TEMA 3º: DUALIDAD Y TEOREMA DE HAHN-BANACH

1. APLICACIONES LINEALES CONTINUAS. DUALES ALGEBRAICO Y TOPOLOGICO DE UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLOGICO.

A) Sean E y F espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $f: E \to F$ se dice lineal cuando se verifican las condiciones siguientes:

- $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

A las aplicaciones lineales de E en $\mathbb{K}$ (espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$) las llamaremos formas lineales.

1.1. PROPOSICION: 1) $Ker(f) = f^{-1}(\{0\})$ es un subespacio vectorial de E, si $f: E \to F$ es una aplicación lineal.

2) Si f es una forma lineal no nula en el espacio vectorial E entonces $Ker(f)$ es un subespacio propio maximal o hiperplano. (*)

Si H es un hiperplano en E, existe una forma lineal f en E tal que $Ker(f) = H$.

Demostr.: 1) Trivial.

2) - Sea f una forma lineal no nula sobre E. Sea $a \in E$ tal que $f(a) \neq 0$. Si probamos que $E = Ker(f) \oplus \langle a \rangle$ quedará visto que $Ker(f)$ es un hiperplano. Trivialmente $Ker(f) \cap \langle a \rangle = \{0\}$.

Ademas

$$\forall x \in E, \quad x = \frac{f(x)}{f(a)} a + \left(x - \frac{f(x)}{f(a)} a\right)$$

y $\frac{f(x)}{f(a)} a \in \langle a \rangle$ y $x - \frac{f(x)}{f(a)} a \in Ker(f)$.

- Sea H un hiperplano de E. Existe entonces $a \in E - H$ tal que $E = H \oplus \langle a \rangle$.

Todo elemento de E es de la forma $x + \lambda a$, $x \in H$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Consideremos la aplicación $f: x + \lambda a \in E \longmapsto \lambda \in \mathbb{K}$.

Trivialmente, f es una forma lineal en E y $Ker(f) = H$. c.s.q.d.

OBSERVACION: El apartado 2) de la proposición anterior nos asegura la existencia de una correspondencia biunívoca entre las formas lineales no nulas de un espacio vectorial y los hiperplanos del mismo. Esta correspondencia se mantiene desde el punto de vista topológico en un sentido que precisaremos más adelante.

(*) Es un subespacio maximal propio en el sentido de que no existe otro subespacio propio, es decir, distinto de E, que lo contenga estrictamente.

1.2. TEOREMA: Sean E y F espacios vectoriales topológicos y $f: E \to F$ una aplicación lineal. Entonces f es continua si, y sólo si, es continua en 0.

Demostr.: El teorema se reduce a probar que si f es continua en cero, entonces es continua en todo punto $a \in E$.

Sea pues $a \in E$ y $f(a)+V$ un entorno de $f(a)$, donde V es entorno de 0 en F. Siendo f continua en cero, existe U entorno de cero en E tal que $f(U) \subset V$, pues $f(0)=0$.

Puesto que $a+U$ es entorno de a y $f(a+U)=f(a)+f(U)$ queda probado que existe un entorno $(a+U)$ de a tal que $f(a+U) \subset f(a)+V$. csqd.

El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente de continuidad de una aplicación lineal entre espacios localmente convexos en términos de seminormas.

1.3. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos y $f: E \to F$ una aplicación lineal. Sea $\{q_i\}_{i \in I}$ una familia saturada de seminormas generando la topología de E y $\{r_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de seminormas generando la topología de F. Entonces, f es continua si, y sólo si,
$$\forall \lambda \in \Lambda,\ \exists i \in I,\ \exists c>0 \ / \ r_\lambda(f(x)) \leq c\, q_i(x),\ \forall x \in E.$$

Demostr.: $\Leftarrow$] Por el teorema anterior basta probar que f es continua en 0.
Sea, entonces, W un entorno de 0 en F.
En virtud de TEOREMA 4.5. (TEMA 2) existe $\epsilon>0$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ tales que
$$\{y \in F / \sup_{1 \leq j \leq n} r_{\lambda_j}(y) \leq \epsilon\} \subset W.$$
En virtud de la hipótesis, para cada λ_j existen $i_j \in I$ y $c_j>0$ tales que
$r_{\lambda_j}(f(x)) \leq c_j\, q_{i_j}(x)$, $\forall x \in E$. (I)

Sea $c = \max_{1 \leq j \leq n} c_j$ y $q_i = \max_{1 \leq j \leq n} q_{i_j}$.

$q_i \in \{q_i\}_{i \in I}$ por ser saturada.

Sea $V = \{x \in E / q_i(x) \leq \frac{\epsilon}{c}\}$. V es entorno de cero en E.
Veamos que $f(V) \subset W$, con lo cual quedaría probado que f es continua.
Dado $x \in V$, $q_i(x) \leq \frac{\epsilon}{c}$. Basta ver que $r_{\lambda_j}(f(x)) \leq \epsilon$, $j=1,\dots,n$
con lo cual $f(x) \in W$ como queremos ver.
Por (I), $r_{\lambda_j}(f(x)) \leq c_j\, q_{i_j}(x) \leq c\, q_i(x) \leq c\, \frac{\epsilon}{c} = \epsilon$.

Luego $f(x) \in \{y \in F / \sup_{1 \leq j \leq n} r_{\lambda_j}(y) \leq \epsilon\} \subset W$.

$\Rightarrow$ Supongamos que f es continua. Se trata de probar que
$\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists i \in I$, $\exists c>0$ / $r_\lambda(f(x)) \leq c\, q_i(x)$, $\forall x \in E$.

Sea, pues, $\lambda \in \Lambda$. El conjunto $W = \{y \in F / r_\lambda(y) \leq 1\}$ es entorno de cero en F. Siendo f continua existe un entorno de cero en E, que podemos tomar de la forma $V = \{x \in E / q_i(x) \leq \varepsilon\}$, por ser $\{q_i\}_{i\in I}$ saturada, tal que $f(V) \subset W$.

Existen entonces $i \in I$ y $c = \varepsilon^{-1} > 0$ tales que

$$r_\lambda(f(x)) \leq \varepsilon^{-1} q_i(x), \ \forall x \in E.$$

En efecto: Sea $x \in E$. Si fuese $q_i(x) = 0$ entonces $q_i(nx) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $nx \in V$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Debe ser entonces $r_\lambda(f(x)) = 0$, pues si $r_\lambda(f(x)) \neq 0$ tendríamos que $n f(x) \in W$, $\forall n$ (pues $nx \in V$, $\forall n$ y $f(V) \subset W$) y $n\, r_\lambda(f(x)) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ lo cual es imposible si $r_\lambda(f(x)) \neq 0$.

Por tanto, si $q_i(x) = 0$ la tesis es trivial.

Supongamos entonces $q_i(x) \neq 0$.

El vector $\frac{\varepsilon x}{q_i(x)}$ pertenece a V, pues $q_i\left(\frac{\varepsilon x}{q_i(x)}\right) = \varepsilon$.

Por tanto, $f\left(\frac{\varepsilon x}{q_i(x)}\right) = \frac{\varepsilon}{q_i(x)} f(x) \in W$. Es decir, $r_\lambda\left(\frac{\varepsilon}{q_i(x)} f(x)\right) \leq 1$

lo cual equivale a que $r_\lambda(f(x)) \leq \varepsilon^{-1} q_i(x)$. c.s.q.d.

Consecuencias inmediatas de este teorema son los siguientes

1.4. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo y $f: E \to \mathbb{K}$ una forma lineal en E. Sea $\{q_i\}_{i\in I}$ una familia saturada de seminormas generando la topología de E. Entonces f es continua si, y sólo si

$$\exists i \in I, \exists c>0 \ / \ |f(x)| \leq c\, q_i(x), \ \forall x \in E.$$

La demostración es trivial si tenemos en cuenta que $|\cdot|$ genera la topología localmente convexa de $\mathbb{K}$. Análogamente:

1.5. COROLARIO: Sean E y F espacios normados y $f: E \to F$ una aplicación lineal. Entonces f es continua si, y sólo si,

$$\exists c>0 \ / \ \|f(x)\|_F \leq c\, \|x\|_E, \ \forall x \in E.$$

C) **DEFINICION:** (Equicontinuidad)

Sean E y F espacios vectoriales topológicos. Sea L una familia de aplicaciones lineales continuas de E en F. Se dice que L es equicontinua si para cada entorno V de cero en F existe U entorno de 0 en E tal que

$$f(U) \subset V, \ \forall f \in L.$$

Se prueba que la familia L es equicontinua si, y solo si, para todo V entorno de cero, $\bigcap_{f\in L} f^{-1}(V)$ es entorno de cero en E.

Denotaremos por $L^{-1}(V)$ a $\bigcap_{f\in L} f^{-1}(V)$.

Es trivial la demostración de la siguiente proposición:

1.6. PROPOSICION: a) Si una familia L es equicontinua toda función $f\in L$ es continua.

b) Toda unión finita de familias equicontinuas es equicontinua.

c) Toda familia finita de funciones continuas es equicontinua.

Como consecuencia inmediata del teorema 1.3 tenemos el siguiente

1.7. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos cuyas topologías vienen definidas respectivamente por las familias de seminormas $\{q_i\}_{i\in I}$, $\{r_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, la primera de ellas saturada. Una familia L de aplicaciones lineales de E en F es equicontinua si, y solo si

$$\forall \lambda\in\Lambda,\ \exists i\in I,\ \exists c>0 \,/\, r_\lambda(f(x))\leq c\, q_i(x),\ \forall x\in E,\ \forall f\in L.$$

En los casos particulares de formas lineales sobre espacios localmente convexos o de aplicaciones lineales entre espacios normados se pueden enunciar para familias equicontinuas corolarios análogos a los 1.4. y 1.5.

D) Para formas lineales el siguiente teorema da dos caracterizaciones muy útiles

1.8. TEOREMA: 1) Una forma lineal f en el espacio localmente convexo E es continua si, y solo si, está acotada en un entorno de cero.

2) Una forma lineal f en el espacio localmente convexo E es continua si, y solo si, $|f(x)|\leq p(x)$, $\forall x\in E$, para una cierta seminorma continua p en E.

Demostr.: 1) $\Rightarrow$] Si la forma lineal f es continua, existe una seminorma continua p en E y una constante $c>0$ tal que $|f(x)|\leq c\, p(x)$, $\forall x\in E$.

Siendo p continua, $V=\{x\in E \,/\, p(x)\leq 1\}$ es entorno de cero.

Puesto que $\forall x\in V$, $|f(x)|\leq c\,p(x)\leq c$, queda visto que f es acotada en un entorno de cero.

$\Leftarrow$] Sea $\mathcal{P}$ una familia saturada de seminormas generando la topología de E.

Supongamos que f está acotada en un entorno U de cero.

Puesto que la familia $\{\{x\in E/p(x)\leq\varepsilon\} / \varepsilon>0, p\in\mathcal{P}\}$ constituye una base de entornos de cero, existen $p\in\mathcal{P}$ y $\varepsilon>0$ tal que $V=\{x\in E/p(x)\leq\varepsilon\}\subset U$ y, por tanto, f está acotada en V. Sea $c>0$ tal que $|f(x)|\leq c$, $\forall x\in V$.

Puesto que $V=\{x\in E / \varepsilon^{-1}p(x)\leq 1\}$ y $q=\varepsilon^{-1}p$ es una seminorma continua se deduce que existe una seminorma continua q para la cual $V=\{x\in E/ q(x)\leq 1\}\subset U$.

Probemos, por último, que $|f(x)|\leq c\, q(x), \forall x\in E$. (1)

Dado $x\in E$, si $q(x)=0$ entonces $q(nx)=0, \forall n\in\mathbb{N}$ y por tanto $nx\in V, \forall n\in\mathbb{N}$.

Por tanto, $|f(nx)|=n|f(x)|\leq c, \forall n\in\mathbb{N}$ que implica que $f(x)=0$, necesariamente.

La desigualdad (1) es trivial en este caso.

Si $q(x)\neq 0$, entonces $\frac{x}{q(x)}\in V$ y por tanto $\left|f\left(\frac{x}{q(x)}\right)\right|\leq c$, o lo que es lo mismo $|f(x)|\leq c\, q(x)$. csqd.

2) $\Rightarrow$) Sabemos que f es continua si, y sólo si, existe una seminorma q (de las que generan la topología de E) y existe $c>0$ tal que $|f(x)|\leq c\, q(x), \forall x\in E$.

Sea $p=c\, q$. p es una seminorma continua en E y verifica que

$$|f(x)|\leq p(x), \forall x\in E.$$

$\Leftarrow$) Si existe una seminorma continua p tal que $|f(x)|\leq p(x), \forall x\in E$ entonces $V=\{z / p(z)\leq \varepsilon\}$ es entorno de cero y $f(x)$ está acotada en V. Luego, en virtud de 1), f es continua. csqd.

1.9 TEOREMA: 1) Si f es una forma lineal en el espacio vectorial E entonces $|f|$ es una seminorma en E.

2) Si f es una forma lineal continua en el espacio localmente convexo E entonces $|f|$ es una seminorma continua en E.

Demostr.: 1) Trivial.

2) Siendo $f: E\to\mathbb{K}$ continua y $|\cdot|:\mathbb{K}\to\mathbb{R}$ continua, se deduce que $|f|$ es continua. csqd.

E) DUALES ALGEBRAICO Y TOPOLOGICO DE UN ESPACIO VECTORIAL TOPOLOGICO.

DEFINICIONES: 1) Sea E un espacio vectorial. Llamaremos DUAL ALGEBRAICO de E y lo denotaremos por E^* al espacio vectorial de todas las formas lineales sobre E.

2) Sea E un espacio vectorial topológico. Llamaremos DUAL TOPOLOGICO de E y lo denotaremos por E' al espacio vectorial de todas las formas lineales continuas sobre E.

Es trivial que E^* y E' son espacios vectoriales. En adelante, a E' le llamaremos simplemente dual de E y, cuando queramos referirnos a E^*, diremos dual algebraico.

Evidentemente $E'\subset E^*$. Se pueden definir topologías sobre E, llamadas débiles, de forma que $E'=E^*$, es decir, tal que toda forma lineal sobre E sea continua.

1.10. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial distinto de $\{0\}$. Entonces su dual algebraico E^* es distinto de $\{0\}$.

Demostr.: Sea $a \in E - \{0\}$. En virtud de TEOREMA 1.1 (TEMA 1º), existe una base de Hamel B en E tal que $a \in B$.
Para cada $x \in B$ definimos $f(x) = 1$. Esta relación genera de forma única una forma lineal $f: E \to \mathbb{K}$ que es no nula pues $f(a) \neq 0$. Luego $E^* \neq \{0\}$. csqd.
Cuando probemos el teorema de Hahn-Banach estaremos en condiciones de probar que si E es un espacio localmente convexo distinto de $\{0\}$ entonces su dual $E' \neq \{0\}$, y que existen espacios vectoriales topológicos no localmente convexos distintos de cero para los cuales $E' = \{0\}$.

