap V_m$.

Luego la familia $\{V_n\}_n$ define una topología compatible en E para la cual los V_n son entornos de cero, topología que coincide con la del espacio normado. Como los V_n son convexos el espacio es localmente convexo. Como $\{V_n\}_n$ es numerable el espacio es metrizable, pues la topología de un espacio normado es separada.

La familia unitaria $\mathcal{P}=\{\|\cdot\|\}$ genera la topología del espacio localmente convexo E.

Ejemplo 2: En lo sucesivo y mientras no se diga lo contrario denotaremos por $\mathbb{R}^n$ el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ dotado con la topología deducida de la norma $\|(x_1,\ldots,x_n)\| = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en Ω y valoradas en $\mathbb{K}$.

Para cada compacto $K \subset \Omega$ consideremos la seminorma en $\mathcal{C}(\Omega)$

$$q_K(f) = \max_{x\in K} |f(x)|$$

q_K está bien definida en virtud del teorema de Weierstrass de acotación de funciones continuas en un compacto. Trivialmente q_K es una seminorma. La familia de seminormas $\{q_K\}$ genera en $\mathcal{C}(\Omega)$ una topología localmente convexa separada.

Dicha topología no es normada.

Ejemplo 3: Para cada natural n denotamos por $\mathbb{N}^n$ el producto cartesiano $\mathbb{N}\times\overset{n}{\ldots}\times\mathbb{N}$. Supondremos que $0\in\mathbb{N}$. Dado $p=(p_1,\ldots,p_n)\in\mathbb{N}^n$ llamamos módulo o altura de p al número natural $|p| = p_1+\ldots+p_n$.

Sea $\Omega\neq\emptyset$ un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f:\Omega\to\mathbb{K}$ una función $|p|$ veces derivable. Denotaremos por $\partial^p f(x)$ ó $\partial^{(p_1,\ldots,p_n)}f(x)$ a la derivada parcial

$$\frac{\partial^{|p|} f(x)}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\cdots\partial x_n^{p_n}} \in \mathbb{K}$$

Con estas notaciones, dado $m\in\mathbb{N}$ denotaremos por $\mathcal{E}^m(\Omega)$ el conjunto de funciones escalares definidas en Ω que admiten derivadas parciales continuas hasta el orden m. $\mathcal{E}^m(\Omega)$ es espacio vectorial.

Para cada compacto $K\subset\Omega$ definimos en $\mathcal{E}^m(\Omega)$ la seminorma

$$q_K(f) = \max_{x\in K}\max_{|p|\leq m} |\partial^p f(x)|$$

La familia de seminormas $\{q_K\}_{K \text{ cpto} \subset\Omega}$ genera en $\mathcal{E}^m(\Omega)$ una topología localmente convexa separada. Notemos que

$$\mathcal{E}^0(\Omega) = \mathcal{C}(\Omega).$$

Ejemplo 4: Sea Ω abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{E}(\Omega)$ o $\mathcal{E}^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones escalares definidas en Ω que admiten derivadas parciales continuas de todos los órdenes en Ω.

Para cada compacto $K\subset\Omega$ y cada $m\in\mathbb{N}$ consideremos la seminorma

$$q_{Km}(f)=\max_{x\in K}\max_{0\le|p|\le m}|\partial^p f(x)|.$$

La familia $\{q_{Km}\}_{K\text{cpto}\subset\Omega,\, m\in\mathbb{N}}$ genera en $\mathcal{E}(\Omega)$ una topología localmente convexa separada.

Ejemplo 5: Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $K\subset\Omega$ compacto. Dada una función $f:\Omega\to\mathbb{K}$ definimos el soporte de f como

$$\text{sop}(f)=\overline{\{x\in\Omega/f(x)\neq 0\}}$$

Dado $m\in\mathbb{N}$ denotamos por $\mathcal{D}^m(K)$ el espacio vectorial de las funciones escalares definidas en Ω con derivada continua hasta el orden m y con soporte contenido en K.

Para cada $f\in\mathcal{D}^m(K)$ definimos $q(f)=\max_{x\in K}\max_{1\le|p|\le m}|\partial^p f(x)|$

Se prueba que q es una norma.

