TEMA 4º: TOPOLOGIAS EN ESPACIOS DUALES.

1. CONJUNTOS ACOTADOS.

DEFINICION: Sea E un espacio vectorial y A y B subconjuntos de E. Decimos que A absorbe a B, o B es absorbido por A, y lo denotaremos por $B < A$ cuando existe un número positivo α tal que

$$\lambda B \subset A \text{ siempre que } |\lambda| \leq \alpha$$

Equivalentemente

$$(B < A) \Leftrightarrow (\exists \alpha > 0 \,/\, B \subset \lambda A \text{ si } |\lambda| \geq \alpha)$$

Trivialmente, si A es equilibrado, es suficiente para que $B < A$ que $\exists \alpha > 0 \,/\, \alpha B \subset A$.

DEFINICION: (Conjunto acotado)

Sea E un espacio localmente convexo. Un conjunto $A \subset E$ se dice acotado si A es absorbido por todo entorno de cero.

Esta definición es debida a Von Newmann.

Una caracterización de conjuntos acotados en términos de seminormas la da el siguiente

1.1. TEOREMA: Sea $\mathcal{P}$ una familia de seminormas generando la topología localmente convexa de E. Para que A sea acotado es necesario y suficiente que

$$\forall p \in \mathcal{P},\ p(A) \text{ sea acotado en } \mathbb{R}.$$

Demostr. $\Rightarrow$) Si A es acotado, puesto que para cada $p \in \mathcal{P}$, $\{x \in E / p(x) \leq 1\}$ es entorno de cero se verifica que existe $\lambda > 0$ tal que

$$A \subset \lambda \cdot \{x \in E / p(x) \leq 1\} = \{y \in E / p(\lambda^{-1} y) \leq 1\} = \{y \in E / p(y) \leq \lambda\}.$$

Por tanto, $p(A)$ es acotado, $\forall p \in \mathcal{P}$.

$\Leftarrow$) Una base de 0-entornos en E está formada por conjuntos de la forma $\{x \in E / \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon\}$, $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$.

Basta entonces probar que todo entorno de este tipo absorbe a A.

Supongamos que $p(A)$ es acotado para todo $p \in \mathcal{P}$.

Entonces, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $\exists \lambda_i > 0 \,/\, p_i(x) \leq \lambda_i$, $\forall x \in A$.

Sea $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i$. Entonces $\sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \lambda$, $\forall x \in A$.

$$\text{Por tanto, } A \subset \{x \in E / \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \lambda \varepsilon^{-1} \varepsilon\} = \{x \in E / \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(\lambda^{-1} \varepsilon x) \leq \varepsilon\} =$$

$$= \lambda \varepsilon^{-1} \{x \in E / \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(x) \leq \varepsilon\}. \text{ c.s.q.d.}$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

OBSERVACION: Sea (E,E') un par dual. Entonces $A\subset E$ es débilmente acotado si, y solo si, $|\langle A, x'\rangle|$ es acotado, $\forall x'\in E'$, pues $\{|\langle\cdot, x'\rangle|\}_{x'\in E'}$ es una familia de seminormas en E que generan la topología débil localmente convexa $\sigma(E,E')$.

La siguiente proposición recoge una serie de propiedades de los conjuntos acotados:

1.2. PROPOSICION: Sea E un espacio localmente convexo. Entonces

1) Las clausuras, envolventes convexas y envolventes absolutamente convexas de los conjuntos acotados son acotadas.
2) Todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado.
3) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, λA es acotado si A es acotado.
4) La suma y la unión finitas de conjuntos acotados son acotados.
5) La imagen de un conjunto acotado por una aplicación lineal continua es acotada.

Demostr.: Siendo E localmente convexo existe una base $\mathcal{U}$ de 0-entornos absolutamente convexos que, incluso, podemos tomar cerrados (VER TEOREMA 24, TEMA 2º)

1) Siendo A acotado, $\forall U\in\mathcal{U}$, $\exists\alpha>0 / A\subset\lambda U$ si $|\lambda|\geq\alpha$.

Puesto que U es cerrado, λU es cerrado y, por tanto, $\bar{A}\subset\lambda U$, $\forall\lambda$ tal que $|\lambda|\geq\alpha$. que prueba que $\bar{A}$ es acotado.

Además puesto que U es convexo (absolutamente convexo) λU es convexo (absolutamente convexo) que contiene a A y por tanto $C(A)\subset\lambda U$ $(\Gamma(A)\subset\lambda U)$ siempre que $|\lambda|\geq\alpha$, que prueba que $C(A)$ $(\Gamma(A))$ es acotado.

2) Trivial.

3) A acotado $\Rightarrow$ $(\forall U\in\mathcal{U}, \exists\alpha>0 / \mu A\subset U$ si $|\mu|\leq\alpha)$

Sea pues $\lambda\in\mathbb{K}$. Entonces si $\beta=|\lambda|^{-1}\alpha$ se verifica que

$\mu(\lambda A)\subset\lambda U$ siempre que $|\mu|\leq\alpha$

o bien $\lambda^{-1}\mu(\lambda A)\subset U$ siempre que $|\lambda^{-1}\mu|\leq\beta$ (Si $\lambda=0$ es trivial).

es decir λA es acotado.

4) Es consecuencia trivial de que si $A\subset\lambda U$ y $B\subset\mu U$ entonces $A+B\subset(\lambda+\mu)U$ y $A\cup B\subset\max(\lambda,\mu)U$.

5) Si $t:E\to F$ es una aplicación lineal continua y $A\subset E$ es acotado entonces dado V entorno de cero en F, $t^{-1}(V)$ es entorno de cero en E y, por tanto, existe $\alpha>0$ tal que $\lambda A\subset t^{-1}(V)$ si $|\lambda|\leq\alpha$.

Por tanto, $\lambda t(A)\subset V$ si $|\lambda|\leq\alpha$, que prueba que $t(A)$ es acotado.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

DEFINICION: (Base de acotados)

Sea E un espacio localmente convexo. Se dice que $\mathcal{B}$ es una base de conjuntos acotados si todo conjunto acotado de E está contenido en algún elemento de $\mathcal{B}$.

1.3. TEOREMA: En todo espacio localmente convexo existe una base de acotados formada por conjuntos absolutamente convexos y cerrados.

Demostr: Sea $\mathcal{B}$ la familia formada por las envolventes absolutamente convexas y cerradas de todos los conjuntos acotados del espacio localmente convexo E. En virtud de PROPOSICION 1.2, los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos acotados y constituyen una base de acotados por definición. c.q.d.

OBSERVACION: Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Los conjuntos

$$B_\varepsilon = \{x\in E \,/\, \|x\|\leq \varepsilon\}$$

constituyen una base de 0-entornos formada por conjuntos acotados. Esto solo ocurre en espacios localmente convexos normables (es decir, cuya topología se pueda describir mediante una norma). Aun más, basta con que algún entorno de cero sea acotado para que el espacio localmente convexo E sea normado. Esto es lo que prueba el siguiente

1.4. TEOREMA: (de Kolmogorov)

Sea E un espacio localmente convexo separado. Si existe algun entorno acotado de cero entonces E es normable.

Demostr.: Sea V entorno acotado de cero en E.

Puesto que E es localmente convexo podemos suponer que V es absolutamente convexo y cerrado (siempre existe un entorno absolutamente convexo y cerrado contenido en V que, por tanto, será acotado).

Sea p_V la gauge de V. Veamos que p_V es una norma que genera la topología de E. Sea $\mathcal{T}_V$ la topología generada en E por $\{p_V\}$ y $\mathcal{T}$ la topología original de E.

Evidentemente $\mathcal{T}_V \leq \mathcal{T}$, pues todo entorno de cero por $\mathcal{T}_V$ es entorno de cero por $\mathcal{T}$ ya que p_V es continua (por ser V entorno de cero por $\mathcal{T}$).

Veamos ahora que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_V$.

Sea U entorno de cero por $\mathcal{T}$. Siendo V acotado existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda V \subset U$. Puesto que V es entorno de cero por $\mathcal{T}_V$ (

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

dad asociada a p_V, por ser V cerrado), λV es entorno por τ_V y por tanto, U es entorno por τ_V. Luego $\tau \leq \tau_V$.

Queda visto entonces que $\tau_V = \tau$.

Falta probar ahora que la seminorma p_V es una norma, es decir que verifica que si $x \neq 0$ entonces $p_V(x) > 0$.

Si $x \neq 0$, siendo E separado, existe un entorno de cero U tal que $x \notin U$. Puesto que $\tau_V = \tau$, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{x \in E \,/\, p_V(x) \leq \varepsilon\} \subset U.$$

Puesto que $x \notin U$ se verifica que $p_V(x) > \varepsilon > 0$. c.s.q.d.

<u>OBSERVACION</u>: De acuerdo con la definición de conjunto acotado, si τ y τ' son topologías localmente convexas en un espacio vectorial E y $\tau \leq \tau'$ entonces todo conjunto τ'-acotado es τ-acotado. Se verifica (lo probaremos más adelante) que todas las topologías en un espacio E compatibles con una dualidad (E, E') presentan los mismos acotados.

<u>1.5. TEOREMA</u>: Sea (E, E') un par dual. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

1) A es débilmente acotado en E.
2) La aplicación $p': x' \in E' \longmapsto p'(x') = \sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| \in \mathbb{R}$ es una seminorma en E'.
3) La polar A° de A en E' es absorbente.

Demostr.: <u>1) $\Rightarrow$ 2)</u> La topología débil en E está generada por la familia $\{|\langle \cdot, x' \rangle|\}_{x' \in E'}$ de seminormas. En virtud de TEOREMA 1.1. se verifica que, siendo A débilmente acotado, $|\langle A, x' \rangle|$ es acotado para todo $x' \in E'$. Por tanto, p' está bien definida. Es trivial comprobar que se trata de una seminorma.

<u>2) $\Rightarrow$ 3)</u> Se trata de probar que $\forall x' \in E', \exists M \geq 0 \,/\, x' \in M A^\circ$, lo cual es suficiente para ver que A° es absorbente, por ser absolutamente convexo.

Dado $x' \in E'$ existe, por hipótesis $M > 0$ tal que $\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| \leq M$

Por tanto, $\left|\left\langle x, \frac{x'}{M} \right\rangle\right| \leq 1, \ \forall x \in A$

lo cual prueba que $\frac{x'}{M} \in A^\circ$, o bien $x' \in M A^\circ$

<u>3) $\Rightarrow$ 1)</u> Por TEOREMA 1.1 basta probar que $|\langle A, x' \rangle|$ es acotado en $\mathbb{R}$ $\forall x' \in E'$. Por hipótesis, dado $x' \in E'$, $\exists M > 0 \,/\, x' \in M A^\circ$ y por tanto $\frac{x'}{M} \in A^\circ$, es decir, $\left|\left\langle x, \frac{x'}{M} \right\rangle\right| \leq 1, \ \forall x \in A$, y también $|\langle x, x' \rangle| \leq M, \ \forall x \in A$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

2. TOPOLOGIAS POLARES.

Sea (E,E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E. Consideremos la familia

$$\mathcal{A}^o = \{A^o \subset E' / A \in \mathcal{A}\}.$$

En virtud de PROPOSICION 5.1 (TEMA 3º) y TEOREMA 1.5 los elementos de $\mathcal{A}^o$ son discos absorbentes en E'.