2. TEOREMA DE HAHN-BANACH.

Antes de enunciar y probar el teorema de Hahn-Banach veamos una serie de resultados previos.

2.1. LEMA: Sean E un espacio vectorial, $f: E \to \mathbb{K}$ una forma lineal no nula y $H = Ker(f)$. Sea $a \in E$ tal que $f(a) = 1$. Sea $V = \{x \in E / |f(x)| < 1\}$, y U un 0-entorno equilibrado. Entonces, $(a+U) \cap H = \emptyset$ si, y solo si, $U \subset V$.

Demostr.: $\Rightarrow$) Si $U \not\subset V$, existe $x \in U$ tal que $x \notin V$. Notar que $f(x) \neq 0$, pues $x \notin V$.
Veamos que $(a+U) \cap H \neq \emptyset$ contra lo supuesto.
En efecto, el vector $y = a - \frac{x}{f(x)} \in (a+U) \cap H$ pues
$f\left(a - \frac{x}{f(x)}\right) = \frac{-f(x)}{f(x)} + f(a) = 0$, pues $f(a) = 1$. Luego $a - \frac{x}{f(x)} \in H$
Además $a - \frac{x}{f(x)} \in a + U$, pues siendo $x \in U$ y $\left|\frac{-1}{f(x)}\right| \leq 1$ (pues $x \notin V$) se tiene que $\frac{-x}{f(x)} \in U$, por ser U equilibrado. Luego $a - \frac{x}{f(x)} \in a + U$.

$\Leftarrow$) Basta probar que $\forall x \in U$, $f(a+x) \neq 0$.
Si $x \in U$, $x \in V$ y por tanto $|f(x)| < 1$.
Luego $f(a+x) = f(a) + f(x) \neq 0$, pues $f(a) = 1$.
Luego $\forall x \in U$, $a + x \notin Ker(f)$ y por tanto $(a+U) \cap H = \emptyset$. csqd.

2.2. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y f una forma lineal no nula en E. Entonces f es continua si, y solo si, $Ker(f)$ es cerrado.

Demostr.: $\Rightarrow$) Siendo $Ker(f) = f^{-1}(\{0\})$, $\{0\}$ un cerrado en $\mathbb{K}$ y f continua se deduce que $Ker(f)$ es cerrado.
$\Leftarrow$) Suponemos que $Ker(f)$ es cerrado y queremos probar que f es continua, para lo cual basta ver (TEOREMA 1.8) que es acotada en un en-

torno de cero. Sea $V=\{x\in E \,/\, |f(x)|<1\}$.

Siendo f no nula existe $a\in E$ tal que $f(a)=1$ (pues existe $b\in E$ tal que $f(b)\neq 0$ y por tanto $a=\frac{b}{f(b)}$ verifica que $f(a)=1$).

Puesto que $a\notin Ker(f)$ y $Ker(f)$ es cerrado existe un entorno equilibrado de cero U tal que $(a+U)\cap Ker(f)=\emptyset$.

Por el lema anterior, $U\subset V$.

Siendo U entorno de cero y $U\subset V$ se deduce que V es un entorno de cero en el cual f está acotada, por definición de V. Luego f es continua. c.q.d.

Este teorema pone de manifiesto la correspondencia biunívoca existente entre formas lineales continuas e hiperplanos cerrados en espacios localmente convexos.

2.3. PROPOSICION: En todo espacio vectorial topológico la clausura o adherencia de un subespacio es un subespacio.

Demostración: Sea M un subespacio del espacio vectorial topologico E. Se trata de probar que $\overline{M}+\overline{M}\subset\overline{M}$ y $\lambda\overline{M}\subset\overline{M}$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}$.

- $\forall x,y\in\overline{M}$, $x+y\in\overline{M}$: Basta ver que todo entorno de $x+y$ corta a M.
  Sea V entorno arbitrario de cero. Veamos que $[(x+y)+V]\cap M\neq\emptyset$.
  Sea U un entorno equilibrado de cero tal que $U+U\subset V$.
  Sean $x'\in(x+U)\cap M$ e $y'\in(y+U)\cap M$, que existen pues $x,y\in\overline{M}$.
  Entonces $x'+y'\in M$ por ser M subespacio y
  $$x'+y'\in(x+U)+(y+U)\subset(x+y)+V.$$
- $\forall x\in\overline{M}, \forall\lambda\in\mathbb{K}, \lambda x\in\overline{M}$: Si $\lambda=0$, entonces $\lambda x=0\in M\subset\overline{M}$, $\forall x\in\overline{M}$.
  Supongamos $\lambda\neq 0$. Se trata de probar que $\forall V$ entorno de cero, $(\lambda x+V)\cap M\neq\emptyset$.
  $\frac{1}{\lambda}V$ es entorno de cero y, por tanto, $\exists x'\in(x+\frac{1}{\lambda}V)\cap M$, pues $x\in\overline{M}$.
  Entonces $\lambda x'\in\lambda x+V$ y $\lambda x'\in M$, que prueba que $(\lambda x+V)\cap M\neq\emptyset$. c.q.d.

2.4 COROLARIO: En un espacio vectorial topológico un hiperplano o es cerrado o es denso.

Demostr.: Sea H un hiperplano. Se verifica que $H\subset\overline{H}\subset E$.
Puesto que $\overline{H}$ es un subespacio y H es un subespacio propio maximal se verifica que $\overline{H}=H$ o $\overline{H}=E$, es decir, o H es cerrado o denso. c.q.d.

OBSERVACION: Se deduce de este importante corolario que, puesto que en espacios localmente convexos a las formas lineales continuas corresponden biunívocamente hiperplanos cerrados, a las formas lineales no continuas corresponden hiperplanos densos.

El teorema de Hahn-Banach tiene dos versiones equivalentes llamadas geométrica y analítica. Aquí probaremos en primer lugar la versión geométrica y de ella deduciremos la analítica. Antes probaremos dos lemas fundamentales.

2.5. LEMA: Sea E un espacio localmente convexo real. Sea A un abierto convexo en E y H un subespacio vectorial que no corta a A. Entonces, o H es un hiperplano o bien existe $x \in E-H$ tal que la envolvente lineal de $H \cup \{x\}$ no corta a A.

Demostr.: Consideremos el conjunto
$$C = H + \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$$

C es abierto pues siendo A abierto, λA es abierto, $\forall \lambda>0$ y por tanto $\bigcup_{\lambda>0} \lambda A$ es abierto. Luego $C = \bigcup_{h\in H} (h + \bigcup_{\lambda>0} \lambda A)$ es abierto, pues $h + \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$ es abierto, $\forall h \in H$.

El conjunto $-C = \{-x \in E / x \in C\}$ es abierto como homotético de un abierto.

Trivialmente se prueba que $-C = H + \bigcup_{\lambda<0} \lambda A$

Veamos ahora que $C \cap (-C) = \emptyset$: supongamos que existiese $x \in C \cap (-C)$. Entonces $\exists h, h' \in H, \exists a, a' \in A, \exists \lambda, \lambda' > 0 \;/\; x = h + \lambda a = h' - \lambda' a'$.

Por tanto, $h' - h = \lambda a + \lambda' a' \in H$ por ser H subespacio y también $\frac{1}{\lambda+\lambda'}(h'-h) \in H$.

Además $\frac{1}{\lambda+\lambda'}(h'-h) \in A$, pues $h'-h = \lambda a + \lambda' a' \in \lambda A + \lambda' A \overset{*}{=} (\lambda+\lambda')A$, por ser A convexo. Luego $\frac{1}{\lambda+\lambda'}(h'-h) \in H \cap A$ en contra de que $H \cap A = \emptyset$.

Luego $C \cap (-C) = \emptyset$.

Necesariamente ocurrirá una de las proposiciones siguientes

i) $C \cup (-C) \cup H \neq E$

ii) $C \cup (-C) \cup H = E$

Veremos que i) $\Rightarrow (\exists x \in E-H / \langle H \cup \{x\} \rangle \cap A = \emptyset)$

e ii) $\Rightarrow$ H es un hiperplano

con lo cual acabará la demostración.

i) $\Rightarrow (\exists x \in E-H / \langle H \cup \{x\} \rangle \cap A = \emptyset)$:

Suponemos que $C \cup (-C) \cup H \neq E$. Sea $x \in E$ tal que $x \notin C \cup (-C) \cup H$.

Veamos que $\langle H \cup \{x\} \rangle \cap A = \emptyset$. Supongamos que no es cierto, es decir, que existe $y \in A$ tal que $y = h + \lambda x$, $h \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (*)

Por supuesto $\lambda \neq 0$, pues de ser cero se tendría que $y \in H \cap A$,

de que $A \cap H = \emptyset$. Supongamos que $\lambda > 0$: Entonces $x = \lambda^{-1} y - \lambda^{-1} h \in C$ pues $-\lambda^{-1} h \in H$ y $\lambda^{-1} y \in \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$, en contra de que $x \notin C \cup (-C) \cup H$.
Si fuese $\lambda < 0$ se probaría análogamente que $x \in (-C)$.
Deberá ser entonces $\langle H \cup \{x\} \rangle \cap A = \emptyset$.

ii) $\Rightarrow$ (H es un hiperplano):
Supongamos que $C \cup (-C) \cup H = E$. Si H no fuese hiperplano existiría $a \in E - H$ tal que $\langle H \cup \{a\} \rangle \neq E$.
Puesto que $a \notin H$ o bien $a \in C$ o $a \in (-C)$, por ii).
Supongamos que $a \in C$ (si $a \in -C$ sería análogo).
Sea $b \in E - \langle H \cup \{a\} \rangle$. Puesto que $b \notin H$, $b \in C$ ó $b \in -C$.
Supongamos que $b \in -C$ (si $b \in C$ su opuesto estaría en $-C$).
Consideremos la función

$$f : \lambda \in [0,1] \longmapsto f(\lambda) = (1-\lambda) a + \lambda b \in E.$$

f es continua por serlo las sumas y las homotecias en un espacio vectorial topológico.
Puesto que C y $-C$ son abiertos disjuntos en E, $I = f^{-1}(C)$ y $J = f^{-1}(-C)$ son abiertos en $[0,1]$ y son no vacíos ya que $0 \in I$ ($f(0) = a \in C$) y $1 \in J$ ($f(1) = b \in -C$).
Además $I \cap J = \emptyset$ pues $(-C) \cap C = \emptyset$.
Sea $\alpha = \sup I$, que existe por ser I acotado. Por la definición de supremo $\alpha \in Fr(\complement I)$, donde $\complement I$ es el complementario de I en $[0,1]$, que es no vacío, pues $I \neq [0,1]$ ya que $1 \in J$ y $I \cap J = \emptyset$.
Veamos que $\alpha \notin I \cup J$.
Si $\alpha \in I$ existiría un entorno de α contenido en I, pues I es abierto, lo cual contradice que $\alpha = \sup I$ (observar que $\alpha \neq 1$ pues a la izquierda de 1 hay puntos de J, por ser J abierto, e $I \cap J = \emptyset$). Luego $\alpha \notin I$.
Siendo $I \cap J = \emptyset$ se deduce que $J \subset \complement I$ y, por tanto, $J \subset \overset{\circ}{(\complement I)}$, pues J es abierto. Puesto que $\alpha \in Fr(\complement I)$ y $Fr(\complement I) \cap \overset{\circ}{\complement I} = \emptyset$ se deduce que $\alpha \notin \overset{\circ}{\complement I}$ y, por tanto, $\alpha \notin J$.
Luego $\alpha \notin I \cup J$ y, por tanto, $f(\alpha) \notin C \cup (-C)$(*). Luego

$$f(\alpha) = (1-\alpha) a + \alpha b \in H, \text{ es decir, } \exists h \in H / \alpha b = h - (1-\alpha) a$$

y en consecuencia, $b \in \langle H \cup \{a\} \rangle$, pues $\alpha \neq 0$, y esto está en contradicción con la elección de b.
Por tanto, H debe ser un hiperplano. c.s.q.d.

(*) Observar que f es inyectiva, pues si $\lambda, \mu \in [0,1]$ son tales que $f(\lambda) = f(\mu)$ se verifica que $(1-\lambda) a + \lambda b = (1-\mu) a + \mu b$ y por tanto $(\mu - \lambda) a = (\mu - \lambda) b$. Luego $\mu = \lambda$, pues $a \neq b$.

Antes de enunciar el segundo lema recordemos que todo espacio vectorial complejo posee una estructura de espacio vectorial real subyacente. Cuando hablemos de un subespacio vectorial real de un espacio vectorial complejo nos referiremos a un subespacio vectorial del espacio vectorial real subyacente. Entonces

$\boxed{\text{2.6. LEMA: Sea } E \text{ un espacio localmente convexo complejo y } H \text{ un hiperplano real de } E. \text{ Entonces } H\cap(iH) \text{ es un hiperplano complejo de } E.}$

Demostr.: Sea H un hiperplano real. Veamos que iH es también un hiperplano real.

Si H es un hiperplano real, dado $a\in E-H$ fijo se verifica que

$\forall z\in E, \exists x\in H, \exists \lambda\in\mathbb{R} \,/\, z = x+\lambda a.$

Entonces $iz = ix + i\lambda a$, $ix\in iH$, $ia\notin iH$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Puesto que iz recorre E cuando z recorre E (por ser $z\mapsto iz$ un homomorfismo de E en E) queda probado que iH es un hiperplano real, pues existe $a' = ia\in E-(iH)$ tal que $\forall iz\in E, \exists ix\in iH, \exists\lambda\in\mathbb{R} \,/\, iz = ix+\lambda a'$.

Queremos probar que existe $a\notin H\cap(iH)$ tal que

$\forall x\in E, \exists z\in H\cap(iH), \exists \delta\in\mathbb{C}, \cancel{\exists a\notin H\cap(iH)} \,/\, x = z+\delta a.$ (I)

Sea $a\in E-H$. Entonces $a\notin H\cap(iH)$.

Puesto que $a\notin H$, $ia\notin iH$.

Entonces, siendo iH un hiperplano real, existen $b\in iH$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ tales que

$$a = b+\alpha i a.$$

Veamos que $b+\alpha i b\notin H$:

$b+\alpha i b = (a-\alpha i a)+\alpha i(a-\alpha i a) = a+\alpha^2 a = (1+\alpha^2)a$ que no está en H pues $a\notin H$ y $1+\alpha^2\in\mathbb{R}$.

Puesto que $b\in iH$, $ib\in i^2H = -H = H$ y por tanto $\alpha i b\in H$, pues $\alpha\in\mathbb{R}$.

Entonces, $b\notin H$, pues si $b\in H$ entonces $b+\alpha i b\in H$ contra lo probado.