$(\mathcal{D}^m(K),q)$ es un espacio normado y, por tanto, un espacio localmente convexo separado. $\mathcal{D}^m(K)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}^m(\Omega)$.

Ejemplo 6: Sea K cpto $\subset\Omega$ abto $\subset\mathbb{R}^n$. Denotamos por $\mathcal{D}(K)$ ó $\mathcal{D}^\infty(K)$ el espacio vectorial de funciones escalares definidas en Ω con derivadas de todos los órdenes y soporte contenido en K.

Para cada natural m consideremos la seminorma

$$q_m(f)=\max_{x\in K}\max_{1\le|p|\le m}|\partial^p f(x)|,\quad f\in\mathcal{D}^\infty(K)$$

Se prueba que q_m tambien es una norma.

La familia $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ genera en $\mathcal{D}(K)$ una topología localmente convexa separada.

Ejemplo 7: Una funcion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}$ se dice de decrecimiento rápido si

$$\forall K\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0\ /\ \|x\|>\rho\Rightarrow(1+\|x\|^2)^K|f(x)|\le\varepsilon.$$

Dado $m\in\mathbb{N}$ denotaremos por $\mathcal{S}^m$ el espacio vectorial de las funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^n$ con derivada continua hasta el orden m y que son de decrecimiento rápido (los elementos de $\mathcal{S}^m$ y sus derivadas)

Para cada natural K definimos la seminorma

$$q_K(f)=\max_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{0\le|p|\le m}(1+\|x\|^2)^K|\partial^p f(x)|$$

q_K está bien definida, pues si $\|x\|>\rho$, $(1+\|x\|^2)^K|f(x)|$ esta acotado por ε y si $\|x\|\le\rho$ tenemos una función continua en un compacto, que es acotada.

La familia de seminormas $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ genera una topología localmente convexa separada y metrizable.

<u>Ejemplo 8</u>: Sea $\mathcal{S}$ el espacio vectorial de las funciones escalares definidas en $\mathbb{R}^n$ con derivada continua de todo orden y tales que cada función de $\mathcal{S}$ y todas sus derivadas son de decrecimiento rápido, es decir

$$\forall f\in\mathcal{S},\ \forall k\in\mathbb{N},\ \forall p\in\mathbb{N}^n,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\rho>0 \,/\, \|x\|>\rho \Rightarrow (1+\|x\|^2)^k\,|\partial^p f(x)|\leq\varepsilon.$$

Para cada par de naturales k y m consideremos la seminorma

$$q_{km}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{0\leq|p|\leq m}(1+\|x\|^2)^k\,|\partial^p f(x)|$$

Dotamos a $\mathcal{S}$ de la topología localmente convexa separada generada por la familia numerable de seminormas $\{q_{km}\}_{(k,m)\in\mathbb{N}^2}$.

<u>Ejemplo 9</u>: Sea $\mathcal{O}_M$ el espacio vectorial de las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con derivada continua de todo orden y tales que cada función de $\mathcal{O}_M$ y todas sus derivadas son de crecimiento lento, es decir que

$$\forall f\in\mathcal{O}_M,\ \forall p\in\mathbb{N}^n,\ \forall\varphi\in\mathcal{S},\ \varphi\cdot\partial^p f \text{ es acotada.}$$

Para cada $\varphi\in\mathcal{S}$ y cada $m\in\mathbb{N}$ consideremos la seminorma

$$q_{\varphi m}(f)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\max_{0\leq|p|\leq m}|\varphi(x)\,\partial^p f(x)|$$

La familia de seminormas $\{q_{\varphi m}\}_{\varphi\in\mathcal{S},m\in\mathbb{N}}$ genera en $\mathcal{O}_M$ una topología localmente convexa no metrizable, pues la familia de seminormas no es numerable.