Por TEOREMA 2.2 (TEMA 2º), existe en E' una topología localmente convexa que es la menos fina para la cual los elementos de $\mathcal{A}^o$ son entornos de cero. Una base de 0-entornos para esta topología esta formada por conjuntos de la forma

$$\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} A_i^o \ , \ \varepsilon>0, \ A_i \in \mathcal{A}, \ n \in \mathbb{N}.$$

De acuerdo con las propiedades de los conjuntos polares, los elementos de esta base se pueden escribir en la forma

$$\left(\varepsilon^{-1} \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^o \ , \ \varepsilon>0, \ A_i \in \mathcal{A}, \ n \in \mathbb{N}.$$

DEFINICION: (Topología de la $\mathcal{A}$-convergencia)

La topología en E' definida anteriormente recibe el nombre de "TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA UNIFORME SOBRE LOS ELEMENTOS DE $\mathcal{A}$" o simplemente "TOPOLOGIA DE LA $\mathcal{A}$-CONVERGENCIA".

En la práctica, la familia $\mathcal{A}$ será una bornología en E (concepto central en Análisis Funcional), es decir, verificará las propiedades

B.1) $\forall A,B \in \mathcal{A}, \ \exists C \in \mathcal{A} / A \cup B \subset C$.

B.2) $\forall A \in \mathcal{A}, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \lambda A \in \mathcal{A}$.

B.3) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = E$.

OBSERVACION: Las condiciones B.1) y B.2) no suponen una seria restricción para la familia $\mathcal{A}$, pues si $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos débilmente acotados, el conjunto de los múltiplos escalares de las uniones finitas de elementos de $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos débilmente acotados de E que satisface B.1) y B.2) y que, además, determina la misma topología polar en E'. Estas condiciones nos permitirán simplificar la expresión de los elementos de la base de entornos de cero. Aunque en la práctica, la familia $\mathcal{A}$ verificará la condición B.3), en ocasiones, es suficiente imponer la condición, más débil, de que $\mathcal{A}$ satisfaga

B.3') $\langle \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \rangle = E$.

Exigiremos frecuentemente que $\mathcal{A}$ verifique

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

B.4) Los elementos de $\mathcal{A}$ son absolutamente convexos y débilmente cerrados. No hay ningún problema en añadir esta última propiedad a la familia $\mathcal{A}$, pues si $\mathcal{A}$ satisface B.1), B.2) y B.3), la familia $\mathcal{A}^*$ formada por las envolventes absolutamente convexas y débilmente cerradas de los elementos de $\mathcal{A}$ satisface B.1), B.2), B.3) y B.4) y, además, determina en E' la misma topología polar que $\mathcal{A}$, es decir, las topologías de la $\mathcal{A}$-convergencia y de la $\mathcal{A}^*$-convergencia coinciden: En efecto, como probaremos en el teorema siguiente, una base de 0-entornos para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es $\{A^\circ \subset E' / A \in \mathcal{A}\}$. De acuerdo con ese mismo teorema, y puesto que el teorema de las bipolares nos garantiza que la envolvente absolutamente convexa débilmente cerrada de $A \in \mathcal{A}$ es $A^{\circ\circ}$, se verifica que una base de 0-entornos para la topología de la $\mathcal{A}^*$-convergencia es $\{(A^{\circ\circ})^\circ \subset E' / A \in \mathcal{A}\}$. Siendo $(A^{\circ\circ})^\circ = A^\circ$, queda probado que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^*$ determinan en E' la misma topología polar.

~~Entonces~~

2.1. TEOREMA: Sea (E, E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo B.1), B.2) y

B.3') $\langle \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \rangle = E$.

Entonces la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' admite como base de 0-entornos la familia $\{A^\circ \subset E' / A \in \mathcal{A}\}$. Se verifica además que dicha topología es más fina que la topología débil $\sigma(E', E)$ y, por tanto, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es separada.

Demostr.: 1) $\mathcal{A}^\circ = \{A^\circ / A \in \mathcal{A}\}$ es base de 0-entornos: Una base de entornos de cero para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia está formada por conjuntos de la forma $(\lambda \bigcup_{i=1}^n A_i)^\circ$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > 0$, $A_i \in \mathcal{A}$.

Por B.1), $\exists C \in \mathcal{A} / \bigcup_{i=1}^n A_i \subset C$

Por B.2), $\lambda C \in \mathcal{A}$. Puesto que $\lambda \bigcup_{i=1}^n A_i \subset \lambda C$ se verifica que $(\lambda C)^\circ \subset (\lambda \bigcup_{i=1}^n A_i)^\circ$. Dado que $(\lambda C)^\circ \in \mathcal{A}^\circ$, queda probado que $\mathcal{A}^\circ$ es base de entornos de cero.

2) Veamos ahora que la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es más fina que la topología débil $\sigma(E', E)$. Una base de entornos de cero para la topología $\sigma(E', E)$ está formada por intersecciones finitas de conjuntos del tipo $\{x' \in E' / |\langle x, x' \rangle| \leq 1\}$, $x \in E$. Si probamos que cada conjunto de

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

esta forma contiene a la polar de un conjunto $A \in \mathcal{A}$, quedará probado que todo entorno de cero para la topología débil $\sigma(E', E)$ es entorno de cero para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, como queremos probar.

Sea, pues, $x \in E$. Consideremos el conjunto $\{x' \in E' / |\langle x, x' \rangle| \leq 1\}$.

Dado $x \in E$, en virtud de B.3.) existen $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $x_i \in A_i \in \mathcal{A}$ tales que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Puesto que $B_i = \lambda_i A_i \in \mathcal{A}$, podemos decir que existen $x_i \in B_i$, $i = 1, \ldots, n$, tales que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Por B.1.), $\exists B \in \mathcal{A} / \bigcup_{i=1}^{n} B_i \subset B$.

Sea, por fin, $A = nB \in \mathcal{A}$. Veamos que $A^\circ \subset \{x' \in E' / |\langle x, x' \rangle| \leq 1\}$.

Si $x' \in A^\circ = \frac{1}{n} B^\circ$, entonces $|\langle y, x' \rangle| \leq \frac{1}{n}$, $\forall y \in B$.

En particular, y puesto que $x_i \in B_i \subset B$, $i = 1, \ldots, n$, se verifica que $|\langle x_i, x' \rangle| \leq \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$.

Entonces $|\langle x, x' \rangle| = |\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, x' \rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x' \rangle| \leq 1$, que prueba que $x' \in \{x' \in E' / |\langle x, x' \rangle| \leq 1\}$. csqd.

El siguiente teorema nos da un método en términos de seminormas para construir la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

<u>2.2. TEOREMA</u>: Sea (E, E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo las propiedades B.1), B.2), B.3) y B.4). Entonces, para cada $A \in \mathcal{A}$, la aplicación

$$p'_A : x' \in E' \longmapsto p'_A(x') = \sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle|$$

es una seminorma en E'. Además la familia $\{p'_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ de seminormas genera la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E'.

Demostr.: Siendo los elementos A de $\mathcal{A}$ débilmente acotados se verifica en virtud de TEOREMA 1.5 que las aplicaciones p'_A son seminormas.

Veamos que $\{p'_A\}_{A \in \mathcal{A}}$ genera en E' la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

Si probamos que $A^\circ = \{x' \in E' / p'_A(x') \leq 1\}$ tendremos que todo entorno de cero para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es también entorno de cero para la topología generada por $\{p'_A\}_{A \in \mathcal{A}}$. Además, una base de entornos de cero para esta última topología está formada por intersecciones finitas de conjuntos del tipo $\{x' \in E' / p'_A(x') \leq \varepsilon\}$. Pero como $\{x' \in E' / p'_A(x') \leq \varepsilon\} = (\varepsilon A)^\circ$ y toda intersección finita de conjuntos del tipo $(\varepsilon A)^\circ$, $A \in \mathcal{A}$, contiene ~~a~~ la polar de un conjunto de $\mathcal{A}$ quedaría probado también que la topología de la $\mathcal{A}$-convergen-

Apuntes de la asignatura
Análisis
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

cia es más fina que la topología generada por $\{p'_A\}_{A\in\mathcal{A}}$, con lo cual quedará probado que coinciden. Basta pues probar que

$$A^\circ = \{x'\in E' \,/\, p'_A(x')\leq 1\}.$$

Pero esto es trivial, pues

$$x'\in A^\circ \Leftrightarrow |\langle x,x'\rangle|\leq 1,\ \forall x\in A \Leftrightarrow \sup_{x\in A}|\langle x,x'\rangle|\leq 1 \Leftrightarrow p'_A(x')\leq 1. \text{ csqd.}$$

2.3. PROPOSICION: Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, para cada $A\in\mathcal{A}$, p'_A es la gauge o funcional de Minkowsky, p_{A°, de A°.

Demostr.: Por definición $p'_A(x') = \sup_{x\in A}|\langle x,x'\rangle|$ y $p_{A^\circ}(x') = \inf\{\rho\geq 0 \,/\, x'\in\rho A^\circ\}$

$\forall\rho\in\{\rho\geq 0/x'\in\rho A^\circ\}$, $x'\in\rho A^\circ = (\rho^{-1}A)^\circ$ y por tanto $|\langle x,\frac{x'}{\rho}\rangle|\leq 1, \forall x\in A$.

Entonces $p'_A\left(\frac{x'}{\rho}\right) = \sup_{x\in A}|\langle x,\frac{x'}{\rho}\rangle|\leq 1$ y también $p'_A(x')\leq\rho$.

Luego $p'_A(x')\leqslant p_{A^\circ}(x')$.

Veamos que no puede ser $p'_A(x') < p_{A^\circ}(x')$.

Supongamos para ello que existiese $x'\in E'$ tal que $p'_A(x') < p_{A^\circ}(x')$.

Sea $\alpha>0$ tal que $p'_A(x')<\alpha<p_{A^\circ}(x')$

Entonces, $p'_A\left(\frac{x'}{\alpha}\right)<1$, es decir, $|\langle x,\frac{x'}{\alpha}\rangle|<1, \forall x\in A$. (I)

Por otra parte, $p_{A^\circ}\left(\frac{x'}{\alpha}\right)>1$. Entonces $\frac{x'}{\alpha}\notin A^\circ$ (II)

pues $A^\circ\subset\{x'\in E'/p_{A^\circ}(x')\leq 1\}$.

Evidentemente, (I) y (II) son contradictorias.

Debe ser entonces $p'_A(x') = p_{A^\circ}(x'), \forall x'\in E'$. csqd.

OBSERVACION: Tenemos entonces tres formas para determinar la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia: 1) Conociendo las polares de los elementos de $\mathcal{A}$, 2) Mediante las gauges de dichas polares o, equivalentemente, 3) mediante las seminormas p'_A.

2.4. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual. La topología débil $\sigma(E',E)$ es una topología polar y es la topología polar menos fina en E'.

Demostr.: Es evidente que todo conjunto finito en E es débilmente acotado. Sea $\mathcal{A}$ la familia de los subconjuntos finitos de E. Es trivial que $\mathcal{A}$ satisface B.1), B.2) y B.3). Además, si $A=\{x_1,\dots,x_n\}$ entonces

$$A^\circ = \{x'\in E'/|\langle x_i,x'\rangle|\leq 1, i=1,\dots,n\} = \{x'\in E'/\sup_{1\leq i\leq n}|\langle x_i,x'\rangle|\leq 1\}$$

Luego una base de entornos de cero para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia está formada por conjuntos de la forma $\{x'\in E'/\sup_{1\leq i\leq n}|\langle x_i,x'\rangle|\leq 1\}$, que como sabemos es también base de 0-entornos de la topología $\sigma(E',E)$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Por tanto, $\sigma(E',E)$ es una topología polar. Además es la menos fina topología polar en E', pues si $\mathcal{A}$ es una familia de conjuntos débilmente acotados en E que verifica B.1), B.2) y B.3), entonces $\forall x\in E, \exists A\in\mathcal{A} / x\in A$ y, por tanto, $A^\circ \subset \{x\}^\circ$, lo cual prueba que todo entorno de cero por $\sigma(E',E)$ es entorno de cero por la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. csqd.