Puesto que $b\notin H$ y H es un hiperplano real, dado $x\in E$ arbitrario existen $y\in H$ y $\beta\in\mathbb{R}$ tales que

$$x = y+\beta b \qquad \text{(II)}$$

Además, $b\notin H \Rightarrow ib\notin iH$. Siendo iH un hiperplano real existen $z\in iH$ y $\gamma\in\mathbb{R}$ tales que

$$y = z+\gamma i b \qquad \text{(III)}$$

Siendo $z = y-\gamma i b$ se deduce que $z\in H$, pues $y\in H$, $\gamma\in\mathbb{R}$ e $ib\in H$ (pues $b\in iH$).

Luego $z\in H\cap(iH)$.

De (II) y (III) se deduce que $x = z+\gamma i b+\beta b = z+\gamma i(a-\alpha i a)+\beta(a-\alpha i a) \rightarrow$

$\Rightarrow x = z + (\gamma i + \alpha\gamma + \beta - \beta\alpha i)a$

Si tomamos $\delta = \gamma i + \alpha\gamma + \beta - \beta\alpha i \in \mathbb{C}$ queda probado (I). c.s.q.d.

Estamos en condiciones de probar el siguiente

2.7. TEOREMA: (de Hahn-Banach: versión geométrica).

Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Sea A un abierto convexo de E. Si M es un subespacio vectorial de E que no corta a A, entonces existe un hiperplano cerrado en E que contiene a M y no corta a A.

Demostr.: Para probar este teorema hemos de hacer la distinción entre los casos real y complejo.

I) CASO REAL: E es un espacio localmente convexo real. Sea $\mathcal{M}$ la familia de subespacios vectoriales de E que contienen a M y no cortan a A. $\mathcal{M}$ es no vacía pues $M \in \mathcal{M}$.

Consideremos en el conjunto $\mathcal{M}$ la relación de orden "inclusión". Trivialmente la inclusión es un orden inductivo pues toda cadena en $\mathcal{M}$ tiene cota superior (la unión de los elementos de la cadena).

El axioma de Zorn garantiza la existencia de un elemento maximal H en $\mathcal{M}$.

Puesto que $H \in \mathcal{M}$, es un subespacio de E que contiene a M y no corta a A.

H es un hiperplano, pues si no lo fuese, en virtud del 2.5. LEMA, existiría $x \notin H$ tal que $\langle H \cup \{x\} \rangle \cap A = \emptyset$, lo cual contradice la maximalidad de H.

Además H es cerrado, pues si no lo fuese, en virtud de COROLARIO 2.4, sería denso y cortaría al abierto A.

II) CASO COMPLEJO: E es un espacio vectorial localmente convexo complejo. Consideremos el espacio localmente convexo real subyacente. En virtud de I) existe un hiperplano real cerrado K que contiene a M y no corta a A. Sea $H = K \cap (iK)$. Por LEMA 2.6. H es un hiperplano complejo. Es cerrado pues K lo es e iK también, como imagen de K por el homeomorfismo $z \mapsto iz$. No corta a A pues K no corta a A. Por último, $H \supset M$, pues $K \supset M$ e $iK \supset iM = M$ por ser M subespacio (complejo) de E. c.s.q.d.

2.8. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{K}$. Entonces, todo subespacio cerrado M de E es la intersección de los hiperplanos que lo contienen.

Demostr.: Sea $\mathcal{F}$ la familia de hiperplanos de E que contienen a M. Por la propia definición de $\mathcal{F}$ se verifica que $M \subset \bigcap_{H\in\mathcal{F}} H$.

Veamos ahora que $\bigcap_{H\in\mathcal{F}} H \subset M$, o bien, que si $x \notin M$ entonces $x \notin \bigcap_{H\in\mathcal{F}} H$.

Sea $x \in E-M$. Siendo M cerrado existe un abierto convexo A de x que no corta a M. Por el teorema de Hahn-Banach existiría un hiperplano H que contiene a M y no corta a A; en particular, $x \notin H$ y, por tanto, $x \notin \bigcap_{H\in\mathcal{F}} H$. csqd.

Probaremos a continuación la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

2.9. TEOREMA: (de Hahn-Banach: versión analítica o de extensión).

Sea E un espacio vectorial y M un subespacio de E. Sea p una seminorma en E y f una forma lineal en M tal que $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in M$. Existe entonces una forma lineal f_1 en E que prolonga a f y tal que $|f_1(x)| \leq p(x), \forall x \in E$.

Demostr.: Consideremos sobre E la topología localmente convexa generada por la seminorma p. Es evidente que $U = \{x \in E / p(x) < 1\}$ es un entorno abierto y convexo de cero, pues p es continua.

Si excluimos el caso trivial $f=0$, para el que $f_1 = 0$ satisface la tesis del teorema, podemos asegurar que $\exists a \in M / f(a) = 1$.

Sea $V = \{x \in M / |f(x)| < 1\}$ y $N = \mathrm{Ker}(f) \subset M$.

Trivialmente $U \cap M \subset V$, pues $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in M$.

Entonces siendo $U \cap M$ un entorno equilibrado de 0 en M se verifica, en virtud del LEMA 2.1. que

$$(a + (U \cap M)) \cap N = \emptyset. \quad (\mathrm{I})$$

Como $N \subset M$ y $a \in M$ necesariamente será $(a+U) \cap N = \emptyset$, pues si $x = a + u \in (a+U) \cap N$, entonces $a + u \in M$ y por tanto $u \in M$ (pues $a \in M$) y sería $x \in (a + (U \cap M)) \cap N$ en contra de (I). Luego

$$(a+U) \cap N = \emptyset. \quad (\mathrm{II})$$

Sea $A = a + U$. A es abierto como trasladado del abierto U. Por la misma razón A es convexo. Luego A es un abierto convexo que no corta al subespacio N. En virtud de la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach existe un hiperplano H en E que contiene a N y no corta a A. Podemos tomar H cerrado.

Sea f_1 la forma lineal continua cuyo núcleo es H. Puesto que $H \cap A = \emptyset$ y $a = a+0 \in a+U = A$ se verifica que $f_1(a) \neq 0$ y podemos suponer que $f_1(a) = 1$, pues de lo contrario la forma lineal $\frac{1}{f_1(a)} f_1$, que define el mismo hiperplano H, verifica que $\frac{1}{f_1(a)} f_1(a) = 1$.

f_1 es pues una forma lineal y verifica que $f_1(a) = 1$.

Veamos que f_1 prolonga a f: Puesto que $a \in M - N$ y N es un hiperplano en M se verifica que $M = N \oplus \langle a \rangle$ y, por tanto, $f : M \to \mathbb{K}$ queda perfectamente determinada al saber que* vale cero en N (su núcleo) y 1 en a.

Puesto que f_1 se anula en N, pues $N \subset H = \mathrm{Ker}(f_1)$, y vale 1 en a se deduce que f_1 prolonga a f.

Falta probar que $|f_1(x)| \leq p(x), \forall x \in E$.

Puesto que $(a+U) \cap H = \emptyset$, por LEMA 2.1 se verifica que $U \subset \{x \in E / |f_1(x)| < 1\}$.

Es decir, si $x \in E$ es tal que $p(x) < 1$ entonces $|f_1(x)| < 1$.

Siendo $|f_1|$ una seminorma en E (TEOREMA 1.9), en virtud de PROPOSICION 4.1. (TEMA 2º), se verifica que $|f_1(x)| \leq p(x), \forall x \in E$. c.s.q.d.

Obtendremos a continuación una serie de corolarios muy importantes.

2.10. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{K}$. Sean M un subespacio de E y f una forma lineal continua sobre M. Entonces f admite una extensión lineal f_1 continua en todo el espacio E.

Demostr.: Siendo f continua en M, dado $\varepsilon = 1$ existe un entorno convexo y equilibrado U de cero en E tal que

$$x \in U \cap M \Rightarrow |f(x)| \leq 1 \quad (\mathrm{I}) \qquad (*)$$

Sea p_U la gauge del disco U. p_U es una seminorma continua.

Probemos que $|f(x)| \leq p_U(x), \forall x \in M$. (II)

En efecto, pues si existiese $x \in M$ tal que $|f(x)| > p_U(x)$, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $p_U(x) < \alpha < |f(x)|$ se tendría que $\frac{x}{\alpha} \in U \cap M$, pues $x \in M$ y $p_U(\frac{x}{\alpha}) < 1$, y $|f(\frac{x}{\alpha})| > 1$ en contra de (I).

Por el TEOREMA 2.9. existe una extensión f_1 de f en E tal que $|f_1(x)| \leq p_U(x), \forall x \in E$.

Por tanto, en virtud de TEOREMA 1.8, f_1 es continua. c.s.q.d.

2.11. COROLARIO: Sea E un espacio vectorial y $a \in E$. Sea p una seminorma en E. Entonces existe una forma lineal f_1 en E tal que $f_1(a) = p(a)$ y $|f_1(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

Demostr.: Si $a = 0$ la forma lineal nula satisface la tesis del teorema. Supongamos que $a \neq 0$.
Sea $M = \langle a \rangle = \{\lambda a \,/\, \lambda \in \mathbb{K}\}$.
Consideremos la forma lineal sobre M

$$f : \lambda a \in M \longmapsto f(\lambda a) = \lambda p(a) \in \mathbb{K}.$$

Es trivial que $|f(\lambda a)| \leq p(\lambda a)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
Por el teorema de Hahn-Banach existe una extensión f_1 de f en E, y por tanto $f_1(a) = f(a) = p(a)$, tal que $|f_1(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$. c.s.q.d.

Dos resultados centrales en la teoría de la dualidad son los siguientes:

2.12. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo separado distinto de $\{0\}$. Entonces, su dual topológico E' es distinto de $\{0\}$.

Demostr.: Sea $a \in E - \{0\}$. Siendo E separado existe una seminorma continua p en E tal que $p(a) > 0$. Por el corolario anterior existe una forma lineal f en E tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$ y $f(a) = p(a)$.
Siendo $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x$, f es continua (TEOREMA 1.8.).
Siendo $f(a) = p(a) \neq 0$ se deduce que $f \neq 0$. Luego $f \in E' - \{0\}$. c.s.q.d.

2.13. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo separado. Si $f(a) = 0$, $\forall f \in E'$ entonces $a = 0$.

Demostr.: Si fuese $a \neq 0$, por el corolario anterior existiría $f \in E' - \{0\}$ tal que $f(a) \neq 0$, en contra de la hipótesis. Luego $a = 0$. c.s.q.d.
Otra versión del teorema de Hahn-Banach es

2.14. TEOREMA: (de Hahn-Banach: forma de separación)
Sea E un espacio localmente convexo y sean A y B dos conjuntos convexos disjuntos tal que al menos uno de ellos es abierto. Entonces existe una forma lineal continua f en E tal que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Demostr.: Siendo A y B disjuntos entonces $0 \notin A - B = \{x - y \,/\, x \in A, y \in B\}$, pues si $x \in A$ e $y \in B$ verifican $x - y = 0$ se tendría $x = y$ y por tanto $A \cap B \neq \emptyset$ contra lo supuesto. Supongamos que A es abierto (ó A ó B era abierto).
Entonces $A - B = \bigcup_{x \in B} (A - \{x\})$ es abierto, pues $A - \{x\}$ es abierto, $\forall x \in B$.
Además, puesto que A y B son convexos, $A - B$ también lo es.

Puesto que $\{0\}$ es un subespacio vectorial de E que no corta al abierto convexo $A-B$ se verifica, en virtud del teorema de Hahn-Banach (versión geométrica), que existe un hiperplano cerrado H en E tal que $H \cap (A-B) = \phi$.

Sea f una forma lineal continua en E tal que $Ker(f) = H$ (evidentemente existe f).

Veamos que $f(A) \cap f(B) = \phi$.

Si fuese $f(A) \cap f(B) \neq \phi$ existirían $x \in A$, $y \in B$ tales que $f(x) = f(y)$ y por tanto, $f(x-y) = 0$. Luego $x-y \in H \cap (A-B)$ en contra de que $H \cap (A-B) = \phi$. Luego $f(A) \cap f(B) = \phi$. csqd.

Antes de obtener consecuencias importantes de este teorema probemos la siguiente

2.15. PROPOSICION: a) Sea E un espacio vectorial topológico y f una forma lineal continua no nula en E. Entonces f es abierta, es decir, transforma abiertos de E en abiertos de $\mathbb{K}$.

b) Sea E un espacio localmente convexo. Entonces el interior de un entorno convexo de cero es un entorno convexo de cero (por supuesto, abierto).

Demostr.: a) Sea $f \in E' - \{0\}$ y A un abierto de E.

Para ver que $f(A)$ es abierto en $\mathbb{K}$ basta ver que para todo $x \in A$ existe un entorno de $f(x)$ en $\mathbb{K}$ contenido en $f(A)$.

Dado $x \in A$ existe un entorno U de cero tal que $x + U \subset A$.

Siendo $f \neq 0$ existe $a \in E$ tal que $f(a) = 1$.

Puesto que U es absorbente (todo entorno de cero lo es) existe $\alpha > 0$ tal que $\lambda a \in U$ siempre que $|\lambda| \leq \alpha$.

Veamos que $[f(x)-\alpha, f(x)+\alpha] \subset f(A)$ con lo cual acabará la demostración.

$\forall \lambda \in [-\alpha, \alpha]$, $f(x) + \lambda = f(x + \lambda a) \in f(x+U) \subset f(A)$.

b) Sea E un espacio localmente convexo y U un entorno de cero convexo. Veamos que $\mathring{U}$ es convexo (trivialmente es entorno de cero).

Sean $x, y \in \mathring{U}$ y $\lambda, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$. Se trata de probar que $\lambda x + \mu y \in \mathring{U}$, es decir, que existe V entorno de cero tal que $(\lambda x + \mu y) + V \subset U$.

Puesto que $x, y \in \mathring{U}$, existen V_1, V_2 entornos de cero que podemos tomar convexos tales que $x + V_1 \subset U$ e $y + V_2 \subset U$.

Sea $V = V_1 \cap V_2$. V es un entorno de cero convexo. Por tanto, $\lambda V + \mu V = (\lambda + \mu) V = V$

Veamos que $(\lambda x + \mu y) + V \subset U$, con lo cual acabará la demostración.

$(\lambda x + \mu y) + V = (\lambda x + \lambda y) + (\lambda + \mu) V = (\lambda x + \lambda y) + (\lambda V + \mu V) = \lambda (x + V) + \mu (x + V) \subset$

$\subset \lambda U + \mu U = U$, por ser U convexo. csqd.

OBSERVACION: Se deduce del apartado b) de la proposición anterior que en todo espacio localmente convexo existe una base de 0-entornos abiertos y convexos.