<u>Ejemplo 10</u>: Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $m\in\mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ el espacio vectorial de funciones definidas en Ω con derivadas continuas hasta el orden m y que se anulan en la frontera de Ω. Evidentemente, una función definida en Ω (abierto) no está definida en su frontera. Entenderemos que anularse en la frontera significa que

$$(\forall f\in\mathcal{B}_0^m(\Omega))(\forall p\in\mathbb{N}^n,\ |p|\leq m),\ (\forall\varepsilon>0);\ (\exists K \text{ compacto}\subset\Omega) \text{ tal que } |\partial^p f(x)|\leq\varepsilon,\ \forall x\in\Omega-K. \quad (*)$$

Consideremos la seminorma (aun más, norma) definida por

$$q(f)=\sup_{x\in\Omega}\max_{0\leq|p|\leq m}|\partial^p f(x)|$$

La familia unitaria $\{q\}$ define en $\mathcal{B}_0^m$ una topología normada y, por tanto, localmente convexa, separada y metrizable.

(*) Observar que cada función de $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ y sus derivadas hasta el orden m se anulan en la frontera de Ω. Si $\Omega=\mathbb{R}^n$ esto significa que la función y sus derivadas tienden a cero cuando $\|x\|$ tiende a infinito.

Ejemplo 11: Denotamos por $\mathcal{B}_0(\Omega)$ ó $\mathcal{B}_0^{\infty}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones escalares definidas en el abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ con derivadas continuas de todo orden y tales que cada función de $\mathcal{B}_0(\Omega)$ y todas sus derivadas se anulan en la frontera de Ω.

Para cada natural m consideremos la seminorma (aun más, norma)

$$q_m(f)=\sup_{x\in\Omega}\max_{0\le|p|\le m}|\partial^p f(x)|$$

La familia numerable de seminormas $\{q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ genera en $\mathcal{B}_0(\Omega)$ una topología localmente convexa separada y metrizable.

Observar que $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{E}(\Omega)$; sin embargo, no es un subespacio topológico pues las seminormas que generan las topologías de ambos espacios son distintas. Lo mismo sucede con los espacios $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ y $\mathcal{E}^m(\Omega)$, para cada $m\in\mathbb{N}$.

Ejemplo 12: Sea Ω abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $m\in\mathbb{N}$. Denotaremos por $\mathcal{B}^m(\Omega)$ el espacio vectorial de funciones escalares definidas en Ω con derivadas continuas hasta el orden m y tales que cada función de $\mathcal{B}^m(\Omega)$ y sus derivadas hasta el orden m son acotadas.

Consideremos la seminorma (aun más, norma) definida por

$$q(f)=\sup_{x\in\Omega}\max_{0\le|p|\le m}|\partial^p f(x)|$$

Dicha norma genera en $\mathcal{B}^m(\Omega)$ una topología normada y, por tanto, localmente convexa, separada y metrizable.

Evidentemente $\mathcal{B}_0^m(\Omega)$ es un subespacio vectorial topológico de $\mathcal{B}^m(\Omega)$.

Ejemplo 13: Denotamos por $\mathcal{B}(\Omega)$ o $\mathcal{B}^{\infty}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones definidas en el abierto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ de clase infinito y tales que ellas y todas sus derivadas son acotadas. Para cada $m\in\mathbb{N}$ consideremos la seminorma (norma)

$$q_m(f)=\sup_{x\in\Omega}\max_{0\le|p|\le m}|\partial^p f(x)|$$

$\{q_m\}_m$ genera una topología localmente convexa en $\mathcal{B}(\Omega)$ separada y metrizable. $\mathcal{B}_0(\Omega)$ es subespacio vectorial topológico de $\mathcal{B}(\Omega)$.

OBSERVACION: Hasta ahora hemos considerado espacios de funciones escalares definidas en $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. En los tres siguientes ejemplos hablaremos de un tipo muy importante de funciones: las funciones lineales. Para ello estableceremos la notación siguiente: Dado un espacio vectorial E denotaremos por $\mathcal{L}(E)$ el espacio vectorial de los endomorfismos de E.

Ejemplo 14: Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Denotamos por $\mathcal{L}_{\|\cdot\|}(E)$ el espacio vectorial $\mathcal{L}(E)$ dotado de la topología deducida de la norma

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$$

Esta topología, que algunos autores llaman topología ultra-fuerte, es la topología más fina en $\mathcal{L}(E)$.