OBSERVACION: (Topología fuerte)

Si $\mathcal{A}$ es la familia de todos los conjuntos débilmente acotados en E, entonces la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es evidentemente la topología polar más fina en E'. A esta topología la llamaremos TOPOLOGIA FUERTE y la denotaremos por $\beta(E',E)$.

El siguiente teorema prueba que toda topología localmente convexa separada es una topología polar. Más concretamente:

2.5. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo separado. Consideremos la dualidad topológica (E,E'). Entonces, cada conjunto equicontinuo de E' es débilmente acotado ($\sigma(E',E)$-acotado). Si $\mathcal{E}$ es la familia de los conjuntos equicontinuos en E', entonces la topología localmente convexa separada original de E es la topología de la $\mathcal{E}$-convergencia.

Demostr.: 1) Sea $A'\subset E'$ un conjunto equicontinuo. Queremos probar que A' es débilmente acotado en E'. En virtud de TEOREMA 1.1 y la definición de la topología débil $\sigma(E',E)$, basta probar que

$$\forall x\in E, \ \sup_{x'\in A'} |\langle x,x'\rangle| < +\infty$$

Por TEOREMA 5.2 (TEMA 3º), siendo A' equicontinuo, existe un entorno de cero U en E tal que $A'\subset U^\circ$.

Puesto que U es absorbente, dado $x\in E$, existe $\lambda>0$ tal que $\lambda x\in U$.

Entonces, $\forall x'\in A'\subset U^\circ$, $|\langle \lambda x, x'\rangle| \leq 1$.

Luego $\sup_{x'\in A'} |\langle x,x'\rangle| \leq \lambda^{-1}$

2) Veamos ahora que la topología de la $\mathcal{E}$-convergencia coincide con la topología original de E.

Sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos, para la topología original en E, formada por conjuntos absolutamente convexos y cerrados

$\{A^\circ / A\in\mathcal{E}\}$ es una base de 0-entornos para la topología de la $\mathcal{E}$-convergencia.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Veamos que ambas topología coinciden.

En efecto:

Dado $U \in \mathfrak{U}$, U° es equicontinuo, es decir, $U^\circ \in \mathfrak{E}$.

Por tanto, $U^{\circ\circ}$ es entorno de cero para la topología de la $\mathfrak{E}$-convergencia.

Siendo U absolutamente convexo y cerrado, en virtud del teorema de las bipolares, se verifica que $U^{\circ\circ} = U$. (*)

Recíprocamente, sea A'° entorno de cero para la topología de la $\mathfrak{E}$-convergencia, $A' \in \mathfrak{E}$.

Siendo A' equicontinuo, existe $U \in \mathfrak{U} / A' \subset U^\circ$.

Luego $U^{\circ\circ} \subset (A')^\circ$. Puesto que $U^{\circ\circ} = U$, se verifica que $A'^\circ \supset U$, lo cual prueba que A'° es entorno de cero para la topología original de E. csqd.

El siguiente teorema mejora el resultado dado en COROLARIO 7.3 (TEMA 3°).

2.6. TEOREMA: Sean (E,E') y (F,F') dos pares duales, y $t: E \to F$ una aplicación lineal débilmente continua. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo B.1), B.2), B.3) y B.4). Supongamos que $\langle t(E) \rangle = F$ y consideremos la familia $t(\mathcal{A}) = \{t(A) / A \in \mathcal{A}\}$. Si suponemos que en F' tenemos la topología de la $t(\mathcal{A})$-convergencia y en E' la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, entonces $t': F' \to E'$ es continua.

Demostr.: Si $t: E \to F$ es una aplicación lineal débilmente continua y $\langle t(E) \rangle = F$ la familia $t(\mathcal{A})$ satisface las condiciones B.1), B.2) y B.3').

Una base de entornos de cero en F' es $\{t(A)^\circ / A \in \mathcal{A}\}$.

Una base de entornos de cero en E' es $\{A^\circ / A \in \mathcal{A}\}$.

Probemos que $t'^{-1}(A^\circ) = t(A)^\circ$.

$$t(A)^\circ = \{ y' \in F' / |\langle t(x), y' \rangle| \leq 1, \forall x \in A \}.$$

$$t'^{-1}(A^\circ) = \{ y' \in F' / |\langle x, t'(y') \rangle| \leq 1, \forall x \in A \}$$

Pero, por definición de aplicación transpuesta, $\langle t(x), y' \rangle = \langle x, t'(y') \rangle$.

Luego $t(A)^\circ = t'^{-1}(A^\circ)$, $\forall A \in \mathcal{A}$.

Por tanto, t' es continua, pues la contraimagen por t' de todo entorno de cero de una base en E', es un entorno de cero en F'. csqd.

2.7. COROLARIO: Sean E y F espacios normados y E' y F' sus respectivos duales topológicos. Entonces la aplicación lineal $t: E \to F$ es continua si, y solo si, $t': F' \to E'$ es continua.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

(*) Para poder aplicar el teorema de las bipolares U debe ser débilmente cerrado. Pero, por COROLARIO 4.7 (TEMA 3°), U es cerrado si, y solo si, es débilmente cerrado, pues U es convexo.

Demostr.: Siendo t continua es débilmente continua (TEOREMA 7.4., TEMA 3º) y por tanto, $t'(F') \subset E'$ (TEOREMA 7.1, TEMA 3º). Luego $t': F' \to E'$ está bien definida.

Siendo F un espacio normado, su dual topológico también es normado, y la norma en F' viene definida por $\|f\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |f(y)|$.

La bola unidad en F es $V = \{y \in F / \|y\| \leq 1\}$.

Veamos que $V^o = \{y' \in F' / \|y'\| \leq 1\}$.

Por definición $V^o = \{y' \in F' / |\langle y, y' \rangle| \leq 1, \forall y \in V\}$.

Si $y' \in V^o$, $\|y'\| = \sup_{y \in V} |\langle y, y' \rangle| \leq 1$ y por tanto $y' \in \{y' \in F' / \|y'\| \leq 1\}$.

Además, si $\|y'\| \leq 1$, $\forall y \in V$, $|\langle y, y' \rangle| = |y'(y)| \leq \|y'\| \cdot \|y\| \leq 1$, es decir, $y' \in V^o$.

Análogamente, si $U = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$, entonces $U^o = \{x' \in E' / \|x'\| \leq 1\}$.

Se verifica entonces que $\{\lambda V^o\}_{\lambda > 0}$ es base de cero-entornos en F' y $\{\lambda U^o\}_{\lambda > 0}$ es base de 0-entornos en E'.

Consideremos en E la familia $\mathcal{A} = \{\lambda U\}_{\lambda > 0}$ y en F la familia $t(\mathcal{A})$.

Cuando escribamos E', F' consideraremos que tenemos definidas en ellos las correspondientes topologías deducidas de la norma. Denotaremos por $E'_{\mathcal{A}}$ ($F'_{t(\mathcal{A})}$) el espacio E' (F') dotado con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia ($t(\mathcal{A})$-convergencia).

Queremos probar que $t': F' \to E'$ es continua.

Se verifica que $t'(y') = (I_{E'} \circ t' \circ I_{F'})(y')$ donde

$I_{E'}: E'_{\mathcal{A}} \to E'$ es la identidad en E' y

$I_{F'}: F' \to F'_{t(\mathcal{A})}$ es la identidad en F', y

la aplicación t' central la suponemos definida de $F'_{t(\mathcal{A})}$ en $E'_{\mathcal{A}}$.

Por el teorema anterior $t': F'_{t(\mathcal{A})} \to E'_{\mathcal{A}}$ es continua.

$I_{E'}: E'_{\mathcal{A}} \to E'$ es continua, pues $\{\lambda U^o\}$ es base de entornos de cero en E' y en $E'_{\mathcal{A}}$.

Veamos que $I_{F'}: F' \to F'_{t(\mathcal{A})}$ es continua.

Una base de entornos de cero en $F'_{t(\mathcal{A})}$ es $\{t(\lambda U)^o\}_{\lambda > 0}$.

Siendo t continua, $t(\lambda U)$ es acotado en F (la imagen de una bola por una aplicación continua es acotado). Consideremos el entorno de cero en $F'_{t(\mathcal{A})}$, $t(\lambda U)^o$. Siendo $t(\lambda U)$ acotado en F y V entorno de cero en F, existe $\mu > 0$ tal que $t(\lambda U) \subset \mu V$. Por tanto

$$(\mu V)^o \subset t(\lambda U)^o$$

Puesto que $(\mu V)^o$ es entorno de cero en F', $t(\lambda V)^o$ también lo es, lo que prueba que $I_{F'}$ es continua. Por tanto, $t': F' \to E'$ es continua.

El recíproco es totalmente análogo. ■

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

2.8 TEOREMA: Sea (E,E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo B.1), B.2), B.3) y B.4). Para cada $A\in\mathcal{A}$ sea A° su polar respecto de la dualidad (E,E') y $A^{\circ\circ}$ el conjunto polar de A° respecto de la dualidad (E',E'^*). Entonces, si denotamos por $E'_{\mathcal{A}}$ el espacio vectorial E' dotado de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, se verifica que el dual topológico de $E'_{\mathcal{A}}$ es

$$(E'_{\mathcal{A}})' = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{\circ\circ} \quad (*)$$

Demostr.: $\{A^\circ\}_{A\in\mathcal{A}}$ es base de 0-entornos en $E'_{\mathcal{A}}$. Entonces, en virtud de TEOREMA 5.3 (TEMA 3º), si consideramos los conjuntos polares de dichos entornos respecto de la dualidad (E',E'^*), se verifica que

$$(E'_{\mathcal{A}})' = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A^{\circ\circ} \quad \text{c.s.q.d.}$$

3. CONJUNTOS PRECOMPACTOS.

En el estudio del problema, todavía pendiente, de construcción de toda una gama de topologías polares compatibles y/o no compatibles con una dualidad juegan un importante papel los conceptos de conjunto precompacto y conjunto compacto.

DEFINICION: Sea E un espacio vectorial topológico. Un subconjunto $A\subset E$ se dice precompacto si cualquiera que sea el entorno U de cero existen un número finito de puntos $a_1,\dots,a_n$ en E tales que

$$A\subset \bigcup_{i=1}^{n}(a_i+U)$$

Evidentemente, que A sea precompacto equivale a que para todo entorno de cero U exista un conjunto finito $M\subset E$ tal que $A\subset M+U$.

Algunas propiedades importantes de los conjuntos precompactos se recogen en el siguiente

3.1. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo. Se verifica

1) La clausura de un conjunto precompacto es precompacto.
2) Toda unión finita y toda suma finita de conjuntos precompactos es precompacto.
3) Todo subconjunto y todo múltiplo escalar de un conjunto precompacto es precompacto.
4) Toda imagen lineal continua de un conjunto precompacto es precompacto.
5) Todo conjunto precompacto es acotado.

Demostr.: Sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos en E absolutamente convexos y cerrados.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

(*) Denotamos por $A^{\circ\circ}$ la bipolar de A para subrayar el hecho de que, en este caso, los conjuntos pola-

1) Siendo A precompacto, dado $U \in \mathcal{U}$, $\exists a_1, \dots, a_n \in E$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + U)$ y, siendo $\bigcup_{i=1}^{n} (a_i + U)$ cerrado se verifica que $\overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + U)$ y, por tanto que $\overline{A}$ es precompacto.

2) Sean A y B conjuntos precompactos en E. Existen entonces conjuntos finitos $M, M' \subset E$ tales que, para un entorno U prefijado de antemano, $A \subset M + U$ y $B \subset M' + U$.
Entonces $A \cup B \subset (M \cup M') + U$ que prueba que $A \cup B$ es precompacto.
Siendo A y B precompactos, dado el entorno $\frac{1}{2} U$ de cero, existen conjuntos finitos $M, M' \subset E$ tales que

$$A \subset M + \tfrac{1}{2} U \quad \text{y} \quad B \subset M' + \tfrac{1}{2} U$$

Por tanto, $A + B \subset (M + M') + U$, pues U es convexo, que prueba que $A + B$ es precompacto.