2.16. COROLARIO: Sea B un conjunto convexo en el espacio localmente convexo E y sea $x \in E - \overline{B}$. Entonces existe una forma lineal continua f en E tal que $f(x) \notin \overline{f(B)}$

Demostr.: Si $x \notin \overline{B}$ existe un entorno U de cero que podemos tomar abierto y convexo tal que $(x+U) \cap B = \emptyset$. Puesto que $x+U$ es abierto, en virtud del TEOREMA 2.14., existe una forma lineal continua f en E tal que

$$f(x+U) \cap f(B) = \emptyset.$$

Siendo $f(x+U) = f(x) + f(U)$ y $f(U)$ abierto por ser U abierto y f abierta (PROPOSICION 2.15) se deduce que existe un entorno de $f(x)$ $(f(x)+f(U))$ que no corta a $f(B)$ y, por tanto, $f(x) \notin \overline{f(B)}$. csqd.

2.17. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo y B un disco en E. Entonces si $x \notin \overline{B}$ existe una forma lineal continua f en E tal que

$$|f(y)| \leq 1, \forall y \in B \quad y \quad f(x) > 1$$

Demostr.: Siendo B convexo, por el corolario anterior existe una forma lineal continua g tal que $g(x) \notin \overline{g(B)}$. (I)

Sea $\alpha = \sup\{|g(y)| / y \in B\}$. Veamos que $\alpha < |g(x)|$.

Siendo B absolutamente convexo y g una forma lineal, $g(B)$ es absolutamente convexo en $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $g(B)$ es un intervalo centrado en el origen, trivialmente.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $g(B)$ es un círculo de radio α centrado en O, por ser absolutamente convexo. Vamos a probarlo: Trivialmente $g(B) \subset \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq \alpha\}$.

Además, si $z \in g(B)$, $e^{i\theta} z \in g(B)$, $\forall \theta \in [0, 2\pi[$, pues $|e^{i\theta}| = 1$ y $g(B)$ es equilibrado; en otras palabras, la circunferencia de radio $|z|$ está contenida en $g(B)$. Además, $\forall z \in g(B)$, $\{\lambda z / \lambda \in [0,1]\} \subset g(B)$, por ser $g(B)$ equilibrado, es decir los radios también están contenidos en $g(B)$. Luego $\{z \in \mathbb{C} / |z| < \alpha\} \subset g(B)$.

En cualquier caso ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$), si fuese $\alpha \geq |g(x)|$ se verificaría que $g(x) \in \overline{g(B)}$ en contra de (I). Luego $\alpha < |g(x)|$.

Si $\alpha \neq 0$, la forma lineal continua

$$f = \frac{|g(x)|}{\alpha\, g(x)}\, g$$

verifica que $|f(y)| \leq 1$, $\forall y \in B$, y $f(x) > 1$.

Si $\alpha = 0$ la forma lineal continua

$$f = \frac{2}{g(x)}\, g$$

satisface la tesis del teorema pues $f(x) = 2 > 1$ y $|f(y)| = 0$, $\forall y \in B$, pues $g(y) = 0$, $\forall y \in B$, por ser $\alpha = 0$. csqd.

2.18. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{R}$. Sean A y B conjuntos convexos disjuntos en E. Si A es abierto existe una forma lineal continua f en E y existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > \alpha$, $\forall x \in A$ y $f(x) \leq \alpha$, $\forall x \in B$.

Demostr.: Por el teorema general de separación de Hahn-Banach existe una forma lineal continua f tal que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Es trivial que todo conjunto convexo en $\mathbb{R}$ es un intervalo.

Puesto que A y B son convexos y f es una forma lineal real se deduce de lo anterior que $f(A)$ y $f(B)$ son convexos y, por tanto, intervalos en $\mathbb{R}$.

Además, por PROPOSICION 2.15.a), f es abierta y, por tanto, $f(A)$ es abierto.

Puesto que $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ se verificarán uno de los dos casos siguientes

1) $f(x) < f(y)$, $\forall x \in B, \forall y \in A$.

2) $f(y) < f(x)$, $\forall x \in B, \forall y \in A$.

Supongamos que se da el primer caso y probemos que f verifica la tesis, (si se verificase 2) $-f$ verificaría la tesis).

Sea $\alpha = \inf\{f(x) / x \in A\}$.

Entonces $f(x) \leq \alpha$, $\forall x \in B$ pues $f(x) < f(y)$, $\forall x \in B, \forall y \in A$.

Además, por definición de α, $f(x) \geq \alpha$, $\forall x \in A$. Pero podemos decir aún más, $f(x) > \alpha$, $\forall x \in A$, pues si existiese $x \in A$ tal que $f(x) = \alpha$, siendo $f(A)$ abierto, existiría un entorno de $\alpha = f(x)$, $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$, contenido en $f(A)$, en contra de que $\alpha = \inf f(A)$. c.s.q.d.

3. APENDICE: Demostración directa de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Ejemplo de un espacio vectorial topológico no localmente convexo.

A) VERSION ANALITICA DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH:

3.1. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial, L un subespacio de E, p una seminorma en E y f_0 una forma lineal definida en L tal que $|f_0(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in L$. Entonces f_0 admite una prolongación f en E tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in E$.

Demostr.: 1) CASO REAL: Probemos primeramente que si $z \notin L$, f_0 se puede prolongar a una forma lineal f en el subespacio $L' = \langle L \cup \{z\} \rangle$ de forma que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in L'$. Los elementos de L' son de la forma $y = x + \lambda z$, $x \in L$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y cualquier extensión f de f_0 en L' debe verificar que $f(y) = f_0(x) + \lambda f(z)$.

Tratemos de hallar $c = f(z)$ tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in L'$.

Basta hallar c tal que $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in L'$, pues entonces se verifica que

$-f(x) = f(-x) \leq p(-x) = p(x)$, y por tanto $|f(x)| \leq p(x)$.

Dado $y = x + \lambda z$ consideraremos dos casos:

- $\lambda > 0$: La condición $f(y) \leq p(y)$, equivale a que $f_0(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z)$ que equivale a que $f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right)$, o bien $c \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

- $\lambda < 0$: Sea $\lambda = -\rho$, $\rho > 0$.

$$f(y) \leq p(y) \Leftrightarrow f_0(x) + \lambda c \leq p(x + \lambda z) \Leftrightarrow f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c \geq \frac{1}{-\rho}\, p(x - \rho z) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c \geq -p\left(\frac{x}{\rho} - z\right) \Leftrightarrow f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) + c \geq -p\left(-\frac{x}{\lambda} - z\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c \geq -p\left(-\frac{x}{\lambda} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Por tanto, el c buscado debe verificar que

$$-p\left[-\frac{x}{\lambda} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq c \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right), \ \forall x \in L. \quad (I)$$

Si probamos que $-p\left(-\frac{x}{\lambda} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + z\right) - f_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ quedará visto que existe una prolongación f de f_0 a L' tal que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in L'$.

Dados $y, y' \in L$, $f_0(y - y') = f_0(y) - f_0(y') \leq p(y - y') = p[(y+z) + (-y'-z)] \leq$
$\leq p(y+z) + p(-y'-z)$

lo que equivale a que

$$-f_0(y') - p(-y'-z) \leq -f_0(y) + p(y+z), \ \forall y, y' \in L.$$

Por tanto

$$c' = \sup_{y' \in L} \{-p(-y'-z) - f_0(y')\} \leq \inf_{y \in L} \{-f_0(y) + p(y+z)\} = c''.$$

Tomando $c \in [c', c'']$, se satisface (I) para

Para probar el caso real llamaremos $\operatorname{codim} L = \dim E - \dim L$ y distinguiremos tres casos:

1.1.) $\operatorname{codim} L = n \in \mathbb{N}$: En este caso podemos expresar

$$E = L \oplus \langle \{x_1, \ldots, x_n\} \rangle.$$

El teorema en este caso es una trivial inducción finita a partir de lo probado anteriormente. Basta prolongar $f_0 : L \to \mathbb{R}$ a una forma lineal $f_1 : L \oplus \langle x_1 \rangle \to \mathbb{R}$ y así sucesivamente hasta llegar a $E = (L \oplus \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle) \oplus \langle x_n \rangle$, de forma que todas estas extensiones satisfagan la acotación.

1.2.) codim $L = \aleph_0$ ($=$ card $\mathbb{N}$): En este caso existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en E de forma que

$$E = L \oplus \langle\{x_n / n\in\mathbb{N}\}\rangle$$

Llamando $L_n = L \oplus \langle x_1, \dots, x_n\rangle$, $\forall n\in\mathbb{N}$, en virtud de 1.1.) existe una prolongación f_n de f_0 en L_n tal que $|f_n(x)| \leq p(x)$, $\forall x\in L_n$.
Puesto que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ podemos definir para cada $x\in E$
$f(x) = f_n(x)$ si $x\in L_n$. Esta aplicación f está bien definida pues f_n prolonga a f_{n-1}, $\forall n\geq 1$. Trivialmente f es una forma lineal en E que verifica que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x\in E$.

1.3.) codim $L > \aleph_0$: Denotaremos por $\mathcal{F}$ el conjunto de las extensiones f de f_0 a subespacios D_f de E que contienen a L de forma que $|f(x)| \leq p(x)$. En $\mathcal{F}$ consideremos el orden $\preccurlyeq$ definido por

$$(f \preccurlyeq g) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (D_f \subset D_g \;\wedge\; g|_{D_f} = f)$$

Trivialmente $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\preccurlyeq$ es un orden en $\mathcal{F}$ de forma que toda cadena en $\mathcal{F}$ posee cota superior. Por el lema de Zorn existe un elemento $f\in\mathcal{F}$ maximal. f es la forma lineal buscada:
$D_f = E$ pues de lo contrario existiría $x\notin D_f$ y f se podría prolongar al subespacio $\langle D_f \cup \{x\}\rangle$ manteniendo la acotación, en contra del carácter maximal de f. Que f es forma lineal y verifica que $|f(x)| \leq p(x)$, $\forall x\in E$ es trivial por la definición de $\mathcal{F}$.

2) CASO COMPLEJO: Siendo E un espacio vectorial complejo, podemos considerar en él la estructura de espacio real subyacente. Cuando queramos referirnos a una estructura vectorial u otra las distinguiremos poniendo $E_{\mathbb{C}}$ ó $E_{\mathbb{R}}$. La misma observación se puede hacer para L. Evidentemente, $E_{\mathbb{C}}$ y $E_{\mathbb{R}}$ son iguales como conjuntos.
Tenemos una forma lineal $f_0 : L_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ tal que $|f_0(x)| \leq p(x)$, $\forall x\in L_{\mathbb{C}}$.
Consideramos la aplicación

$$f_{0\mathbb{R}} : x\in L \longmapsto f_{0\mathbb{R}}(x) = \operatorname{Re} f_0(x) \in \mathbb{R}$$

Evidentemente $f_{0\mathbb{R}}$ es una forma lineal en $L_{\mathbb{R}}$. Verifica además que $|f_{0\mathbb{R}}(x)| \leq p(x)$, $\forall x\in L$, pues $|f_{0\mathbb{R}}(x)| \leq |f_0(x)|$, $\forall x\in L$.
Existe, entonces, en virtud de 1), una forma lineal $f_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ que prolonga a $f_{0\mathbb{R}}$ y tal que $|f_{\mathbb{R}}(x)| \leq p(x)$, $\forall x\in E$.
Definimos sobre $E_{\mathbb{C}}$ la aplicación:

$$f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix).$$

Veamos que f es la forma lineal buscada:

- f es una forma lineal en $E_{\mathbb{C}}$: Si $x, y \in E$, entonces

$f(x+y) = f_{\mathbb{R}}(x+y) - i f_{\mathbb{R}}(ix+iy) = f_{\mathbb{R}}(x) + f_{\mathbb{R}}(y) - i f_{\mathbb{R}}(ix) - i f_{\mathbb{R}}(iy) =$
$= f(x) + f(y)$

Si $a, b \in \mathbb{R}$, $f((a+bi)x) = f_{\mathbb{R}}(ax+bix) - i f_{\mathbb{R}}((a+ib)ix) =$

$= a f_{\mathbb{R}}(x) + b f_{\mathbb{R}}(ix) - i a f_{\mathbb{R}}(ix) + i b f_{\mathbb{R}}(x) =$

$= a(f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)) + b(f_{\mathbb{R}}(ix) + i f_{\mathbb{R}}(x)) =$
$= a(f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)) + ib(f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)) = (a+bi) f(x)$

- f prolonga a f_0: Dado $x \in L$

$f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix) = f_{0\mathbb{R}}(x) - i f_{0\mathbb{R}}(ix) = Re(f_0(x) - i f_0(ix)) =$
$= Re\, f_0(x) - i\, Re\, f_0(ix) = Re\, f_0(x) - i\, Re\, i f_0(x) \quad (\mathrm{II})$

Si $f_0(x) = a+bi$, de (II) se deduce que

$f(x) = Re\, f_0(x) - i\, Re\, i f_0(x) = a - i\, Re(ia - b) = a + bi = f_0(x)$

- $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in E$: Supongamos que existiese $x_0 \in E$ tal que $|f(x_0)| > p(x_0)$. $f(x_0)$ se puede expresar en la forma $\rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$.

Sea $y_0 = e^{-i\theta} x_0$.

Puesto que $|\rho e^{i\theta}| = \rho |e^{i\theta}| = \rho$ $(|e^{i\theta}| = 1)$ se tendría que

$\rho > p(x_0)$

Se tendría entonces que

$f_{\mathbb{R}}(y_0) = Re\, f(y_0) = Re[e^{-i\theta} f(x_0)] = Re[e^{-i\theta} \rho e^{i\theta}] = \rho > p(x_0) = p(y_0)$

en contra de que $|f_{\mathbb{R}}(x)| \leq p(x), \forall x \in E$.

Luego $|f(x)| \leq p(x), \forall x \in E$. csqd.

B) DOS EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES TOPOLÓGICOS NO LOCALMENTE CONVEXOS:

EJEMPLO 1º: Consideremos el espacio vectorial $E = \mathcal{C}([0,1])$ de las funciones continuas definidas en $[0,1]$ valoradas en $\mathbb{K}$ sobre $\mathbb{K}$.

Veamos a definir en E una topología compatible no localmente convexa. Basta para definir una topología en E, construir la familia de entornos de cero. Dados $\varepsilon, \delta > 0$ consideremos el conjunto

$$V_{\varepsilon\delta} = \{ f \in E \,/\, |f(t)| < \varepsilon, \forall t \notin A = \bigcup_{i=1}^{\infty}]\alpha_i, \beta_i[\text{ con } \sum_{i=1}^{\infty} (\beta_i - \alpha_i) < \delta \}.$$

El conjunto A es, en general, distinto para cada $f \in V_{\varepsilon\delta}$.

Equivalentemente, una función f de E pertenece a $V_{\varepsilon\delta}$ si, y solo si, el conjunto de los puntos $t \in [0,1]$ en los que $|f(t)| \geq \varepsilon$ puede ser recubierto mediante una unión numerable de intervalos abiertos de forma que la suma de sus longitudes de dichos intervalos es menor que δ.