La topología ultra-fuerte es normada.

Ejemplo 15: Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Dado $y \in E$ fijo definimos en $\mathcal{L}(E)$ la seminorma (se puede probar que es norma)

$$q_y(f) = \|f(y)\|, \ \forall f \in \mathcal{L}(E).$$

La familia $\{q_y\}_{y \in E}$ genera en $\mathcal{L}(E)$ una topología, llamada fuerte, que es localmente convexa. Denotaremos por $\mathcal{L}_S(E)$ al espacio $\mathcal{L}(E)$ dotado con dicha topología.

Se prueba que dicha topología es completa si, y solo si, E es un espacio de Banach.

Ejemplo 16: Sea $(E, \langle\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert. Para cada par de puntos $x, y \in E$ consideremos la seminorma (aun más, norma)

$$q_{x,y}(f) = \|\langle f(x), y\rangle\|, \ \forall f \in \mathcal{L}(E).$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_W(E)$ el espacio $\mathcal{L}(E)$ dotado con la topología localmente convexa generada en $\mathcal{L}(E)$ por la familia de seminormas $\{q_{x,y}\}_{x,y \in E}$. Dicha topología se suele llamar topología débil en $\mathcal{L}(E)$.

El siguiente ejemplo nos muestra un espacio vectorial topológico localmente convexo de sucesiones. Como tales ya conocemos los siguientes:

- El espacio c_0: espacio vectorial de las sucesiones convergentes a cero dotado con la norma del máximo.
- El espacio l_1: espacio vectorial de las sucesiones absolutamente sumables con la norma $\|(a_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- El espacio vectorial l^p de sucesiones de potencia p-ésima absolutamente sumable con la norma $\|(a_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$, $(p \geq 1)$.
- El espacio l^∞ de sucesiones acotadas con la norma del máximo.
- El espacio c de las sucesiones convergentes con la norma del máximo.

Todos ellos son espacios normados y, por tanto, localmente convexos. Pero el siguiente ejemplo debido a KÖTHE, nos muestra un espacio de sucesiones no normado y localmente convexo.

Ejemplo 17: (Espacios escalonados o de KÖTHE).

Un conjunto de Köthe o sistema escalonado (stufen sistem) es un conjunto P de sucesiones en $\mathbb{K}$ satisfaciendo los axiomas siguientes

$\boxed{1}$ $\forall \rho=(\rho_n)\in P,\ \rho_n\geq 0$.

$\boxed{2}$ $\forall n\in\mathbb{N},\ \exists \rho\in P / \rho_n>0$.

$\boxed{3}$ $\forall \rho=(\rho_n),\ \eta=(\eta_n)\in P,\ \exists \zeta=(\zeta_n)\in P / \max(\rho_n,\eta_n)\leq \zeta_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Dado un conjunto de Köthe P se llama espacio de Köthe asociado al conjunto P por

$$\Lambda(P)=\{\xi=(\xi_n) / \sum_{n=0}^{\infty}\rho_n|\xi_n|<+\infty,\ \forall \rho=(\rho_n)\in P\}.$$

Se prueba que $\Lambda(P)$ es un espacio vectorial.

Para cada $\rho=(\rho_n)\in P$ se define la seminorma

$$q_\rho(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n|\xi_n|,\ \forall \xi\in\Lambda(P).$$

La familia $\{q_\rho\}_{\rho\in P}$ genera en $\Lambda(P)$ una topología localmente convexa. Se prueba como consecuencia de $\boxed{3}$ que $\{q_\rho\}_{\rho\in P}$ es una familia saturada y que la topología de $\Lambda(P)$ es separada (consecuencia de $\boxed{2}$).

Además $\Lambda(P)$ es completo. Si P es numerable, $\Lambda(P)$ es metrizable.

No obstante, no todo espacio vectorial topológico es localmente convexo. Cuando veamos el teorema de Hahn-Banach estaremos en condiciones de probar que el espacio $L^p]0,1[$, $p\in]0,1[$, de funciones Lebesgue-medibles en $]0,1[$ y de potencia p-ésima integrable absolutamente es un espacio vectorial topológico no localmente convexo.