3) Trivial.

4) Sea $t: E \to F$ una aplicación lineal continua (F localmente convexo) y A un conjunto precompacto de E. Veamos que $t(A)$ es precompacto.
Sea V entorno de cero en F. Entonces $t^{-1}(V)$ es un entorno de cero en E. Por tanto, existe un conjunto finito $M \subset E$ tal que $A \subset M + t^{-1}(V)$. Puesto que $t(A) \subset t(M) + V$. Siendo $t(M)$ finito, queda visto que $t(A)$ es precompacto.

5) Sea $A \subset E$ un conjunto precompacto. Veamos que A es acotado.
Se trata de probar que todo entorno U de cero absorbe a A.
Sea U entorno de cero. Existe entonces un conjunto finito $M \subset E$ tal que $A \subset M + U$. Siendo M finito y U absorbente, existe $\lambda > 0$ tal que $M \subset \lambda U$. Por tanto, $A \subset (\lambda + 1) U$, que prueba que A es acotado. c.s.q.d.

<u>OBSERVACION:</u> Existen muchas topologías localmente convexas para las cuales coinciden los conceptos de conjunto precompacto y conjunto acotado.

<u>3.2. TEOREMA:</u> (de F. Riesz)

> Si E es un espacio localmente convexo que admite un entorno de cero precompacto, entonces es de dimensión finita.

Demostr.: Sea U un entorno precompacto de cero y, por tanto, acotado. Por el teorema de Kolmogorov el espacio E es normable.
Sea $V = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$. V es entorno de cero. Siendo U entorno de cero existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda V \subset U$, pues $\{\lambda V\}_{\lambda > 0}$ es base de entornos de cero. Luego λV es precompacto y, por tanto, V es precompacto.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Entonces, puesto que $\frac{1}{2}V$ es entorno de cero, existen $a_1,\dots,a_n \in E$ tales que $V \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + \frac{1}{2}V)$ (I)

Sea $M = \langle a_1,\dots,a_n \rangle$. Si probamos que $M=E$ quedará probado que E es de dimensión finita.

De acuerdo con (I)

$$V \subset M + \frac{1}{2}V$$

Entonces $V \subset M + \frac{1}{2}V \subset M + \frac{1}{2}\left[M + \frac{1}{2}V\right] = M + \frac{1}{2}M + \frac{1}{2^2}V = M + \frac{1}{2^2}V$ por ser M espacio vectorial.

Por una simple inducción finita se prueba que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ V \subset M + \frac{1}{2^k}V$$

Puesto que $\{\frac{1}{2^k}V\}_{k\in\mathbb{N}}$ es base de entornos de cero se verifica que $V \subset \overline{M}$.

Siendo M de dimensión finita se verifica (TEOREMA 6.4, TEMA 3º) que M es cerrado y, por tanto, $M = \overline{M}$.

Luego $V \subset M$.

Por ser M subespacio se verifica que $nM = M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego $nV \subset M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Puesto que V es la bola unidad en el espacio normado E se verifica que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} nV = E$.

Por tanto, $E \subset M$, es decir, E es de dimensión finita. c.q.d.

OBSERVACION: Nótese como una propiedad topológica como es la precompacidad puede condicionar una característica puramente algebraica como es la dimensión del espacio.

Vamos a dar un teorema que marca la analogía del concepto de conjunto precompacto en un espacio métrico y el concepto de conjunto precompacto en un espacio vectorial topológico definido anteriormente. Para ello necesitamos cambiar la frase "conjunto de diametro menor o igual que ϵ" por la frase "conjunto pequeño de orden U". Necesitamos pues la siguiente

DEFINICIÓN: Sea E un espacio vectorial topológico y U un entorno de cero. Diremos que $A \subset E$ es un conjunto pequeño de orden U si $A - A = \{x - y \ / \ x, y \in A\} \subset U$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

3.3. TEOREMA: (Caracterización de conjuntos precompactos).

> Sea E un espacio vectorial topológico. Entonces, un subconjunto A de E es precompacto si, y solo si, para cada entorno de cero U existe un recubrimiento finito de A formado por conjuntos pequeños de orden U.

Demostr.: $\Rightarrow$] Sea A un conjunto precompacto en E.

Sea U un entorno de cero, que podemos tomar equilibrado pues existe en E una base de 0-entornos equilibrados.

Dado el entorno $\frac{1}{2}U$ de cero, puesto que A es precompacto, existen $a_1, \ldots, a_n \in E$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + \tfrac{1}{2}U)$$

Quedará probada la condición necesaria si vemos que $a_i + \frac{1}{2}U$ es pequeño de orden U, $i = 1, \ldots, n$. Pero esto es trivial pues
$(a_i + \frac{1}{2}U) - (a_i + \frac{1}{2}U) = \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U \subset U$ por ser U equilibrado.

$\Leftarrow$] Supongamos que dado U entorno de cero se puede escribir

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

donde A_i, $i = 1, \ldots, n$, son conjuntos pequeños de orden U.

Se verifica entonces que $A_i - A_i \subset U$, $i = 1, \ldots, n$.

Por tanto, si tomamos $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ se verifica que

$$A_i - \{a_i\} \subset U \text{ y por tanto}$$

$$A_i \subset a_i + U$$

Luego $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + U)$.

Es decir, A es precompacto. c.q.d.

DEFINICION: (Subbase de entornos)

Sea E un espacio vectorial topológico. Una familia $\mathcal{T}$ de entornos de cero se dice una subbase de entornos de cero si el conjunto de las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{T}$ constituye una base de entornos de cero.

Esta definición nos permitirá dar una condición suficiente más débil para que un conjunto de E sea precompacto. Esta condición nos será muy útil en lo sucesivo, pues conocemos para las topologías polares subbases de entornos que admiten una expresión más sencilla que las bases. Por ejemplo, la familia $\mathcal{T} = \{\{x \in E / |\langle x, x' \rangle| \leq 1\} / x' \in E'\}$ es una subbase de entornos de cero para la topología débil en E, $\sigma(E, E')$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

3.4. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial topológico y $\mathcal{V}$ una subbase de entornos de cero. Sea A un subconjunto de E. Entonces, si para cada $V\in\mathcal{V}$ el conjunto A puede recubrirse mediante una cantidad finita de conjuntos pequeños de orden V, se verifica que A es precompacto.

Demostr.: Sean $V, W\in\mathcal{V}$.
Por hipótesis, existen $B_1,\dots,B_n$ conjuntos pequeños de orden V y $C_1,\dots,C_m$, conjuntos pequeños de orden W tales que

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{n}B_i \quad \text{y} \quad A\subset\bigcup_{j=1}^{m}C_j.$$

Por tanto, $A\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}C_j\right)=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(B_i\cap C_j)$.

Puesto que $(B_i\cap C_j)-(B_i\cap C_j)\subset(B_i-B_i)\cap(C_j-C_j)\subset V\cap W$ se verifica que $B_i\cap C_j$ es un conjunto pequeño de orden $V\cap W$.
Por tanto, A puede recubrirse mediante una colección finita de conjuntos pequeños de orden $V\cap W$.
Por inducción se probaría que dados $V_1,\dots,V_n\in\mathcal{V}$, A puede recubrirse mediante una colección finita de conjuntos pequeños de orden $\bigcap_{i=1}^{n}V_i$. Puesto que estas intersecciones finitas constituyen una base de entornos de cero, quedaría probado por el teorema anterior que A es precompacto. csqd.

El siguiente teorema, en combinación con el apartado 5) del TEOREMA 3.1 prueba que los conjuntos acotados y los precompactos son los mismos para la topología débil.

3.5. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual. Entonces cada conjunto débilmente acotado de E es débilmente precompacto.

Demostr.: Sea A un subconjunto débilmente acotado de E.
Por definición de $\sigma(E,E')$ la familia

$$\mathcal{V}=\{\{x\in E/|\langle x,x'\rangle|\le 1\}/x'\in E'\}$$

es una subbase de 0-entornos de dicha topología en E.
Queremos probar que A es débilmente precompacto, para lo cual, por el teorema anterior, basta probar que para cada $V\in\mathcal{V}$ A puede recubrirse mediante una colección finita de conjuntos pequeños de orden V. Sea entonces $V=\{x\in E/|\langle x,x'\rangle|\le 1\}$, con $x'\in E'$.
Siendo A débilmente acotado y dado que $\{|\langle\cdot,x'\rangle|\}_{x'\in E'}$ es una familia de seminormas que genera la topología débil $\sigma(E,E')$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

se verifica por TEOREMA 1.1. que $|\langle A, x'\rangle|$ es acotado en $\mathbb{R}$, $\forall x' \in E'$ y, por tanto, $\langle A, x'\rangle$ es acotado en $\mathbb{K}$, $\forall x' \in E'$.

En particular, para el $x' \in E'$ que nos define V, $\langle A, x'\rangle$ es acotado en $\mathbb{K}$. Podemos entonces encontrar n bolas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ de radio menor o igual que $1/2$ tales que $\langle A, x'\rangle \in \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$.

Por tanto, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} x'^{-1}(\Gamma_i)$

Si probamos que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $x'^{-1}(\Gamma_i)$ es un conjunto pequeño de orden V quedará probado que A es precompacto.

Probemos entonces que $x'^{-1}(\Gamma_i) - x'^{-1}(\Gamma_i) \subset V$, $i = 1, \dots, n$, es decir, que $\forall x, y \in x'^{-1}(\Gamma_i)$, $x - y \in V$.

Si $x, y \in x'^{-1}(\Gamma_i)$ entonces $x'(x), x'(y) \in \Gamma_i$ y siendo Γ_i una bola de radio menor o igual que $1/2$ se verifica que $|x'(x) - x'(y)| \leq 1$, o bien, con la notación que venimos utilizando $|\langle x, x'\rangle - \langle y, x'\rangle| \leq 1$, es decir, $|\langle x - y, x'\rangle| \leq 1$, lo que prueba que $x - y \in V$.

Luego A es precompacto. c.s.q.d.

3.6. TEOREMA: Sean (E, E') y (F, F') dos pares duales y sea $t: E \to F$ una aplicación lineal débilmente continua. Sea $t': F' \to E'$ su transpuesta. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo las condiciones B.1) – B.4) del apartado 2. Sea $\mathcal{B}'$ una familia de conjuntos débilmente acotados de F' satisfaciendo las condiciones B.1) – B.4). Entonces, son equivalentes las condiciones siguientes:

1) $\forall B' \in \mathcal{B}'$, $t'(B')$ es precompacto para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E'.
2) $\forall A \in \mathcal{A}$, $t(A)$ es precompacto para la topología de la $\mathcal{B}'$-convergencia en F.

Demostr.: Siendo t débilmente continua, $t'(F') \subset E'$ y t' es débilmente continua. Además t es la transpuesta de t', como ésta lo es de t.

En virtud de esta simetría basta probar una sola de las implicaciones. Probaremos que 1) $\Rightarrow$ 2).

Supongamos entonces que $\forall B' \in \mathcal{B}'$, $t'(B')$ es precompacto para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E'.