La familia $\{V_{\varepsilon\delta}\}_{\varepsilon>0,\delta>0}$ verifica las siguientes propiedades:

i) Es base de filtro, es decir, dados $V_{\varepsilon'\delta'}$ y $V_{\varepsilon''\delta''}$ existe $V_{\varepsilon\delta}$ tal que $V_{\varepsilon\delta}\subset V_{\varepsilon'\delta'}\cap V_{\varepsilon''\delta''}$: Es trivial, basta tomar $\varepsilon=\min(\varepsilon',\varepsilon'')$ y $\delta=\min(\delta',\delta'')$.

ii) $\forall\varepsilon,\delta>0$, $V_{\varepsilon\delta}$ es equilibrado: Si $\lambda\in\mathbb{K}$ y $|\lambda|\leq 1$, entonces $\lambda V_{\varepsilon\delta}\subset V_{\varepsilon\delta}$ trivialmente, pues $|\lambda f(t)|\leq|f(t)|$, $\forall t\in[0,1]$.

iii) $\forall\varepsilon,\delta>0$, $V_{\varepsilon\delta}$ es absorbente: Puesto que $V_{\varepsilon\delta}$ es equilibrado basta probar que

$$\forall f\in E,\ \exists\alpha>0 \,/\, \alpha f\in V_{\varepsilon\delta}.$$

Si $f\in E$, $\exists M>0 \,/\, |f(t)|<M$, $\forall t\in[0,1]$.

Si $\alpha=\varepsilon M^{-1}$, se tiene que $|\alpha f(t)|<\varepsilon M^{-1}M=\varepsilon$, $\forall t\in[0,1]$ y, por tanto, $\alpha f\in V_{\varepsilon\delta}$.

iv) $\forall V_{\varepsilon\delta}$, $\exists V_{\varepsilon'\delta'} \,/\, V_{\varepsilon'\delta'}+V_{\varepsilon'\delta'}\subset V_{\varepsilon\delta}$: Basta tomar $\varepsilon'=\varepsilon/2$ y $\delta'=\delta/2$.

De estas cuatro propiedades se deduce que existe en E una topología compatible para la cual $\{V_{\varepsilon\delta}\}_{\varepsilon,\delta>0}$ es base de 0-entornos.

Veamos que esta topología no es localmente convexa, es decir, que no existe una base de 0-entornos convexos. Razonaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe una base $\mathcal{U}$ de 0-entornos convexos en E.

Dados $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ consideremos el entorno $V_{\varepsilon\delta}$. Tomaremos $\delta<1/2$.

Existe entonces $U\in\mathcal{U}$ tal que $U\subset V_{\varepsilon\delta}$.

Siendo $\{V_{\varepsilon\delta}\}_{\varepsilon,\delta>0}$ base de entornos existirán $\varepsilon',\delta'>0$ tales que

$$V_{\varepsilon'\delta'}\subset U\subset V_{\varepsilon\delta}. \qquad (\mathrm{I})$$

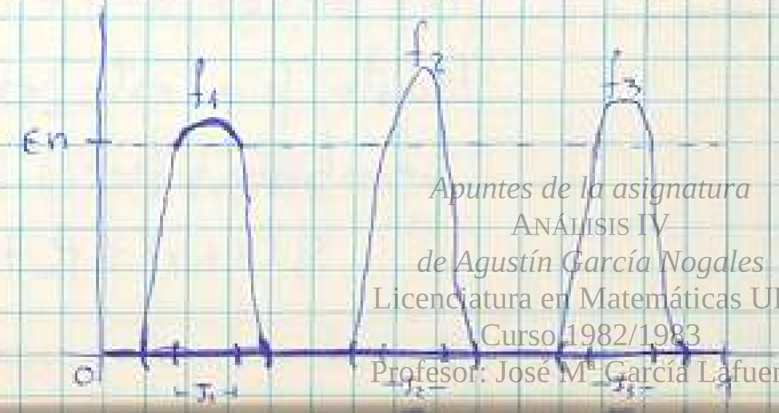
Siempre podremos encontrar $n\in\mathbb{N}$ tal que $1>n\delta'>2\delta$, pues podemos suponer que $\delta'\in]0,1[$ (si fuese mayor que 1 tomaríamos un número de $]0,1[$ que también verificaría (I) para el mismo ε').

Sean $I_1,\dots,I_n$ intervalos disjuntos de longitud δ' cada uno de ellos.

Consideremos ahora los intervalos $J_1,\dots,J_n$ que verifican que $J_i\subset I_i$ (y está en el "centro" de I_i) y tales que la longitud de J_i es la mitad de la de I_i.

Consideremos las funciones $f_1,\dots,f_n$ definidas como sigue: Dado $i\in\{1,\dots,n\}$ f_i vale cero fuera de I_i, más que εn en J_i y en el resto (I_i-J_i) se define de forma que f_i sea continua.

Veamos ahora que para cualquier $\varepsilon'>0$ se verifica que $f_i\in V_{\varepsilon'\delta'}$: Esto es trivial pues f_i sólo deja de valer cero en



un intervalo (I_i) de longitud δ' y por tanto es menor que ε' salvo, quizás, en un intervalo de longitud δ'. En particular, para el ε' que teníamos se verifica que

$$f_i \in V_{\varepsilon'\delta'} \subset U, \quad i=1,\dots,n.$$

Habíamos tomado U convexo. Luego

$$f = \frac{1}{n} f_1 + \frac{1}{n} f_2 + \dots + \frac{1}{n} f_n \in U.$$

Si probamos que $f \notin V_{\varepsilon\delta}$ habremos llegado a una contradicción con (I) y, por tanto, la topología considerada en E no podrá ser localmente convexa. Se verifica que

$\forall t \in \bigcup_{i=1}^{n} J_i$, $|f(t)| > \varepsilon$, pues si $t \in J_i$, $|f(t)| = f(t) \geq \frac{1}{n} f_i(t) > \frac{1}{n} \varepsilon n = \varepsilon$.

Por tanto, $f \notin V_{\varepsilon\delta}$ pues vale más que ε sobre $\bigcup_{i=1}^{n} J_i$ cuya suma de longitudes vale $n\frac{\delta'}{2}$ que es mayor que δ (pues $2\delta < n\delta'$).

EJEMPLO 2º: Antes de ver este segundo ejemplo necesitamos dos resultados previos que probamos a continuación.

3.2. PROPOSICION: La gauge o funcional de Minkowsky q de un entorno convexo de 0, U, verifica las siguientes condiciones

i) $q(x) \geq 0$, $\forall x \in E$.

ii) $q(\sigma x) = \sigma q(x)$, $\forall x \in E$, $\forall \sigma \geq 0$.

iii) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$, $\forall x, y \in E$.

Demostr.: Recordemos que $q(x) = \inf\{\rho \geq 0 / x \in \rho U\}$.

Por tanto, i) se verifica trivialmente.

ii) Dado $\rho \geq 0$ tal que $\sigma x \in \rho U$ se verifica que $x \in \frac{\rho}{\sigma} U$ (si excluimos el caso trivial $\sigma = 0$) y por tanto $q(x) \leq \frac{\rho}{\sigma}$, es decir, $\sigma q(x) \leq \rho$. Siendo esto cierto para todos los ρ que participan en $q(\sigma x)$ se verificará que $\sigma q(x) \leq q(\sigma x)$. Análogamente $q(\sigma x) \leq \sigma q(x)$.

iii) Dados $x, y \in E$, sean $q(x) = \rho_0$ y $q(y) = \sigma_0$.

Si $\rho > \rho_0$ y $\sigma > \sigma_0$ se verifica que $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\sigma} \in U$.

Siendo U convexo, $\frac{\rho}{\sigma+\rho}\frac{x}{\rho} + \frac{\sigma}{\sigma+\rho}\frac{y}{\sigma} \in U$, es decir $\frac{1}{\sigma+\rho}(x+y) \in U$.

Por tanto, $x+y \in (\sigma+\rho)U$, que prueba que $q(x+y) \leq \rho + \sigma$.

Puesto que esto es cierto siempre que $\rho > \rho_0$ y $\sigma > \sigma_0$ se verificará también que

$$q(x+y) \leq \rho_0 + \sigma_0 . \quad \text{csqd.}$$

3.3. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial topológico. Entonces, es condición necesaria y suficiente para que existan formas lineales continuas no nulas en E que exista un entorno convexo de cero en E distinto de E.

Demostr.: $\Rightarrow$) Sea f una forma lineal continua no nula en E.

Sea $U = \{x \in E / |f(x)| \leq 1\}$.

Por TEOREMA 1.9. $|f|$ es una seminorma continua y según TEOREMA 4.2 (pg. 9) U es un disco absorbente. Trivialmente la gauge de U es $|f|$. Siendo $|f|$ continua, U es entorno de cero (TEOREMA 4.4., pg. 9).

Luego U es un entorno convexo de cero, y es distinto de E, pues si $a \in E$ es tal que $f(a)=1$ (que existe pues $f \neq 0$), $2a \notin U$, pues $f(2a)=2$.

$\Leftarrow$) Sea U un entorno convexo de cero, y q la funcional de Minkowsky de U. Veamos que q es continua.

Basta probar que

$\forall y \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists V$ entorno de cero $/ \forall x \in y+V, |q(x)-q(y)| \leq \varepsilon$ (I)

Tomemos $V = \varepsilon U$, que es entorno de cero, pues U lo era.

Entonces, si $x \in y + \varepsilon U$, $x-y \in \varepsilon U$ y por tanto $q(x-y) \leq \varepsilon$ pues $q(x-y) = \inf\{\lambda \geq 0 / x-y \in \lambda U\}$.

Puesto que $|q(x)-q(y)| \leq q(x-y)$, queda probado (I) y, por tanto, que q es continua.

Sea $x_0 \in E$ tal que $q(x_0) \neq 0$ (si $x_0 \in E \setminus U$, entonces $q(x_0) \neq 0$) (*)

En virtud del COROLARIO 2.11 existe una forma lineal f en E tal que $f(x_0) = q(x_0)$ y $|f(x)| \leq q(x)$, $\forall x \in E$.

En virtud de TEOREMA 1.8 f es continua. Además f es no nula pues $f(x_0) \neq 0$. csqd.

Pasemos, a continuación, a estudiar el ejemplo 2:

Denotaremos por L^p $(p>0)$ el espacio vectorial de las funciones f definidas en un intervalo $I=[a,b]$ valoradas en $\mathbb{K}$ tales que

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < +\infty$$

Escribiremos también

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad \forall f \in L^p$$

Si $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ es una norma en L^p. Si $p \in]0,1[$, $\|\cdot\|_p$ no es una norma.

En nuestro ejemplo p verificará $0<p<1$.

Se verifica trivialmente que $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \, \|f\|_p$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

(*) Sea $x_0 \in E \setminus U$ y probemos que $q(x_0) \neq 0$. Sea V entorno equilibrado de cero contenido en U. Si $q(x_0) = \inf\{\lambda \geq 0 / x_0 \in \lambda U\} = 0$ entonces $\inf\{\lambda \geq 0 / x_0 \in \lambda V\} = 0$

Consideremos para cada $\varepsilon>0$ el conjunto

$$U(\varepsilon)=\{f\in L^p \,/\, \|f\|_p\leq\varepsilon\}$$

La familia $\{U(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ verifica las siguientes propiedades:

i) Es base de filtros: Dados $U(\varepsilon')$, $U(\varepsilon'')$ se verifica trivialmente que $U(\varepsilon)\subset U(\varepsilon')\cap U(\varepsilon'')$, donde $\varepsilon=\inf(\varepsilon',\varepsilon'')$.

ii) $\forall\varepsilon>0$, $U(\varepsilon)$ es equilibrado: Trivial.

iii) $\forall\varepsilon>0$, $U(\varepsilon)$ es absorbente: Se trata de probar que $\forall f\in L^p$, $\exists\alpha>0 \,/\, \alpha f\in U(\varepsilon)$

Si $\int_a^b |f(t)|^p dt\leq M$ basta tomar $\alpha=\varepsilon M^{-\frac{1}{p}}$.

iv) $\forall U(\varepsilon)$, $\exists V(\varepsilon') \,/\, V(\varepsilon')+V(\varepsilon')\subset U(\varepsilon)$: Hemos dicho que $\|f\|_p$ $(0<p<1)$ no es una norma (falla la desigualdad triangular); sin embargo se verifica que $\|f+g\|_p\leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p+\|g\|_p)$, $\forall f,g\in L^p$. Vamos a probarlo:

Si $q>1$ la función $\dfrac{1+x^q}{(1+x)^q}$ tiene exactamente un mínimo en $\mathbb{R}^+$ y es $x=1$.

Entonces $1+x^q\geqslant 2^{1-q}(1+x)^q$. Tomando $x=c/d$, $c,d>0$ se tiene que

$$c^q+d^q\geqslant 2^{1-q}(c+d)^q \quad (q>1)$$

Por tanto, para $q=1/p$

$$\|f+g\|_p=\left(\int_a^b|f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^p dt+\int_a^b|g(t)|^p dt\right)^{1/p}\leq 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p+\|g\|_p).$$

Se deduce de esto trivialmente que $2^{-\frac{1}{p}}\mathcal{U}(\varepsilon)+2^{-\frac{1}{p}}\mathcal{U}(\varepsilon)\subset\mathcal{U}(\varepsilon)$, $\forall\varepsilon>0$.

Por tanto, la familia $\{\mathcal{U}(\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ define en L^p una topología compatible.

Veremos que no es localmente convexa. Para ello probaremos que toda forma lineal continua en L^p es nula, con lo cual, en virtud de TEOREMA 3.3., en L^p no existirán entornos convexos de cero distintos de $E=L^p$ y L^p no podrá ser localmente convexo. Razonaremos por reducción al absurdo.

Supongamos que u es una forma lineal continua no nula en $E=L^p$.

Existe entonces $g_0\in L^p$ tal que $u(g_0)=1$.