Dado $B' \in \mathcal{B}'$, $(B')^\circ$ es entorno de cero para la topología de la $\mathcal{B}'$-convergencia en F. Por hipótesis, $t'(B')$ es precompacto para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. Entonces dado $A \in \mathcal{A}$, A° es entorno de cero para esta topología y, por tanto, $\frac{1}{3} A^\circ$ también. Luego existe un conjunto K' finito en E' tal que

$$t'(B') \subset K' + \frac{1}{3} A^\circ. \quad (I)$$

Siendo K' un conjunto finito en E', K'^{o} es un entorno débil en E (ver la demostración del TEOREMA 24), y por tanto $\frac{1}{3}K'^{o}$ es también entorno débil en E.
Puesto que A es débilmente acotado, es débilmente precompacto en E (TEOREMA 35)
Por tanto, A puede recubrirse mediante una colección finita $A_1, \dots, A_n$ de conjuntos pequeños de orden $1/3\, K'^{o}$ en E: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
Se verifica entonces que

$$t(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} t(A \cap A_i) \qquad (\mathrm{II})$$

Si probamos que $t(A \cap A_i)$, $i=1,\dots,n$, es un conjunto pequeño de orden B'^{o} quedará visto que $t(A)$ es precompacto respecto de la topología de la $\mathcal{B}'$-convergencia en F ($B' \in \mathcal{B}'$ lo hemos tomado arbitrario).
Se trata de probar que si $t(x), t(y) \in t(A \cap A_i)$ ($x, y \in A \cap A_i$) entonces $t(x) - t(y) \in B'^{o}$, para lo cual basta ver que

$$\forall b' \in B', \ |\langle t(x) - t(y), b' \rangle| \leq 1$$

es decir que $\forall b' \in B', |\langle t(x-y), b' \rangle| \leq 1$.
Por definición de transpuesta
$|\langle t(x-y), b' \rangle| = |\langle x-y, t'(b') \rangle|$
Por (I), $\exists a' \in K', c' \in \frac{1}{3}A^{o} / t'(b') = a' + c'$.
Entonces
$|\langle t(x-y), b' \rangle| = |\langle x-y, a'+c' \rangle| \leq |\langle x-y, a' \rangle| + |\langle x, c' \rangle| + |\langle y, c' \rangle|$
Puesto que $x, y \in A$ y $c' \in \frac{1}{3}A^{o}$ se verifica que $|\langle x, c' \rangle| \leq \frac{1}{3}$, $|\langle y, c' \rangle| \leq 1/3$.
Además puesto que $a' \in K'$ y A_i es un conjunto pequeño de orden $\frac{1}{3}K'^{o}$ se verifica que $x - y \in \frac{1}{3}K'^{o}$ y, por tanto, $|\langle x-y, a' \rangle| \leq 1/3$.
Luego $|\langle t(x) - t(y), b' \rangle| \leq 1$, $\forall b' \in B'$
Por tanto, $t(A \cap A_i)$ es pequeño de orden B'^{o}. Luego en virtud de (II) $t(A)$ es precompacto para la topología de la $\mathcal{B}'$-convergencia en F. csqd.

3.7. COROLARIO: Sea (E, E') un par dual. Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo las condiciones B.1)–B.4). Sea $\mathcal{A}'$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E' satisfaciendo B.1)–B.4). Entonces los elementos de $\mathcal{A}$ son precompactos respecto de la topología de la $\mathcal{A}'$-convergencia en E si, y solo si, los conjuntos de $\mathcal{A}'$ son precompactos respecto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E'.

Demostr.: Basta aplicar el teorema anterior para $E = F$, $E' = F'$, teniendo en cuenta que la transpuesta de la aplicación lineal $I: E \to E$ (débilmente continua) es precisamente la identidad en E'. csqd.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

3.8 COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo y A un conjunto precompacto de E. Entonces las envolventes convexa, absolutamente convexa y absolutamente convexa cerrada de A son conjuntos precompactos.

Demostr.: Consideremos la dualidad topológica (E,E') y sea $\mathcal{A}$ la familia de los conjuntos precompactos en E. Sea $\mathcal{B}$ la familia de las envolventes absolutamente convexas de los elementos de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{A}'$ la familia de los conjuntos equicontinuos en E'. Sean $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E', $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ la topología de la $\mathcal{B}$-convergencia en E', $\mathcal{T}_{\mathcal{A}'}$ la topología de la $\mathcal{A}'$-convergencia en E y $\mathcal{T}$ la topología original de E.

Por TEOREMA 2.5 $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\mathcal{A}'}$. Además $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}=\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, pues la polar de un conjunto coincide con la polar de su envolvente absolutamente convexa.

Puesto que $\mathcal{T}=\mathcal{T}_{\mathcal{A}'}$ se verifica que los elementos de $\mathcal{A}$ son conjuntos precompactos para la topología de la $\mathcal{A}'$-convergencia en E. Por el corolario anterior se verifica que los elementos de $\mathcal{A}'$ son precompactos por $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$. Pero $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}=\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$, luego los elementos de $\mathcal{A}'$ (los conjuntos equicontinuos en E') son precompactos para la topología de la $\mathcal{B}$-convergencia en E'. Aplicando de nuevo el corolario anterior se deduce que los elementos de $\mathcal{B}$ son conjuntos precompactos para la topología $\mathcal{T}_{\mathcal{A}'}$ en E, que coincide con $\mathcal{T}$. Luego las envolventes absolutamente convexas de los precompactos de E son conjuntos precompactos por $\mathcal{T}$.

Puesto que la envolvente convexa de un precompacto está contenida en la envolvente absolutamente convexa del mismo, y acabamos de ver que ésta es un conjunto precompacto. Luego la envolvente convexa de un conjunto precompacto es precompacta.

La envolvente absolutamente convexa y cerrada de un precompacto es precompacta, como clausura de la envolvente absolutamente convexa de dicho precompacto. c.s.q.d.

4. CONJUNTOS COMPACTOS.

A) DEFINICION: Sea X un espacio topológico. Diremos que un subconjunto A de X es compacto si de todo recubrimiento abierto de A se puede extraer un subrecubrimiento finito.

OBSERVACIONES ① Un subconjunto A de un espacio topológico X es compacto si, y solo si, A es compacto en el subespacio topológico A (con la topología inducida en A por la topología de X).

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

② Si sobre un conjunto X tenemos definidas dos topología τ y τ' de forma que τ es menos fina que τ', entonces todo conjunto compacto por τ' es compacto por τ.

③ En particular, si E es un espacio localmente convexo y consideramos en él la topología débil $\sigma(E,E')$ inducida por la dualidad topológica (E,E'), entonces todo conjunto compacto en E con la topología original es débilmente compacto.

4.1. TEOREMA: Sea X un espacio topológico. Se verifican las siguientes proposiciones:

1) Toda unión finita de compactos de X es compacto.
2) Todo subconjunto cerrado de un compacto es compacto.
3) Si X es separado, entonces todo conjunto compacto es cerrado.

Demostr.: 1) Sean A y B conjuntos compactos en X. Si $\{C_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $A\cup B$, entonces es un recubrimiento abierto de A y de B y, siendo éstos compactos, existen I', I'' partes finitas de I tales que $A\subset \bigcup_{i\in I'} C_i$, $B\subset \bigcup_{i\in I''} C_i$. Entonces

$$A\cup B \subset \bigcup_{i\in I'\cup I''} C_i$$

que prueba que $A\cup B$ es compacto. Por inducción quedaría probado que se verifica 1).

2) Sea A compacto $\subset X$ y B un subconjunto cerrado de A. Queremos ver que B es compacto.

Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de B.

Siendo B cerrado se verifica que $\complement B$ es abierto y, por tanto, $\{\complement B\}\cup\{B_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de X y, por tanto, de A, del cual, por ser A compacto podemos extraer un subrecubrimiento finito:

$$A\subset C\cup\left(\bigcup_{i\in I'} B_i\right), \quad I' \text{ finito} \subset I. \quad (I)$$

donde $C=\emptyset$ o bien $C=\complement B$.

Si $C=\emptyset$ $\{B_i\}_{i\in I'}$ es un subrecubrimiento finito de A y, por tanto, de B.

Si $C=\complement B$, de (I) y del hecho de que $B\cap\complement B=\emptyset$ se deduce que $\{B_i\}_{i\in I'}$ es un subrecubrimiento finito de B. Luego B es compacto.

3) Supongamos que X es separado. Sea A un compacto de X. Queremos probar que A es cerrado. Para ello veremos que si $x\notin A$ existe un entorno de x que no corta a A.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Siendo X separado, si $x \notin A$ se verifica que

$\forall y \in A$, $\exists V_y$ entorno de y, W_y entorno de x / $V_y \cap W_y = \phi$.

No hay ningún problema en tomar V_y abierto, $\forall y \in A$.

Puesto que $A \subset \bigcup_{y \in A} V_y$ tenemos un recubrimiento abierto de A del cual, por ser A compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, es decir, existen $y_1, \dots, y_n \in A$ tales que

$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$.

Sea $W = \bigcap_{i=1}^{n} W_{y_i}$. W es entorno de x como intersección finita de entornos de x.

Además $W \cap A = \phi$, pues

$$W \cap A \subset W \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (W \cap V_{y_i}) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (W_{y_i} \cap V_{y_i}) = \emptyset.$$

Por tanto, A es cerrado. csqd.

4.2. TEOREMA: Sean X, X' espacios topológicos y $f: X \to X'$ una aplicación continua. Si A es un compacto de X entonces $f(A)$ es compacto en X'.

Demostr.: Sea $\{V_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $f(A)$. Siendo f continua, $\{f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto de A, del cual, por ser A compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_i)$.

Entonces $f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$, que prueba que $f(A)$ es compacto. csqd.

4.3. COROLARIO: Sea X un espacio topológico y $f: X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces f es acotada sobre todo conjunto compacto de X. Aun más, si $A \subset X$ es compacto entonces

$$\sup_{x \in A} f(x) \in f(A) \quad \text{y} \quad \inf_{x \in A} f(x) \in f(A).$$

Demostr.: Sea A un compacto de X. Entonces $\{]-n, n[\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de $f(A)$. Siendo $f(A)$ compacto admite un subrecubrimiento finito, es decir, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(A) \subset]-m, m[$$

Luego $f(A)$ es acotado. Además, siendo $f(A)$ compacto, es cerrado.

Por tanto, $\sup_{x \in A} f(x) \in \overline{f(A)} = f(A)$, $\inf_{x \in A} f \in \overline{f(A)} = f(A)$. csqd.

B) **4.4. TEOREMA:** Sea E un espacio vectorial topológico. Entonces todo conjunto compacto de E es precompacto y, por tanto, acotado.

Demostr.: Sea A un conjunto compacto en E y U un entorno de cero. $\{x+\overset{\circ}{U}\}_{x\in A}$ es un recubrimiento abierto de A. Existen entonces $x_1,\dots,x_n\in A$ tales que $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+\overset{\circ}{U})\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U)$.
Por tanto, A es precompacto. c.s.q.d.

4.5. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo. Entonces
1) Si A es compacto, λA es compacto, para todo $\lambda\in\mathbb{K}$.
2) Si A y B son compactos, $A+B$ es compacto.
3) Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A+B$ es cerrado.

Demostr.: 1) Si $\lambda\neq 0$, $\varphi_\lambda : x\in E\longmapsto \lambda x\in E$ es una aplicación continua. Entonces si A es compacto, $\lambda A=\varphi_\lambda(A)$ es compacto.

2) Sean A y B compactos de E. Entonces, por el teorema de Tychonoff, $A\times B$ es compacto en $E\times E$. Puesto que $+:(E\times E)\longmapsto E$ es continua se verifica que $A+B$ es compacto.

3) Sea A un compacto de E y $B\subset E$ cerrado. Queremos probar que $A+B$ es cerrado. Para ello probaremos que si $a\notin A+B$ entonces existe un entorno de a que no corta a $A+B$.

Si $a\notin A+B$ entonces $a\notin x+B$, $\forall x\in A$.
Puesto que $x+B$ es cerrado, para todo $x\in A$, existe un entorno de cero $U(x)$, que podemos tomar absolutamente convexo tal que

$$(a+U(x))\cap(x+B)=\emptyset$$

En particular, puesto que $U(x)$ es equilibrado,

$$a\notin x+U(x)+B \quad ,\forall x\in A \qquad (\mathrm{I})$$

Como $\{x+\frac{1}{2}\overset{\circ}{U}(x)\}_{x\in A}$ es un recubrimiento abierto de A, existen $x_1,\dots,x_n\in A$ tales que $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{2}\overset{\circ}{U}(x_i))\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{2}U(x_i))$

Sea $V=\bigcap_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}U(x_i)\right)$. V es entorno de cero.

Veamos que $(a+V)\cap(A+B)=\emptyset$ con lo cual quedará terminada la demostración.

Se verifica que

$$A+V\subset\left[\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+\tfrac{1}{2}U(x_i))\right]+V=\bigcup_{i=1}^{n}\left[(x_i+\tfrac{1}{2}U(x_i))+V\right]\subset$$

$$\subset\bigcup_{i=1}^{n}\left(x_i+\tfrac{1}{2}U(x_i)+\tfrac{1}{2}U(x_i)\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+U(x_i))\subset\bigcup_{x\in A}(x+U(x)) \quad (\mathrm{II})$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
(c) Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Entonces $a \notin A+V+B$, pues si $a \in A+V+B$ se prodría expresar como suma de un elemento de $A+V$ y un elemento de B, y, en virtud de (II), a podría expresarse como suma de un elemento de $x+U(x)$ (para algún $x \in A$) y otro de B, lo cual contradice a (I).

Luego $a \notin A+V+B$ y, por tanto, por ser V equilibrado (como intersección finita de conjuntos equilibrados) $(a+V) \cap (A+B) = \emptyset$. c.s.q.d.

OBSERVACION. Sea E un espacio localmente convexo y $A, B \subset E$. Sabemos que si A y B son compactos, $A+B$ es compacto, y que si A es compacto y B cerrado entonces $A+B$ es cerrado. En general, no es cierto que si A y B son cerrados entonces $A+B$ sea cerrado. Por ejemplo, los conjuntos $A = \{n + \frac{1}{n} / n \geq 2\}$ y $B = \{-n / n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ son cerrados y su suma no es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$, pues $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} - \{0,1\}\} \subset A+B$ y 0, punto de acumulación de $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está en $A+B$.

C) Sea (E, E') un par dual. Consideremos tambien el par dual (E', E). Si $A \subset E$ su polar respecto de (E, E') es $A^\circ \subset E'$. Dado $A^\circ \subset E'$ su polar respecto de (E', E) es $A^{\circ\circ} \subset E$. Sabemos que $A \subset A^{\circ\circ}$ y que, si A es un disco débilmente cerrado, entonces $A = A^{\circ\circ}$.

Consideremos de nuevo el par (E, E') y la dualidad algebraica (E', E'^*). Se verifica que $E \subset E'^*$.

La polar de $A \subset E$ respecto de (E, E') es A°, y el conjunto polar de $A^\circ \subset E'$ lo denotaremos por $(A^\circ)^\bullet = A^{\circ\bullet} \subset E'^*$.

Es evidente, puesto que $E \subset E'^*$, que $A^{\circ\circ} \subset A^{\circ\bullet}$. Si A verifica ciertas condiciones (4.7 TEOREMA) ambas bipolares de A coinciden.

4.6. TEOREMA: Sea (E, E') un par dual. Consideremos la dualidad algebraica (E', E'^*). Entonces, si $A \subset E$, $A^{\circ\bullet} \subset E'^*$ es la envolvente absolutamente convexa y $\sigma(E'^*, E')$-cerrada de A.

Demostr.: Sea $B \subset E'^*$ la envolvente absolutamente convexa y $\sigma(E'^*, E')$-cerrada de A. Se trata de probar que $B = A^{\circ\bullet}$.

$A^{\circ\bullet}$, como polar de $A^\circ \subset E'$ respecto de (E', E'^*), es absolutamente convexo y $\sigma(E'^*, E')$-cerrado. Puesto que $A \subset A^{\circ\bullet}$ se verifica que $B \subset A^{\circ\bullet}$. Veamos que $A^{\circ\bullet} \subset B$, o lo que es equivalente, que si $a \in E'^* - B$ entonces $a \notin A^{\circ\bullet}$.

Siendo B un disco $\sigma(E'^*, E')$-cerrado en E'^*, si $a \notin B$, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach existe $x' \in (E'^*)' = E'$, tal que $\langle a, x' \rangle > 1$ y $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$, $\forall x \in B$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Puesto que $A \subset B$ se verifica que $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$, $\forall x \in A$ y, por tanto, $x' \in A^{\circ}$.

Siendo $x' \in A^{\circ}$, $a \in E'^{*}$ y $\langle a, x' \rangle > 1$ se deduce que $a \notin A^{\circ\bullet}$

Luego $B = A^{\circ\bullet}$ csqd.

<u>4.7. TEOREMA</u>: Sea (E, E') un par dual. Consideremos la dualidad algebraica (E', E'^{*}). Si $A \subset E$ es un conjunto absolutamente convexo y $\sigma(E, E')$-compacto, entonces $A^{\circ\bullet} = A$.

Demostr.: Sabemos que si un conjunto es compacto en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es compacto para cualquier topología sobre X menos fina que $\mathcal{T}$, y que un conjunto de un subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$ es compacto en dicho subespacio si, y sólo si, es compacto en $(X, \mathcal{T})$.

Consideremos entonces el hecho de que $E \subset E'^{*}$ y que la topología $\sigma(E'^{*}, E')$ induce en E la topología $\sigma(E, E')$, pues dichas topología están generadas por la misma familia de seminormas (definidas a partir de los elementos de E').

Entonces, siendo A $\sigma(E, E')$-compacto en E es $\sigma(E'^{*}, E')$-compacto en E'^{*} y, en consecuencia, A es $\sigma(E'^{*}, E')$-cerrado.

Puesto que A es, además absolutamente convexo, se deduce que la envolvente absolutamente convexa y $\sigma(E'^{*}, E')$-cerrada de A es A, es decir, según el teorema anterior, $A = A^{\circ\circ}$ csqd.

<u>OBSERVACION</u>: En las hipótesis del teorema anterior se verifica que $A^{\circ\circ} = A^{\circ\bullet}$ pues $A \subset A^{\circ\circ} \subset A^{\circ\bullet}$.

El siguiente teorema (parte del teorema de Mackey que probaremos más adelante) nos da un método para construir topologías polares en E', compatibles con la dualidad (E, E').

<u>4.8. TEOREMA</u>: Sea (E, E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados de E satisfaciendo las propiedades B.1), B.2), B.3) y B.4) del apartado 2. Si los elementos de $\mathcal{A}$ son conjuntos débilmente ($\sigma(E, E')$-) compactos en E entonces el dual de E' con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es E.

Demostr.: Sea $E'_{\mathcal{A}}$ el espacio vectorial E' dotado con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. Queremos probar que $(E'_{\mathcal{A}})' = E$.

$\mathcal{U} = \{A^{\circ} / A \in \mathcal{A}\}$ es base de entornos de cero en $E'_{\mathcal{A}}$.

Siendo $E'_{\mathcal{A}}$ un espacio localmente convexo se verifica que (TEOREMA 3.[illegible])

su dual topológico es la unión de las polares de los elementos de [illegible]

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

to de la dualidad algebraica (E', E'^*), es decir

$$(E'_{\mathcal{A}})' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ$$

Por definición de $\mathcal{U}$

$$(E'_{\mathcal{A}})' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A^\circ)^\circ = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\circ\circ}$$

Siendo los elementos de $\mathcal{A}$ débilmente compactos, se verifica por el teorema anterior que $A = A^{\circ\circ}$ y por tanto

$$(E'_{\mathcal{A}})' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

Puesto que $\mathcal{A}$ satisface B.3), es decir, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = E$, queda probado que

$$(E'_{\mathcal{A}})' = E. \qquad \text{csqd.}$$

5. FILTROS. ULTRAFILTROS.

Antes de estudiar la noción de completitud, definiremos los conceptos de filtro y ultrafiltro.

DEFINICION: (Filtro)

Sea X un conjunto no vacio. Un filtro $\mathcal{F}$ en X es una familia no vacía de conjuntos no vacios de X que satisface las condiciones siguientes:

F.1) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.

F.2) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$ entonces $B \in \mathcal{F}$.

Ejemplos: ① Si X es un espacio topológico y $x \in X$, la familia de entornos de x es un filtro llamado de entornos de x.

② Sea un conjunto $X \neq \emptyset$ y $A \in \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$. La familia $\mathcal{F}$ de los superconjuntos de A en X es un filtro pues $\mathcal{F} \neq \emptyset$ $(A \in \mathcal{F})$ y $\emptyset \notin \mathcal{F}$ pues $A \neq \emptyset$. Las propiedades F.1) y F.2) son triviales.

DEFINICION: (Base de filtro)

Sea X un conjunto. Una familia no vacía $\mathcal{B}$ de conjuntos de X no vacios satisfaciendo la propiedad siguiente:

$\forall A, B \in \mathcal{B}, \exists C \in \mathcal{B} / A \cap B \supset C$, se llama base de filtro.

Todo filtro es una base de filtro.

Se verifica además la siguiente

5.1. PROPOSICION: Si $\mathcal{B}$ es una base de filtro en un conjunto X, entonces existe un único filtro $\mathcal{F}$, que se dice generado por $\mathcal{B}$, definido por

$$A \in \mathcal{F} \iff \exists B \in \mathcal{B} / B \subset A.$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

DEFINICION: Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos filtros en un conjunto X. Se dice que $\mathcal{F}$ es menos fino que $\mathcal{G}$ (o que $\mathcal{G}$ es más fino que $\mathcal{F}$, o que $\mathcal{G}$ es un refinamiento de $\mathcal{F}$) o que $\mathcal{F} \leqslant \mathcal{G}$ si $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

$\leqslant$ es una relación de orden parcial en el conjunto de los filtros de X. Entonces

DEFINICION: (Ultrafiltro)

Un ultrafiltro en X es un filtro maximal en el conjunto de los filtros de X con el orden $\leqslant$.

5.2. PROPOSICION: Sean X e Y conjuntos no vacios y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Si $f: X \to Y$ es una aplicación, entonces $f(\mathcal{F}) = \{f(A) / A \in \mathcal{F}\}$ es una base de filtros en Y.

Demostr.: Evidentemente $f(\mathcal{F}) \neq \emptyset$ y $\emptyset \notin f(\mathcal{F})$

Además, $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$ y $A \cap B \in \mathcal{F}$. csqd.

OBSERVACION: El resultado anterior se puede mejorar, en el sentido de que la imagen de una base de filtro por una aplicación es una base de filtro.

5.3. TEOREMA: (Existencia de ultrafiltros)

Sea X un conjunto y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Existe entonces un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en X más fino que $\mathcal{F}$.

Demostr.: Consideremos la familia $\mathbb{F} = \{\mathcal{G} \text{ filtro en } X / \mathcal{F} \leqslant \mathcal{G}\}$.

$\mathbb{F} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \in \mathbb{F}$.

Evidentemente $(\mathbb{F}, \leqslant)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Además, $\leqslant$ es un orden inductivo, es decir, toda cadena en $\mathbb{F}$ tiene cota superior: En efecto, si $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$ es una cadena en $\mathbb{F}$, entonces $\mathcal{G}_0 = \bigcup_{i \in I} \mathcal{G}_i$ es un filtro en X más fino que $\mathcal{F}$ y que es cota superior de $\{\mathcal{G}_i\}_{i \in I}$.

Por el lema de Zorn, existe en $\mathbb{F}$ un elemento maximal $\mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X más fino que $\mathcal{F}$ pues $\mathcal{U} \in \mathbb{F}$ y $\mathcal{U}$ es maximal. csqd.

5.4. TEOREMA: Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en un conjunto X y A es un subconjunto no vacio de X entonces se verifica que $A \in \mathcal{U}$ ó $\complement A \in \mathcal{U}$.