Para cada $s\in\,]a,b[$ definimos

$$g_s^{(1)}(t)=\begin{cases}=g_0(t) & \text{si } a<t<s\\ =0 & \text{si } s<t<b\end{cases} \qquad \text{y} \qquad g_s^{(2)}(t)=g_0(t)-g_s^{(1)}(t)$$

Se verifica que

$$\|g_s^{(1)}(t)\|_p^p=\int_a^s|g_0(t)|^p dt.$$

La función $\varphi(s)=\int_a^s|g_0(t)|^p dt$ es continua y varía desde 0 (para $s=a$) hasta $\|g_0\|_p^p$ (para $s=b$). Existe entonces $s_0\in\,]a,b[$ tal que $\varphi(s)=\frac{1}{2}\|g_0\|_p^p$

es decir $\|g_{s_0}^{(1)}\|_p^p=\frac{1}{2}\|g_0\|_p^p$ y, por tanto, por definición de $g_{s_0}^{(2)}$ se verificará que $\|g_{s_0}^{(2)}\|_p^p=\frac{1}{2}\|g_0\|_p^p$. (I)

Por otra parte $g_0(t) = g^{(1)}_{s_0}(t) + g^{(2)}_{s_0}(t)$, $\forall t \in]a,b[$ y por tanto

$$|u(g_0(t))| \leq |u(g^{(1)}_{s_0}(t))| + |u(g^{(2)}_{s_0}(t))|$$

y puesto que $|u(g_0)| = 1$ o bien $|u(g^{(1)}_{s_0}(t))| \geq 1/2$ o bien $|u(g^{(2)}_{s_0}(t))| \geq 1/2$

Sea $i \in \{1,2\}$ tal que $|u(g^{(i)}_{s_0}(t))| \geq 1/2$.

Sea $g_1(t) = 2\, g^{(i)}_{s_0}(t)$. Entonces $|u(g_1(t))| \geq 1$.

Probemos ahora que $\|g_1(t)\|_p = 2^{1-\frac{1}{p}} \|g_0\|_p$

$$\|g_1(t)\|_p^p = \int_a^b |2 g^{(i)}_{s_0}(t)|^p dt = 2^p \int_a^b |g^{(i)}_{s_0}(t)|^p dt \overset{(I)}{=}$$

$$= 2^p \frac{1}{2} \int_a^b |g_0(t)|^p dt = 2^{p-1} \|g_0\|_p^p$$

Luego $\|g_1(t)\|_p = 2^{\frac{p-1}{p}} \|g_0\|_p$.

Por este procedimiento construimos una sucesión $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ en L^p tal que $|u(g_n)| \geq 1$ y $\|g_n\|_p = 2^{n(1-\frac{1}{p})} \|g_0\|_p$.

Puesto que $p < 1$ (por tanto $1 - \frac{1}{p} < 0$) la sucesión $\{g_n\}_n$ converge a 0 en L^p. Además la sucesión $\{u(g_n)\}_n$ (en $\mathbb{K}$) no converge a cero pues $|u(g_n)| \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto contradice la continuidad de la forma lineal u ($u(0) = 0$) en cero.

Por tanto, toda forma lineal continua en L^p es nula, lo cual prueba ya, según se indicó anteriormente, que L^p no es localmente convexo.

4. DUALIDAD. TOPOLOGIAS DEBILES.

A) Si E es un espacio localmente convexo, entonces su dual topológico E' es un subespacio del dual algebraico de E, E^*. Se verifica también que, en un cierto sentido que ya precisaremos, E es subespacio del dual algebraico de E', $(E')^*$. Veamoslo: Consideremos la aplicación

$$x \in E \longmapsto \tilde{x} \in (E')^* \qquad (I)$$

donde $\tilde{x} : f \in E' \longmapsto \tilde{x}(f) = f(x) \in \mathbb{K}$

Es trivial que $\tilde{x}$ es una forma lineal de E' en $\mathbb{K}$.

Si E fuese además separado, la aplicación (I) es inyectiva, con lo cual, mediante la identificación $x = \tilde{x}$ podemos considerar E como subespacio de $(E')^*$.

El par (E, E') presenta la particularidad de que cada uno de sus componentes está contenida en el dual algebraico de la otra.

Cabe preguntarse si la simetría observada en el par (E,E') desde el punto de vista algebraico se mantiene desde el punto de vista topológico, en el sentido de que puedan definirse sobre E' topologías de forma que E sea el dual topológico de E', de la misma forma que E' es el dual topológico de E.

Este problema es un caso particular del problema "general" de dualidad que empezamos a estudiar a continuación:

DEFINICION: Sean E y E' espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que el par (E,E') presenta una paridad si existe una aplicación bilineal

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : (x,x')\in E\times E' \longmapsto \langle x,x'\rangle \in \mathbb{K}$$

satisfaciendo las dos condiciones siguientes

D1) (SEPARACION EN E) $\forall x\in E-\{0\}, \exists x'\in E'-\{0\} / \langle x,x'\rangle \neq 0$.

D2) (SEPARACION EN E') $\forall x'\in E'-\{0\}, \exists x\in E-\{0\} / \langle x,x'\rangle \neq 0$.

En este caso a (E,E') se le llama PAR DUAL.

EJEMPLO 1: (DUALIDAD ALGEBRAICA)

Sea E un espacio vectorial y E^* su dual algebraico. Consideremos la paridad

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : (x,x^*)\in E\times E^* \longmapsto \langle x,x^*\rangle = x^*(x)\in \mathbb{K}$$

Evidentemente $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma bilineal que satisface D2).

Además, dado $x\in E-\{0\}$ siempre podemos encontrar una base en E que contenga a x y definir una forma lineal x^* en E que valga 1 en los elementos de dicha base y, por tanto, $x^*(x)\neq 0$ (D1)).

A (E,E^*) se le suele llamar PAR DUAL ALGEBRAICO O CANONICO.

EJEMPLO 2: (DUALIDAD TOPOLOGICA)

Sea E un espacio localmente convexo separado y E' su dual topológico. Consideremos la forma bilineal

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E\times E' \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(x,x') \longmapsto \langle x,x'\rangle = x'(x)$$

Evidentemente se trata de una paridad, en virtud de COROLARIO 2.13.

A (E,E') se le llama PAR DUAL TOPOLOGICO O NATURAL.

OBSERVACION: En adelante sustituiremos la notación asimétrica $x'(x)$ por la notación $\langle x,x'\rangle$, la cual está más en consonancia con la simetría que presenta el par dual (E,E').

Estudiamos a continuación un tipo de topologías sobre un par dual (E,E') para las cuales se verifica que el dual topológico de cada una de las componentes es la otra componente. Son las llamadas:

B) TOPOLOGIAS DÉBILES:

Sean E y E' espacios vectoriales y $<\cdot,\cdot>$ una paridad en $E\times E'$ o dicho de otra forma, sea (E,E') un par dual. Para cada $x'\in E'$ consideremos la aplicación

$$q_{x'}: x\in E \longmapsto q_{x'}(x)=|<x,x'>|\in \mathbb{R}$$

Es inmediato comprobar que $q_{x'}$ es una seminorma, para cada $x'\in E'$.

DEFINICION: Se llama topología débil en E la topología localmente convexa generada por la familia de seminormas $\{q_{x'}\}_{x'\in E'}$. La denotaremos por $\sigma(E,E')$.

Una base de 0-entornos para esta topología la constituyen los conjuntos de la forma

$$\{x\in E / \sup_{1\leq i\leq n}|<x,x'_i>|\leq \varepsilon\}$$

donde $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon>0$ y $x'_1,\dots,x'_n\in E'$.

Puesto que $|<x,x'_i>|\leq\varepsilon \Leftrightarrow |<x,x'_i/\varepsilon>|\leq 1$ y $\frac{1}{\varepsilon}x'_i\in E'$ se deduce que los conjuntos de la forma

$$\{x\in E / \sup_{1\leq i\leq n}|<x,x'_i>|\leq 1\}\ ,\ n\in\mathbb{N},\ x'_1,\dots,x'_n\in E'$$ forman una base de 0-entornos

La topología débil en E es separada pues $\forall x\in E-\{0\}, \exists x'\in E'-\{0\} / q_{x'}(x)=|<x,x'>|\neq 0$ en virtud de D2); basta ahora aplicar el TEOREMA 4.7. (TEMA 2°).

En resumen, la topología débil en E es la topología localmente convexa menos fina para la cual las seminormas $q_{x'}$, $x'\in E'$, son continuas; además esta topología es separada.

Antes de probar que al dotar a E de la topología $\sigma(E,E')$ se verifica que el dual topológico de E es el espacio E' probemos el siguiente

4.1. LEMA: Sean $f_0, f_1,\dots,f_n$ $n+1$ formas lineales en E. Entonces, o bien f_0 es combinación lineal de $f_1,\dots,f_n$ o bien existe $a\in E$ tal que $f_0(a)=1$ y $f_1(a)=\dots=f_n(a)=0$.

Demostr: Lo probaremos por inducción sobre n.

- Para $n=1$ es trivial, pues si f_0 y f_1 no son proporcionales, entonces existe $a\in \operatorname{Ker}(f_1)$ tal que $a\notin \operatorname{Ker}(f_0)$. Entonces $f_1\left(\frac{a}{f_0(a)}\right)=0$ y $f_0\left(\frac{a}{f_0(a)}\right)=1$.
- Supongamos que la tesis es cierta para $n-1$ y probemoslo para n. Si $f_1,\dots,f_n$ fuesen linealmente dependientes una de ellas sería combinación lineal de las otras y aplicando la hipótesis de inducción la tesis sería trivial. Supongamos entonces que $f_1,\dots,f_n$ son lineal-

mente independientes.

Dada f_i, con $i\in\{1,\dots,n\}$, puesto que no es combinación lineal de $f_1,\dots,f_{i-1},f_{i+1},\dots,f_n$ se verifica por la hipótesis de inducción que

$$\exists a_i\in E \,/\, f_i(a_i)=1 \text{ y } f_j(a_i)=0,\ \forall j\in\{1,\dots,n\}-\{i\}.$$

Sea $N=\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}(f_i)$.

Veamos que $\forall x\in E$, $x-\sum_{j=1}^{n} f_j(x)a_j\in N$.

En efecto, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $f_i\left(x-\sum_{j=1}^{n} f_j(x)a_j\right)=f_i(x)-\sum_{j=1}^{n} f_j(x)f_i(a_j)=f_i(x)-f_i(x)f_i(a_i)=0$.

Pueden darse dos casos

1) $\forall y\in N$, $f_0(y)=0$.

2) $\exists y\in N/ f_0(y)\neq 0$.

De 2) se deduce que $\exists y\in N/ f_0(y)=1$ y, puesto que $y\in N$, $f_i(y)=0$, $i=1,\dots,n$.

De 1) se deduce que

$$\forall x\in E,\ f_0\left(x-\sum_{j=1}^{n} f_j(x)a_j\right)=0$$

y, por tanto, $\forall x\in E$, $f_0(x)=\sum_{j=1}^{n} f_0(a_j)f_j(x)$

es decir, f_0 es combinación lineal de $f_1,\dots,f_n$. c.s.q.d.

Como consecuencia inmediata de este lema tenemos el siguiente

4.2. COROLARIO: Sea E un espacio vectorial. Sean $f_1,\dots,f_n$ formas lineales en E linealmente independientes. Entonces existen $a_1,\dots,a_n\in E$ tales que

$$f_i(a_j)=\delta_{ij} \text{ (delta de Kronecker).}$$

Pasemos entonces a enunciar y probar el siguiente resultado fundamental.

4.3. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual. Sea E_σ el espacio vectorial E dotado con la topología débil localmente convexa $\sigma(E,E')$. Entonces el dual topológico de E_σ es E', es decir, $(E_\sigma)'=E'$.

Demostr.: – $E'\subset(E_\sigma)'$: Veamos que $\forall x'\in E'$, $x'\in(E_\sigma)'$.

Todo $x'\in E'$ define una forma lineal en E_σ de la siguiente forma

$$\tilde{x}': x\in E_\sigma \longmapsto \langle x,x'\rangle\in\mathbb{K}.$$

Además $\tilde{x}'$ es continua, pues por definición de $q_{x'}$, $|\tilde{x}'(x)|\leq q_{x'}(x)$, $\forall x\in E_\sigma$ (aun más, se da la igualdad). Por tanto, $\tilde{x}'\in(E_\sigma)'$.

Por otra parte, la correspondencia $x'\in E'\longmapsto\tilde{x}'\in(E_\sigma)'$ es inyectiva pues $\tilde{x}'=\tilde{y}' \Rightarrow \langle x,x'\rangle=\langle x,y'\rangle$, $\forall x\in E$, es decir $\langle x,x'-y'\rangle=0$, $\forall x\in E$ de donde se deduce (D2)) que $x'=y'$.

Podemos entonces identificar x' con $\tilde{x}'$ con lo cual queda probado que $E' \subset (E_\sigma)'$.

- $(E_\sigma)' \subset E'$: Sea $f \in (E_\sigma)'$. Siendo f continua, dado $\varepsilon \in]0,1[$ existe un entorno de cero U en E_σ, que podemos tomar de la forma

$$U = \{x \in E \,/\, \sup_{1\le i\le n} |\langle x, x_i'\rangle| \le 1\} \quad (x_i' \in E',\ i=1,\dots,n)$$

tal que $x \in U \Rightarrow |f(x)| \le \varepsilon$.

Pero $(E_\sigma)' \subset E^*$ y, por tanto, $E' \subset E^*$, pues $E' \subset (E_\sigma)'$.

Tenemos entonces $n+1$ formas lineales sobre E: $f, x_1', \dots, x_n'$.

En virtud de LEMA 4.1 o f es combinación lineal de $x_1', \dots, x_n'$ o existe $a \in E$ tal que $f(a) = 1$ y $\langle a, x_i'\rangle = 0$, $i=1,\dots,n$.

Este segundo caso no puede darse, pues de lo contrario se verificaría que $a \in U$ y debería ser entonces $|f(a)| \le \varepsilon < 1$, en contra de que $f(a) = 1$.

Por tanto, $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \,/\, f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'$.

Luego $f \in E'$. csqd.

OBSERVACION: Si E es un espacio localmente convexo separado y E' su dual topológico, y consideramos en E' la topología débil $\sigma(E', E)$ se verifica entonces que $(E'_\sigma)' = E$, es decir, el dual topológico del dual topológico de E dotado con la topología $\sigma(E', E)$ es E, de la misma forma que E' es el dual de E.

La siguiente definición distingue las topologías sobre E que "tienen" esta propiedad de simetría.

DEFINICION: (Topología compatible con la dualidad)

Sea (E, E') un par dual. Una topología $\mathcal{T}$ localmente convexa en E se dice que es compatible con la dualidad cuando $(E_\mathcal{T})' = E'$.

Entonces si E es localmente convexo y separado y E' es su dual topológico entonces la topología débil $\sigma(E', E)$ en E' es compatible con la dualidad. Podemos decir aun más

4.4. TEOREMA: Sea (E, E') un par dual. Entonces $\sigma(E, E')$ es la topología localmente convexa menos fina en E que es compatible con la dualidad.

Demostr.: Por el teorema 4.3. $(E_\sigma)' = E'$. Luego $\sigma(E, E')$ es compatible con la dualidad. Veamos que es la menos fina.

Sea $\mathcal{T}$ otra topología en E localmente convexa y compatible con la dualidad. Denotemos por $E_{\mathcal{T}}$ el espacio localmente convexo formado al dotar a E de la topología $\mathcal{T}$.