Demostr.: Supongamos que $A \notin \mathcal{U}$ y probemos que $\complement A \in \mathcal{U}$

En estas hipótesis se verifica que

$$B \cap \complement A \neq \emptyset, \quad \forall B \in \mathcal{U}$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

pues si existiese $B \in \mathfrak{U}$ tal que $B \cap \complement A = \emptyset$ se verificaría que $B \subset A$ y, por tanto, $A \in \mathfrak{U}$, contra lo supuesto.

Puesto que $B \cap \complement A \neq \emptyset$, $\forall B \in \mathfrak{U}$, se comprueba trivialmente que $\{B \cap \complement A\}_{B \in \mathfrak{U}}$ es una base de filtro en X.

Sea $\mathfrak{U}_0$ el filtro generado por esta base.

Entonces $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{U}_0$, pues si $B \in \mathfrak{U}$, $B \cap \complement A \in \mathfrak{U}_0$ y por tanto $B \in \mathfrak{U}_0$, pues $B \cap \complement A \subset B$.

Siendo $\mathfrak{U}$ ultrafiltro se deduce que $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0$.

Puesto que $\complement A \in \mathfrak{U}_0$, pues $\complement A = X \cap \complement A \in \{B \cap \complement A\}_{B \in \mathfrak{U}}$, queda probado que $\complement A \in \mathfrak{U}$. c.s.q.d.

5.5 COROLARIO: Sea $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro en un conjunto X y sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de conjuntos no vacíos de X tales que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{U}$. Entonces, al menos un conjunto A_i, $i=1,\dots,n$, pertenece a $\mathfrak{U}$.

Demostr.: Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que $A_i \notin \mathfrak{U}$, $i=1,\dots,n$.

Por el teorema anterior, $\complement A_i \in \mathfrak{U}$, $i=1,\dots,n$.

Por tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} \complement A_i = \complement\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in \mathfrak{U}$.

Puesto que, por hipótesis, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathfrak{U}$ se verificará que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\complement \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \in \mathfrak{U}$, lo cual no es posible pues

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(\complement \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \emptyset .$$

Por tanto, $\exists i \in \{1,\dots,n\} \,/\, A_i \in \mathfrak{U}$. c.s.q.d.

OBSERVACION: El concepto de filtro pone a nuestra disposición un método que permite dar un tratamiento formal al concepto de convergencia en espacios topológicos generales.

DEFINICION: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro en X. Diremos que el filtro $\mathcal{F}$ converge hacia el punto $a \in X$, y lo denotaremos por $\mathcal{F} \to a$, si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de a.

Equivalentemente

$$(\mathcal{F} \to a) \Leftrightarrow (\forall U \text{ entorno de } a, \exists A \in \mathcal{F} / A \subset U).$$

DEFINICION: Sea X un espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Se llama filtro elemental asociado a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ al filtro $\mathcal{F}$ cuya base (numerable) es $\mathcal{B} = \{B_n / n \in \mathbb{N}\}$ donde

$$B_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}. \ (*)$$

Se verifica entonces el siguiente

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

(*) Fácilmente se comprueba que $\mathcal{B}$ es, en efecto, una base de filtro

5.6. TEOREMA: Sea X un espacio topológico, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $\mathcal{F}$ el filtro elemental asociado a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_n$ converge a un punto $x\in X$ si, y solo si, $\mathcal{F}\to x$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si $\{x_n\}_n$ converge a x se verifica que dado un entorno $U(x)$ de x existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geq n_0$ entonces $x_k\in U(x)$.
Por tanto, $B_{n_0}\subset U(x)$, que prueba que $U(x)\in\mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de entornos de x, es decir, $\mathcal{F}\to x$.
$\Leftarrow$] Suponemos ahora que $\mathcal{F}\to x$. Queremos probar que $\{x_n\}_n\to x$.
Dado un entorno cualquiera $U(x)$ de x, puesto que $\mathcal{F}\to x$, se verifica que $U(x)\in\mathcal{F}$. Puesto que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base del filtro $\mathcal{F}$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $B_{n_0}\subset U(x)$, es decir, $x_k\in U(x)$, $\forall k\geq n_0$.
Luego, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\to x$. csqd.

5.7. TEOREMA: Un espacio topológico X es separado si, y solo si, cada filtro en X converge, a lo sumo, a un punto de X.

Demostr.: $\Rightarrow$] Sea X un espacio topológico separado y $\mathcal{F}$ un filtro en X.
Razonemos por reducción al absurdo suponiendo que existen $a,b\in X$, distintos, tales que $\mathcal{F}\to a$ y $\mathcal{F}\to b$.
Puesto que X es separado, existen U y V, entornos respectivos de a y b, tales que $U\cap V=\emptyset$.
Puesto que $\mathcal{F}\to a$ y $\mathcal{F}\to b$, $\exists A,B\in\mathcal{F} / A\subset U, B\subset V$.
Por F.1) $A\cap B\in\mathcal{F}$, lo cual es absurdo pues $A\cap B=\emptyset$ y $\emptyset\notin\mathcal{F}$.
Por tanto, $\mathcal{F}$ tiene, a lo sumo, un punto límite.
$\Leftarrow$] Supongamos que X no fuese separado. Existirían entonces $x,y\in X$, $x\neq y$, tal que para todo U,V entornos respectivos de x y de y, $U\cap V\neq\emptyset$.
Sea $\mathcal{U}=\{U / U \text{ entorno de } x\}$ y $\mathcal{V}=\{V/V \text{ entorno de } y\}$.
Trivialmente $\mathcal{B}=\{U\cap V\}_{\substack{U\in\mathcal{U}\\ V\in\mathcal{V}}}$ es base de filtro en X.
Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$.
$\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de x, pues para todo $U\in\mathcal{U}$, $U\in\mathcal{F}$, pues $U\cap V\in\mathcal{B}$ y $U\cap V\subset U$, para cualquier $V\in\mathcal{V}$.
Análogamente, $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los entornos de y.
Se verifica entonces que

$$\mathcal{F}\to x \quad y\ \mathcal{F}\to y \quad , x\neq y.$$

en contra de la hipótesis. Luego X es separado. csqd.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

5.8. TEOREMA: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro convergente a un punto $a \in X$. Entonces a es un punto adherente a todos los elementos del filtro. Es decir,

$$(\mathcal{F} \longrightarrow a) \Rightarrow (a \in \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \overline{B})$$

Demostr.: Se trata de probar que $\forall B \in \mathcal{F}, a \in \overline{B}$, es decir, que si $B \in \mathcal{F}$ y V es un entorno arbitrario de a entonces $V \cap B \neq \emptyset$.

Pero esto es trivialmente cierto, pues si V es entorno de a, entonces $V \in \mathcal{F}$, pues $\mathcal{F} \to a$.

Como $B \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{F}$ se verifica que $V \cap B \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $V \cap B \neq \emptyset$. csqd.

OBSERVACION: Algunos autores (p.ej., Bourbaki) convienen en llamar punto adherente a un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio topológico X a un punto que sea adherente a todos los elementos de $\mathcal{F}$. El teorema anterior asegura entonces que si a es un punto límite de un filtro $\mathcal{F}$ entonces a es adherente a $\mathcal{F}$.

El siguiente teorema da dos caracterizaciones de los conjuntos compactos en un espacio topológico en términos de filtros.

5.9. TEOREMA: Sea X un espacio topológico y A un subconjunto de X. Son equivalentes las siguientes proposiciones

1) A es compacto.
2) Si una familia $\{B_i\}_{i \in I}$ de conjuntos cerrados no vacíos es tal que $A \cap (\bigcap_{i \in I} B_i) = \emptyset$, entonces existe una subfamilia finita $B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ tal que $A \cap (\bigcap_{k=1}^{n} B_{i_k}) = \emptyset$.
3) Si $\mathcal{F}$ es un filtro en X tal que $A \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ admite un refinamiento que converje a un punto de A.
4) Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en X tal que $A \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ converge a un punto de A.

Demostr.: 1) $\Leftrightarrow$ 2) Si A es compacto y $A \cap (\bigcap_{i \in I} B_i) = \emptyset$, entonces $A \subset \complement \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} \complement B_i$. Puesto que $\complement B_i$ es abierto, $\forall i \in I$, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \complement B_{i_k} = \complement \bigcap_{k=1}^{n} B_{i_k}$ y, por tanto, $A \cap (\bigcap_{k=1}^{n} B_{i_k}) = \emptyset$.

Recíprocamente, sea $A \subset X$ y $\{\complement B_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de A. Entonces $A \cap (\bigcap_{i \in I} B_i) = \emptyset$ y, puesto que B_i es cerrado, $\forall i$, existen por hipótesis, $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $A \cap (\bigcap_{k=1}^{n} B_{i_k}) = \emptyset$ y, por tanto $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \complement B_{i_k}$, es decir, A es compacto.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

3) $\Longleftrightarrow$ 4) Supongamos que se verifica 3). Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro tal que $A\in\mathcal{U}$, existe un filtro $\mathcal{U}'$ más fino que $\mathcal{U}$ que converje a un punto $a\in A$. Puesto que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro se verifica que $\mathcal{U}=\mathcal{U}'$ y, por tanto, $\mathcal{U}\to a\in A$.
Evidentemente 4) $\Rightarrow$ 3), pues si $\mathcal{F}$ es un filtro tal que $A\in\mathcal{F}$, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ más fino que $\mathcal{F}$ que, por 4), converge a un punto $a\in A$.

2) $\Longleftrightarrow$ 3)

2) $\Rightarrow$ 3) Sea $\mathcal{F}$ un filtro tal que $A\in\mathcal{F}$. Probemos, por reducción al absurdo, que existe $a\in A$ tal que $a\in\bigcap_{B\in\mathcal{F}}\overline{B}$. En efecto, pues de no verificarse lo anterior se tendría que
$$A\cap\Big(\bigcap_{B\in\mathcal{F}}\overline{B}\Big)=\emptyset$$
y, por tanto, en virtud de 2), existirían $B_1,\dots,B_n\in\mathcal{F}$ tales que
$$A\cap\overline{B}_1\cap\dots\cap\overline{B}_n=\emptyset. \quad (\mathrm{I})$$
Puesto que $B_i\subset\overline{B}_i$, $i=1,\dots,n$ se verifica que $\overline{B}_i\in\mathcal{F}$, $i=1,\dots,n$. Además $A\in\mathcal{F}$. Luego, $A\cap\overline{B}_1\cap\dots\cap\overline{B}_n\in\mathcal{F}$ (como intersección finita de elementos de $\mathcal{F}$), lo cual contradice (I) (ya que $\emptyset\notin\mathcal{F}$).
Por tanto, $a\in\bigcap_{B\in\mathcal{F}}\overline{B}$, es decir, a es adherente a todos los elementos de $\mathcal{F}$. En consecuencia, todo entorno V de a corta a todo elemento $B\in\mathcal{F}$. Si denotamos por $\mathcal{V}(a)$ la familia de entornos de a, se verifica que $\{V\cap B\}_{V\in\mathcal{V}(a),B\in\mathcal{F}}$ es una familia no vacía de conjuntos no vacíos que satisface trivialmente la condición de base de filtro.
Sea $\mathcal{F}'$ el filtro generado por dicha base. Puesto que $\mathcal{F}'\geq\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ es más fino que el filtro de entornos de a queda probado que 2) $\Rightarrow$ 3).

3) $\Rightarrow$ 2) Sea $\{B_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos cerrados no vacíos tales que $A\cap\Big(\bigcap_{i\in I}B_i\Big)=\emptyset$.