Veamos que todo entorno de 0 por $\sigma(E,E')$ es entorno por $\mathcal{T}$.
Basta probarlo para una base de 0-entornos por $\sigma(E,E')$. Sabemos que una de estas bases está formada por conjuntos de la forma

$$U=\{x\in E \,/\, \sup_{1\le i\le n} |\langle x,x'_i\rangle|\le 1\}\ ,\ x'_i\in E',\ i=1,\dots,n.$$

Veamos que U es entorno por $\mathcal{T}$.
Siendo $\mathcal{T}$ compatible, $(E_{\mathcal{T}})'=E'$ y, por tanto, $x'_i\in(E_{\mathcal{T}})'$, $i=1,\dots,n$.
Es decir, x'_i, $i=1,\dots,n$, son formas lineales continuas en $E_{\mathcal{T}}$ y, por tanto, existen seminormas continuas $p_1,\dots,p_n$ para la topología $\mathcal{T}$ tales que

$$|\langle x,x'_i\rangle|\le p_i(x),\ \forall x\in E,\ \forall i\in\{1,\dots,n\}.\ \text{(I)}$$

El conjunto $V=\{x\in E \,/\, \sup_{1\le i\le n} p_i(x)\le 1\}$ es entorno de 0 para la topología $\mathcal{T}$ y verifica que $V\subset U$ en virtud de (I). Luego U es entorno de 0 en E por $\mathcal{T}$. csqd.

4.5. TEOREMA: Todas las topologías localmente convexas en E compatibles con la paridad (E,E') son separadas.

Demostr.: En virtud del teorema anterior, bastaría probar que la topología débil en E es separada lo cual ya está probado. ■

Dado un par dual (E,E') el conocimiento del espacio E' da mucha información sobre una topología compatible en E cualquiera. Sirva como ejemplo de ello el siguiente

4.6. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual y A un convexo de E. Entonces la clausura de A es la misma para todas las topologías compatibles con la dualidad en E.

Demostr.: Sea A un convexo de E, y $\mathcal{T}$ una topología localmente convexa compatible con la dualidad en E. Denotemos por $\overline{A}^{\mathcal{T}}$ la adherencia de A en el espacio topológico $(E,\mathcal{T})$ y por $\overline{A}^{\sigma}$ la adherencia de A en $(E,\sigma(E,E'))$. Basta probar que $\overline{A}^{\sigma}=\overline{A}^{\mathcal{T}}$.
Puesto que $\sigma(E,E')$ es menos fina que $\mathcal{T}$ se verifica trivialmente que $\overline{A}^{\mathcal{T}}\subset\overline{A}^{\sigma}$. En efecto, si $x\in\overline{A}^{\mathcal{T}}$, todo entorno de x por $\mathcal{T}$ corta a A y, por tanto, todo entorno de x por $\sigma(E,E')$ corta a A, es decir, $x\in\overline{A}^{\sigma}$.
Veamos entonces que $\overline{A}^{\sigma}\subset\overline{A}^{\mathcal{T}}$, para lo cual basta probar que
$(x\notin\overline{A}^{\mathcal{T}})\Rightarrow(x\notin\overline{A}^{\sigma})$.

Sea pues $x \notin \bar{A}^{\mathcal{G}}$. En virtud de COROLARIO 2.16 (A es convexo) existe $x' \in (E_{\mathcal{G}})'$ tal que $\langle x, x' \rangle \notin \overline{\langle A, x' \rangle}$.

Puesto que $(E_{\mathcal{G}})' = E'$, por ser $\mathcal{G}$ compatible, $x' \in E'$ y $\langle x, x' \rangle \notin \overline{\langle A, x' \rangle}$.

(Nótese que $\langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$ y $\overline{\langle A, x' \rangle} \subset \mathbb{K}$).

Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que $|\langle x, x' \rangle - \langle y, x' \rangle| \geq \varepsilon$, $\forall y \in A$. (I)

Se verifica entonces que

$$A \cap [x + \{y \in E / |\langle y, x' \rangle| \leq \varepsilon/2\}] = \emptyset \qquad (\text{II})$$

pues de existir $z \in A$ tal que $z = x + y$ y $|\langle y, x' \rangle| \leq \varepsilon/2$ se tendría que $|\langle z - x, x' \rangle| = |\langle z, x' \rangle - \langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon/2$, con $z \in A$, en contra de (I). Se verifica entonces (II).

Pero $x + \{y \in E / |\langle y, x' \rangle| \leq \varepsilon/2\}$ es un entorno débil (entorno por $\sigma(E, E')$) de x que, como hemos visto, no corta a A. Por tanto, $x \notin \bar{A}^{\sigma}$. c.s.q.d.

Como consecuencia inmediata de este teorema tenemos el siguiente

4.7. COROLARIO: Sea (E, E') un par dual. Entonces todos los conjuntos convexos cerrados de E son los mismos para todas las topologías en E compatibles con la dualidad.

En particular, si E es localmente convexo y separado y E' es su dual topológico, entonces todo conjunto convexo y cerrado en E es convexo y $\sigma(E, E')$-cerrado, y recíprocamente.

La demostración de la primera parte es trivial y para la de la segunda basta observar que la topología original en E y la topología débil $\sigma(E, E')$ son compatibles con la dualidad y aplicar la primera parte.

Da, pues, lo mismo hablar en un espacio localmente convexo separado de convexos cerrados y convexos débilmente cerrados.

5. POLARIDAD

A parte de la topología débil existen más topologías sobre E compatibles con la dualidad (E, E'). Estudiaremos un método llamado "toma de polares" mediante el cual construiremos toda una gama de topologías compatibles que van desde la menos fina (la topología débil) hasta la más fina (la topología de Mackey).

Para ello debemos empezar estudiando el concepto de polaridad, algunos resultados importantes en espacios vectoriales de dimensión finita y el concepto de transpuesta de una aplicación lineal. A ello se dedican este apartado y los dos siguientes.

DEFINICION: (Conjunto polar)

Sea (E,E') un par dual. Sea $A\subset E$. Se llama conjunto polar de A a

$$A^\circ=\{x'\in E' / |\langle x,x'\rangle|\leq 1, \forall x\in A\}$$

Se define el conjunto bipolar de A como $A^{\circ\circ}=(A^\circ)^\circ$.

Analogamente podemos hablar del conjunto tripolar de A, etc...

La siguiente proposición recoge algunas propiedades de los conjuntos polares.

5.1. PROPOSICION: Sea (E,E') un par dual. Se verifica entonces que

1) Si $A\subset E$, A° es absolutamente convexo y débilmente cerrado de E'.
2) $A\subset B \Rightarrow A^\circ\supset B^\circ$.
3) $A\subset A^{\circ\circ}$, $\forall A\subset E$.
4) Si $\lambda\neq 0$, $(\lambda A)^\circ=\lambda^{-1}A^\circ$.
5) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ=\bigcap_{i\in I} A_i^\circ$.

Demostr.: 1)- Es trivial que A° es convexo y equilibrado.

- A° es débilmente cerrado, es decir, es cerrado en el espacio topológico $(E',\sigma(E',E))$.

Si denotamos por E'_σ el espacio vectorial E' dotado con la topología débil $\sigma(E',E)$, se verifica que $E=(E'_\sigma)'$.

Por tanto, todo elemento x de $A\subset E$ es un elemento del dual topológico de E'_σ. En este sentido podemos escribir x^{-1} y entender que se trata de la aplicación inversa de x. Se verifica entonces que

$$A^\circ=\bigcap_{x\in A} x^{-1}(\overline{B(0,1)})\subset E'$$

donde $\overline{B(0,1)}$ es la bola cerrada de centro cero y radio 1 en $\mathbb{K}$.

Siendo x continua, se verifica que $x^{-1}(\overline{B(0,1)})$ es cerrado en E'_σ, $\forall x\in A$ y, por tanto, A° es $\sigma(E',E)$-cerrado en E' como intersección de cerrados.

2) $A\subset B\Rightarrow A^\circ\supset B^\circ$:

Si $x'\in B^\circ$ entonces $|\langle x,x'\rangle|\leq 1$, $\forall x\in B$ y por tanto $|\langle x,x'\rangle|\leq 1$, $\forall x\in A$ pues $A\subset B$. Luego $x'\in A^\circ$.

3) $A\subset A^{\circ\circ}$: Si $x\in A$, entonces $|\langle x,x'\rangle|\leq 1$, $\forall x'\in A^\circ$, por definición de A°. Pero esto significa ya que $x\in A^{\circ\circ}$, por definición de polaridad.

4) $(\lambda A)^\circ=\lambda^{-1}A^\circ$, $\forall\lambda\in\mathbb{K}-\{0\}$:

$x'\in(\lambda A)^\circ \Leftrightarrow |\langle x,x'\rangle|\leq 1, \forall x\in\lambda A \Leftrightarrow |\langle\lambda y,x'\rangle|\leq 1, \forall y\in A\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\langle y,\lambda x'\rangle|\leq 1, \forall y\in A \Leftrightarrow \lambda x'\in A^\circ \Leftrightarrow x'\in\lambda^{-1}A^\circ$.

5) $x'\in(\bigcup_{i\in I} A_i)^\circ \Leftrightarrow |\langle x,x'\rangle|\leq 1, \forall x\in\bigcup_{i\in I} A_i \Leftrightarrow |\langle x,x'\rangle|\leq 1, \forall x\in A_i, \forall i\in I \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x'\in A_i^\circ, \forall i\in I \Leftrightarrow x'\in\bigcap_{i\in I} A_i^\circ$. csqd.

El siguiente teorema caracteriza los conjuntos equicontinuos del dual topológico de un espacio localmente convexo separado.

5.2. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo separado. Consideremos la dualidad topológica (E, E'). Un conjunto $A' \subset E'$ es equicontinuo si, y solo si, $A' \subset U^\circ$ para un cierto entorno de cero U en E.

Demostr.: $\Rightarrow$ Supongamos que A' es equicontinuo. Entonces
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists U$ entorno de cero $/ |\langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon$, $\forall x \in U$, $\forall x' \in A'$.
Lo cual equivale a que
$$|\langle x, x' \rangle| \leq 1, \quad \forall x \in \varepsilon^{-1} U, \ \forall x' \in A'.$$
Luego $\forall x' \in A'$, $x' \in (\varepsilon^{-1} U)^\circ$. Puesto que $\varepsilon^{-1} U$ es entorno de cero queda probada la condición necesaria.

$\Leftarrow$ Veamos que si U es entorno de cero, entonces U° es equicontinuo con lo cual quedará probada la condición suficiente, pues todo subconjunto de un conjunto equicontinuo es equicontinuo.

Basta entonces probar que
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists V$ entorno de cero $/ |\langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon$, $\forall x \in V$, $\forall x' \in U^\circ$.

Por definición se verifica que
$$|\langle x, x' \rangle| \leq 1, \quad \forall x \in U, \ \forall x' \in U^\circ.$$
Dado $\varepsilon > 0$ se verifica que $|\langle x, x' \rangle| \leq \varepsilon$, $\forall x \in \varepsilon U$, $\forall x' \in U^\circ$.
Tomando $V = \varepsilon U$ queda visto que U° es equicontinuo. c.s.q.d.

Por tanto, los únicos conjuntos equicontinuos en el dual topológico E' son las polares de los entornos de cero y sus subconjuntos.

5.3. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo separado y E^* su dual algebraico. Consideremos la dualidad algebraica (E, E^*). Sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos de E. Entonces, el dual topológico es
$$E' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\bullet \quad (*)$$

Demostr.: Si $x' \in E'$, entonces $\{x'\}$ es equicontinuo y, por tanto, existe un entorno V de cero tal que $\{x'\} \subset V^\circ$. (**)
Dado V, $\exists U \in \mathcal{U} / U \subset V$ y por tanto $V^\circ \subset U^\bullet$.
Luego $x' \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\bullet$.

Si $x' \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\bullet$, $\exists U \in \mathcal{U} / \{x'\} \subset U^\bullet$. Por tanto, $\{x'\}$ es equicontinuo (**) es decir,

(*) Notar que las polares de los cero-entornos U están referidas a la dualidad algebraica; por eso la distinguimos poniendo $\bullet$ y no $\circ$. (**) Observar que si V es entorno de 0 entonces $V^\circ = V^\bullet$. Siempre $V^\bullet \subset V^\circ$.

x' es continua. Puesto que $x' \in E^*$ se verifica que $x' \in E'$. c.s.q.d.

OBSERVACION: Hay espacios vectoriales topológicos en los que $E^* = E'$. Por ejemplo, en el espacio euclideo n-dimensional $\mathbb{R}^n$ toda forma lineal es continua. Veremos más adelante que existen topologías sobre un espacio vectorial E de forma que $E^* = E'$.

Dado un par dual (E, E') y $A \subset E$ llamaremos la envolvente absolutamente convexa y débilmente cerrada de A al menor conjunto absolutamente convexo y $\sigma(E,E')$-cerrado (cerrado por la topología débil en E) que contiene a A. Trivialmente la envolvente absolutamente convexa y débilmente cerrada de A es la intersección de todos los discos débilmente cerrados en E que contienen a A. Entonces:

5.4. TEOREMA: (Teorema de las bipolares)

Sea (E, E') un par dual y sea $A \subset E$. Entonces la envolvente absolutamente convexa y débilmente cerrada de A es $A^{\circ\circ}$.
En particular, si A es absolutamente convexo y débilmente cerrado entonces $A = A^{\circ\circ}$.

Demostr.: Sea B la envolvente absolutamente convexa y débilmente cerrada de un subconjunto cualquiera A de E.

Puesto que todo conjunto polar es un disco $\sigma(E,E')$-cerrado se verifica que $B \subset A^{\circ\circ}$ (pues además $A \subset A^{\circ\circ}$).

Veamos ahora que $A^{\circ\circ} \subset B$, o bien, que si $x \notin B$ entonces $x \notin A^{\circ\circ}$.

Sea, pues, $x \notin B$. El espacio E_σ es localmente convexo y B es un disco cerrado en E_σ. Luego $x \notin \overline{B}^\sigma$. En virtud de COROLARIO 2.17 existe una forma lineal continua x' sobre E_σ tal que

$$\langle x, x' \rangle > 1 \quad y \quad |\langle y, x' \rangle| \leq 1, \ \forall y \in B. \quad (I)$$

Puesto que (E, E') es un par dual, $(E_\sigma)' = E'$ y, por tanto, $x' \in E'$.
De (I) se deduce que $x' \in B^\circ$ y puesto que $A^\circ \supset B^\circ$ (pues $A \subset B$) se verifica que $x' \in A^\circ$

Siendo $\langle x, x' \rangle > 1$ y $x' \in A^\circ$ se verifica que $x \notin A^{\circ\circ}$, pues

$$A^{\circ\circ} \overset{def}{=} \{x \in E \ / \ |\langle x, x' \rangle| \leq 1, \ \forall x' \in A^\circ\}. \quad \text{c.s.q.d.}$$

Una consecuencia inmediata es el siguiente

5.5. COROLARIO: Sea (E, E') un par dual y A un subconjunto de E.
Entonces $A^\circ = A^{\circ\circ\circ}$.

Demostr.: Basta observar que A° es un disco $\sigma(E', E)$-cerrado en E'.

5.6. COROLARIO: Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos absolutamente convexos y débilmente cerrados de la primera componente del par dual (E,E') entonces $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ$ es la envolvente absolutamente convexa y débilmente cerrada de $\bigcup_{i\in I} A_i^\circ$.

Demostr.: Se verifica, en virtud de la PROPOSICION 5.1, que

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right)^\circ = \bigcap_{i\in I} A_i^{\circ\circ} = \bigcap_{i\in I} A_i \text{, pues los } A_i \text{ son discos } \sigma(E,E')\text{-cerrados.}$$

Por tanto

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right)^{\circ\circ} = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^\circ. \text{ csqd.}$$

6. ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS LOCALMENTE CONVEXOS DE DIMENSION FINITA.

Sabemos que un espacio vectorial E se dice de dimensión finita si admite una base algebraica o de Hamel formada por un número finito de vectores. Al cardinal de una base de E se le llama dimensión de E y se denota por $\dim(E)$.

El objetivo de este apartado es probar que en un espacio vectorial de dimensión finita existe una y sólo una topología localmente convexa separada. Para ello necesitamos los siguientes resultados.

6.1. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial de dimensión finita en dualidad con un espacio vectorial E'. Entonces E' es de dimensión finita y $\dim(E) = \dim(E')$.

Demostr.: Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de E. Se prueba fácilmente que el sistema $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}\subset E^*$, de forma que $\langle e_i, e_j^*\rangle = \delta_{ij}$, es una base de E^*, y por tanto, $\dim(E^*) = \dim(E) = n$.

Siendo (E,E') un par dual se verifica que $E'\subset E^*$ y $E\subset (E')^*$.

Puesto que $E'\subset E^*$, $\dim(E')\leq \dim(E^*) = n$, y por tanto, E' es de dimensión finita.

Además, $E\subset (E')^* \Rightarrow \dim(E)\leq \dim(E')^* = \dim(E')$.

Luego $\dim(E) = \dim(E')$. csqd.

6.2. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo finito dimensional. Entonces el dual algebraico de E, E^*, es igual al dual topológico de E, E', es decir, toda forma lineal en E es continua.

Demostr.: Consideremos la dualidad topológica (E, E'). Por el teorema anterior $\dim(E) = \dim(E')$. Puesto que $\dim(E) = \dim(E^*)$ y $E' \subset E^*$ se deduce que $E' = E^*$. c.s.q.d.

Entonces

6.3. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces existe en E una y solo una topología localmente convexa separada.

Demostr.: Por supuesto existe en E al menos una topología localmente convexa separada: la inducida en E por la dualidad (E, E^*), es decir, la topología débil $\sigma(E, E^*)$.

Veamos que toda otra topología localmente convexa separada $\mathcal{T}$ coincide con $\sigma(E, E^*)$.

- $\sigma(E, E^*) \leq \mathcal{T}$, es decir, $\sigma(E, E^*)$ es menos fina que $\mathcal{T}$: Siendo $(E, \mathcal{T})$ un espacio localmente convexo de dimensión finita se verifica, en virtud del corolario anterior, que $E'_{\mathcal{T}} = E^*$. Por tanto, $\mathcal{T}$ es compatible con la dualidad (E, E^*). Siendo $\sigma(E, E^*)$ la topología localmente convexa compatible con (E, E^*) menos fina se deduce que $\sigma(E, E^*) \leq \mathcal{T}$.
- $\mathcal{T} \leq \sigma(E, E^*)$: Basta probar que todo entorno de cero en E por $\mathcal{T}$ es entorno de cero en E por $\sigma(E, E^*)$, o mejor aun, que los elementos de una base de 0-entornos en $E_{\mathcal{T}}$ son entornos de cero en E_σ.

Puesto que $E_{\mathcal{T}}$ es localmente convexo, existe una base $\mathcal{U}$ de 0-entornos en $E_{\mathcal{T}}$ absolutamente convexos. Sea entonces $U \in \mathcal{U}$. Puesto que U es absorbente y equilibrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$e_i \in \varepsilon U, \quad i = 1, \ldots, n, \text{ donde } \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ es una base de } E.$$

El conjunto

$$V = \{x \in E \,/\, \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x, e_i^* \rangle| \leq \frac{1}{\varepsilon n}\} \quad (\langle e_i, e_j^* \rangle = \delta_{ij})$$

es un 0-entorno débil en E, es decir, un entorno de cero en E_σ. Si probamos que $V \subset U$ quedara probado, como queremos, que U es entorno de 0 en E_σ.

Sea, pues, $x \in V$. Existen entonces escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

Luego, puesto que $e_i \in \varepsilon U$, $x \in \sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon U$.

Siendo U equilibrado

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon U = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \varepsilon U.$$

Por otra parte, $<x, e_j^*> = <\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_j^*> = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j$.

Luego
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \varepsilon U = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \varepsilon U = \sum_{i=1}^n |<x, e_i^*>| \varepsilon U$$

y, por tanto, $x \in \sum_{i=1}^n |<x, e_i^*>| \varepsilon U$.

Como $x \in V$, $|<x, e_i^*>| \leq \frac{1}{\varepsilon n}$, $i = 1, \dots, n$.

Luego $\sum_{i=1}^n |<x, e_i^*>| \varepsilon U \subset n \cdot \frac{1}{\varepsilon n} \cdot \varepsilon U = U$,

y, por tanto, $x \in U$. csqd.

OBSERVACIONES: 1) Según acabamos de probar, si E es un espacio vectorial de dimensión finita sólo existe en E una topología localmente convexa separada. Vamos a ver cómo es dicha topología.

La aplicación
$$\|\cdot\| : x \in E \longmapsto \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \right)^{1/2} \in \mathbb{R}, \text{ si } x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ donde}$$
$\{e_i\}_{i=1}^n$ es base de E, es una seminorma en E (aun más, es una norma). Por tanto, $\{\|\cdot\|\}$ genera en E una topología localmente convexa que, además es separada. A esta topología, que como sabemos es la única topología localmente convexa separada en E, la llamaremos TOPOLOGIA EUCLIDEA. Una base numerable de 0-entornos de E la forman los conjuntos
$$V_n = \{x \in E \,/\, \|x\| \leq \tfrac{1}{n}\}, \; n \in \mathbb{N}$$
Por tanto, la topología euclídea es metrizable (aun más, normable).

2) El teorema siguiente establece que toda topología localmente convexa separada en un espacio vectorial E induce en cada subespacio de dimensión finita de E la topología euclídea y, además, que todo subespacio de dimensión finita de E es cerrado en E.

6.4. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo separado y M un subespacio vectorial topológico de E de dimensión finita. Entonces:

a) M está provisto de la topología euclídea.

b) M es cerrado.

Demostr.: a) Trivial, pues la topología de E induce en M una topología localmente convexa separada que, necesariamente, ha de ser la topología euclídea, en virtud del teorema anterior, por ser M de dimensión finita.

b) Se trata de probar que dado $a \notin M$ existe un entorno de cero U en E tal que $(a+U) \cap M = \emptyset$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de M.

Puesto que $a \notin M$, los vectores $e_1, \dots, e_n$ y a son linealmente independientes.

Consideremos la dualidad topológica (E, E'). Puesto que $E \subset (E')^*$, $\{e_1, \dots, e_n, a\}$ es un sistema libre en $(E')^*$, y por tanto, en virtud de LEMA 4.1, existe $x' \in E'$ tal que

$$\langle e_i, x' \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle a, x' \rangle = 1$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la paridad de la dualidad (E, E').

Sea $U = \{x \in E / |\langle x, x' \rangle| < 1\}$.

U es entorno de cero por ser la contraimagen de $]-1,1[$ por x' y ser x' continua ($]-1,1[$ abierto $\Rightarrow U$ abierto, además $0 \in U$).

Veamos que $(a+U) \cap M = \emptyset$.

Si existiese $x \in (a+U) \cap M$, existirían $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Luego $\langle x, x' \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, x' \rangle = 0$.

Por otra parte, $x = a + u$, $u \in U$. Por tanto

$$\langle a+u, x' \rangle = \langle a, x' \rangle + \langle u, x' \rangle = 1 + \langle u, x' \rangle$$

lo cual no puede ser nunca igual a cero por ser $|\langle u, x' \rangle| < 1$.

Por tanto, $(a+U) \cap M = \emptyset$. csqd.

7. TRANSPUESTA DE UNA APLICACION LINEAL.

Sean (E, E') y (F, F') dos pares duales y $t: E \to F$ una aplicación lineal. Dado $y' \in F'$, existe $x' \in E^*$ tal que

$$\langle x, x' \rangle = \langle t(x), y' \rangle, \ \forall x \in E \qquad (I)$$

Puesto que $F' \subset F^*$, considerando y' como forma lineal de F en $\mathbb{K}$, (I) significa que $x'(x) = y'(t(x)) = (y' \circ t)(x)$, $\forall x \in E$. Por tanto, $x' = y' \circ t$ es, en efecto, una forma lineal en E.

A x' le llamaremos imagen de y' por la aplicación transpuesta t' de t, es decir, $x' = t'(y')$. Se define, pues, la aplicación transpuesta de la aplicación lineal $t: E \to F$ como la aplicación

$$t': y' \in F' \longmapsto t'(y') \in E^*$$

de forma que $\langle x, t'(y') \rangle = \langle t(x), y' \rangle$, $\forall x \in E$, $\forall y' \in F'$.

Fácilmente se comprueba que t' es una aplicación lineal.

Cabe preguntarse en qué condiciones la imagen de F' por t' está contenida en E' (Nótese que $E' \subset E^*$). La respuesta está en el siguiente

7.1. TEOREMA: Sean (E, E') y (F, F') dos pares duales, y $t: E \to F$ una aplicación lineal. Sea $t': F' \to E^*$ la aplicación lineal transpuesta de t. Para que $t'(F') \subset E'$ es necesario y suficiente que t sea continua cuando E está dotado de la topología débil $\sigma(E, E')$ y F está dotado de la topología débil $\sigma(F, F')$, (diremos en este caso que t es débilmente continua).

Demostr.: $\Rightarrow$ Supongamos que $t'(F') \subset E'$. Para ver que t es débilmente continua basta ver que es débilmente continua en cero, es decir, que
$\forall U \in \sigma(F, F'),\ \exists V \in \sigma(E, E') \ / \ t(V) \subset U$.

Basta trabajar con entornos de cero en $(F, \sigma(F, F'))$ del tipo
$$U = \{ y \in F \ / \ \sup_{1 \le i \le n} |\langle y, y_i' \rangle| \le 1 \}, \quad y_1', \dots, y_n' \in F', \ n \in \mathbb{N}$$
pues constituyen una base de 0-entornos débiles en F.

Sea pues un entorno U de esta forma.

Por hipótesis, $x_i' = t'(y_i') \in E'$, $i = 1, \dots, n$.

Sea $V = \{ x \in E \ / \ \sup_{1 \le i \le n} |\langle x, x_i' \rangle| \le 1 \}$. V es entorno débil de cero en E pues $x_i' \in E'$.

Veamos que $t(V) \subset U$

Si $x \in V$, $\langle t(x), y_i' \rangle = \langle x, t'(y_i') \rangle = \langle x, x_i' \rangle$

y por tanto $|\langle t(x), y_i' \rangle| \le 1$, es decir, $t(x) \in U$, pues $|\langle x, x_i' \rangle| \le 1$.

$\Leftarrow$ Suponemos que t es débilmente continua y queremos probar que $\forall y' \in F'$, $t'(y') \in E'$.

Por definición de t', $t'(y') = y' \circ t$, $\forall y' \in F' \subset F^*$.

F' es el dual topológico de F_σ. Por tanto, y' es continua.

Puesto que t es débilmente continua, $y' \circ t$ es continua.

Luego $t'(y') \in E'$ (dual topológico de E_σ). c.s.q.d.

7.2. PROPOSICION: Sean (E, E') y (F, F') pares duales. Consideremos las paridades (E', E) y (F', F). Sea $t: E \to F$ una aplicación lineal débilmente continua y $t': F' \to E'$ su transpuesta. Sea $t'' = (t')': E \to (F')^*$ la transpuesta de t'. Entonces $t''(x) = t(x)$, $\forall x \in E$.

Demostr.: $\forall y' \in F'$, $\langle t''(x), y' \rangle = \langle x, t'(y') \rangle = \langle t(x), y' \rangle$, $\forall x \in E$ por definición de transpuesta de una aplicación lineal.

Por el axioma de separación que verifica $\langle \cdot, \cdot \rangle$

que $t''(x)=t(x)$, $\forall x\in E$ csqd

OBSERVACION: Si t es débilmente continua se verifica que $t''(x)=t(x)$, $\forall x\in E$ y, por tanto, $t''(E)\subset F$.

7.3. COROLARIO: Si $t: E\to F$ es débilmente continua, entonces la transpuesta $t': F'\to E'$ es débilmente continua.

Demostr. Puesto que $t''(E)\subset F$ se verifica por TEOREMA 7.1 que $t': F'\to E'$ es débilmente continua. csqd.

7.4. TEOREMA: Sean E y F dos espacios localmente convexos. Consideremos las dualidades topológicas (E,E') y (F,F'). Entonces si $t: E\to F$ es una aplicación lineal continua, t es débilmente continua.

Demostr: Sea t' la aplicación transpuesta de t. Basta entonces probar que $t'(F')\subset E'$. Pero esto es trivial, pues $\forall y'\in F'$, $t'(y')=y'\circ t$. Como $t: E\to F$ es continua y $y': F\to \mathbb{K}$ es una forma lineal continua se deduce que $t'(y')\in E'$. csqd.

No siempre es cierto el recíproco del teorema anterior.

CONTRAEJEMPLO: Sea E un espacio vectorial. Consideremos sobre E dos topologías compatibles localmente convexas τ y τ' de forma que τ es estrictamente menos fina que τ'. La aplicación identidad $I: E_\tau \to E_{\tau'}$ es una forma lineal. Supongamos que τ y τ' son compatibles con una dualidad (E,F). Veamos que I es débilmente continua pero no continua. No es continua pues τ es estrictamente menos fina que τ'. Se prueba fácilmente que la transpuesta de I es la identidad en F: $I': F\to F\subset E^*$.

Puesto que τ y τ' son compatibles con la dualidad (E,F), se tiene que $F=E'_\tau=E'_{\tau'}$. Como $I'(F)\subset F$ se verifica que I es débilmente continua.

Probaremos más adelante que existen en E topologías para las cuales la continuidad débil implica continuidad respecto a dichas topologías.