Supongamos que la proposición 2) es falsa, es decir, que ninguna subfamilia finita de $\{B_i\}_{i\in I}$ verifica la tesis, es decir, que
$$\forall I' \text{ finito}\subset I,\ A\cap\Big(\bigcap_{i\in I'}B_i\Big)\neq\emptyset.$$
Trivialmente la familia $\mathcal{B}=\{A\cap(\bigcap_{i\in I'}B_i)\}_{I'\text{ finito}\subset I}$ es base de filtro.
Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{B}$. Por 3) existe un filtro $\mathcal{F}'$ más fino que $\mathcal{F}$ que converje a un punto $a\in A$, pues $A\in\mathcal{F}$.
Se verifica entonces que a es adherente a todos los elementos de $\mathcal{F}'$; en particular, a es adherente a todos los B_i, es decir, $a\in\overline{B}_i$ $\forall i\in I$

Apuntes de la asignatura ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Puesto que los B_i son cerrados, se verifica que $a \in B_i$, $\forall i \in I$.
Por tanto, $a \in A \cap (\bigcap_{i\in I} B_i)$, en contra de que $A \cap (\bigcap_{i \in I} B_i) = \emptyset$

Debe entonces existir I' finito $\subset I$ tal que $A \cap (\bigcap_{i\in I'} B_i) = \emptyset$. c.s.q.d.

6. ESPACIOS COMPLETOS

DEFINICION: (Filtro de Cauchy)

Sea E un espacio localmente convexo. Un filtro $\mathcal{F}$ en E se dice que es de Cauchy si para cada entorno de cero U en E existe en $\mathcal{F}$ un conjunto A pequeño de orden U, es decir, tal que $A - A \subset U$.

6.1. PROPOSICION: Una sucesión $\{x_n\}_n$ en un espacio metrizable es de Cauchy si, y solo si, su filtro elemental asociado es de Cauchy.

La demostración es trivial; no hay más que observar que
($\{x_n\}_n$ es de Cauchy) $\Leftrightarrow$ ($\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq m \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$)
y ($\mathcal{F}$ de Cauchy) $\Leftrightarrow$ ($\forall U_\varepsilon = \{x \in E / d(0,x) \leq \varepsilon\}, \exists A_{n_0} = \{x_n / n \geq n_0\} \in \mathcal{F} / A_{n_0} - A_{n_0} \subset U_\varepsilon$)
donde $\mathcal{F}$ es el filtro elemental asociado a $\{x_n\}$ (hay que observar que la distancia d es invariante por traslaciones). ■

OBSERVACIONES: ① Las sucesiones en un espacio localmente convexo no son un instrumento suficientemente potente para describir la completitud del espacio; de ahí la necesidad de introducir el concepto de filtro de Cauchy.
② El concepto de filtro de Cauchy no se puede definir en espacios topológicos generales. El marco natural de este concepto se encuentra en la llamada estructura uniforme.

6.2. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo. Entonces todo filtro convergente en E es de Cauchy.

Demostr: Sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos absolutamente convexos de E. Basta probar la condición de Cauchy para los entornos de dicha base. Sea, entonces, $\mathcal{F}$ un filtro convergente en E hacia un punto a.
Dado $U \in \mathcal{U}$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset a + \frac{1}{2}U$.
Entonces, $A - A \subset \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U = U$, por ser U absolutamente convexo. ■

6.3. TEOREMA: Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en el espacio localmente convexo E y a un punto adherente a $\mathcal{F}$, es decir, $a \in \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \overline{B}$.
Entonces $\mathcal{F} \longrightarrow a$.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Demostr.: Se trata de probar que todo entorno $a+U$ de a en E pertenece a $\mathcal{F}$. Basta probarlo para los entornos U de cero absolutamente convexos. Dado entonces un entorno de cero U absolutamente convexo, por ser $\mathcal{F}$ de Cauchy existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A - A \subset \frac{1}{2}U$.

Además, por hipótesis $a \in \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \overline{B}$. En particular, $a \in \overline{A}$ y por tanto, $(a + \frac{1}{2}U) \cap A \neq \emptyset$. Sea $z \in (a+\frac{1}{2}U) \cap A$.

Veamos ya que $A \subset a+U$, con lo cual $a+U \in \mathcal{F}$, pues $A \in \mathcal{F}$, y en consecuencia, $\mathcal{F} \to a$.

Si $x \in A$, $x - z \in A - A \subset \frac{1}{2}U$.

Además $z - a \in \frac{1}{2}U$, pues $z \in a + \frac{1}{2}U$.

Luego $x - a = (x-z) + (z-a) \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$,

y, por tanto, $x \in a+U$. csqd.

<u>DEFINICION</u>: (Espacio localmente convexo completo).

Un espacio localmente convexo E se dice que es completo si todo filtro de Cauchy en E **es** convergente en E.

<u>DEFINICION</u>: (Conjunto completo)

Sea E un espacio localmente convexo y $A \subset E$. Se dice que A es completo si todo filtro de Cauchy en E al cual pertenezca A es convergente a un punto de A.

Una condición suficiente para que $A \subset E$ sea completo la da el siguiente teorema.

<u>6.4. TEOREMA</u>: Sea E un espacio localmente convexo y $A \subset E$. Es condición suficiente para que A sea completo que los ultrafiltros de Cauchy en E a los que pertenece A sean convergentes hacia un punto de A.

Demostr.: Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en E tal que $A \in \mathcal{F}$. Existe entonces un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en E tal que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es de Cauchy, tambien lo es $\mathcal{U}$. Además $A \in \mathcal{U}$. Por hipótesis, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{U} \to a$

Por tanto, a es adherente a $\mathcal{U}$, es decir, $a \in \bigcap_{B \in \mathcal{U}} \overline{B}$

Puesto que $\mathcal{F} \leq \mathcal{U}$ se verifica que $\bigcap_{B \in \mathcal{U}} \overline{B} \subset \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \overline{B}$. Por tanto, a es adherente a $\mathcal{F}$. Siendo $\mathcal{F}$ de Cauchy queda visto que $\mathcal{F} \to a$. csqd

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

La siguiente proposición recoge algunas importantes propiedades de los conjuntos completos.

6.5. PROPOSICION: Sea E un espacio localmente convexo. Entonces

1) Todo múltiplo escalar de un conjunto completo es completo.
2) Todo subconjunto cerrado de un conjunto completo es completo.
3) Toda unión finita de conjuntos completos es completo.
4) Si E es separado, todo conjunto completo en E es cerrado.

Demostr.: 1) Sea $A \subset E$ un conjunto completo y $\lambda \in \mathbb{K}-\{0\}$.
Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy tal que $\lambda A \in \mathcal{F}$, queremos ver que existe $b \in \lambda A$ tal que $\mathcal{F} \to b$.

Fácilmente se comprueba que $\frac{1}{\lambda}\mathcal{F} = \{\frac{1}{\lambda}B \,/\, B \in \mathcal{F}\}$ es un filtro en E, (pues $\lambda^{-1}(A \cap B) = \lambda^{-1}A \cap \lambda^{-1}B$). Veamos que es de Cauchy.

Si U es entorno de cero λU tambien lo es. Siendo $\mathcal{F}$ de Cauchy existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B - B \subset \lambda \cdot U$. Por tanto $\lambda^{-1}(B-B) \subset U$
Pero $\lambda^{-1}(B-B) = \lambda^{-1}B - \lambda^{-1}B$, y $\lambda^{-1}B \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}$.

Entonces, dado que $\lambda A \in \mathcal{F}$, $A \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}$.
Siendo A completo y $\frac{1}{\lambda}\mathcal{F}$ de Cauchy, existe $a \in A$ tal que $\frac{1}{\lambda}\mathcal{F} \to a$.
Veamos que $\mathcal{F} \to \lambda a$, es decir, que para todo entorno de cero U $\lambda a + U \in \mathcal{F}$. Dado U entorno de cero, $\lambda^{-1}U$ tambien es entorno de cero y puesto que $\frac{1}{\lambda}\mathcal{F} \to a$, $a + \lambda^{-1}U \in \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}$.

Por tanto, $\lambda a + U \in \mathcal{F}$.
Queda visto que existe $b = \lambda a \in \lambda A$ tal que $\mathcal{F} \to b$, que prueba que λA es completo.

2) Sea B un subconjunto cerrado de un conjunto completo A. Queremos ver que B es completo, es decir, que si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy tal que $B \in \mathcal{F}$ entonces existe $b \in B$ tal que $\mathcal{F} \to b$.

Puesto que $A \supset B$ y $B \in \mathcal{F}$ se verifica que $A \in \mathcal{F}$.
Siendo A completo y $\mathcal{F}$ de Cauchy, existe $a \in A$ tal que $\mathcal{F} \to a$.
Por tanto, a es adherente a $\mathcal{F}$, es decir, $a \in \bigcap_{C \in \mathcal{F}} \overline{C}$. En particular, $a \in \overline{B}$, pues $B \in \mathcal{F}$.

Siendo B cerrado, $B = \overline{B}$, se verifica que $a \in B$.

3) Sean $A_1, \dots, A_n$ una colección finita de conjuntos completos.
Por TEOREMA 6.4, para ver que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es completo, basta probar que si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro de Cauchy tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}$ con-

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

verge a un punto de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Sea pues $\mathcal{U}$ un ultrafiltro de Cauchy tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{U}$.

Por COROLARIO 5.5, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $A_i \in \mathcal{U}$.

Siendo A_i completo y $\mathcal{U}$ un filtro de Cauchy al que pertenece A_i, existe $a \in A_i$ tal que $\mathcal{U} \to a$. Puesto que $a \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, queda visto que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es completo.

4) Supongamos que E es separado. Sea $A \subset E$ completo. Queremos probar que A es cerrado, es decir, que $(a \in \overline{A}) \Rightarrow (a \in A)$.

Sea $a \in \overline{A}$. Entonces para todo 0-entorno U

$$(a+U) \cap A \neq \emptyset$$

Es trivial comprobar que $\{(a+U) \cap A \,/\, U \text{ entorno de cero}\}$ es una base de filtros. Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por dicha base.

Entonces $A \in \mathcal{F}$, pues $(a+U) \cap A \in \mathcal{F}$ y $(a+U) \cap A \subset A$.

No hay problema en suponer que los entornos U que determinan la base de filtro anterior son absolutamente convexos. Entonces $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy, pues dado un entorno de cero U

$$[(a+\tfrac{1}{2}U) \cap A] - [(a+\tfrac{1}{2}U) \cap A] \subset U$$

y $(a+\frac{1}{2}U) \cap A \in \mathcal{F}$.

Siendo A completo, $\mathcal{F}$ de Cauchy y $A \in \mathcal{F}$, existe $b \in A$ tal que $\mathcal{F} \to b$.

Puesto que $\mathcal{F}$ es separado, $\mathcal{F}$ converge a un solo punto.

Por otra parte, $\mathcal{F} \to a$, pues todo entorno $a+U$ de a pertenece a $\mathcal{F}$, por contener a algún $(a+V) \cap A$, con V entorno absolutamente convexo.

De lo dicho se deduce que $b = a$ y, por tanto, $a \in A$. c.s.q.d.

Veamos ahora **dos** caracterizaciones de conjuntos precompactos:

<u>6.6. TEOREMA:</u> (Caracterización de conjuntos precompactos)

Sea E un espacio localmente convexo. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1) A es precompacto. ($A \subset E$)
2) Todo filtro $\mathcal{F}$ al cual pertenece A admite un refinamiento de Cauchy.
3) Todo ultrafiltro al cual pertenece A es de Cauchy.

Demostr.: Las condiciones 2) y 3) son equivalentes, pues si se verifica 2), dado $\mathcal{U}$, ultrafiltro, tal que $A \in \mathcal{U}$, existe $\mathcal{U}'$ filtro de Cauchy tal que $\mathcal{U} \leq \mathcal{U}'$, pero $\mathcal{U}$ es ultrafiltro y, por tanto, $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$, que prueba que $\mathcal{U}$ es

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

de Cauchy; además si se verifica 3), dado $\mathcal{F}$, filtro, tal que $A\in\mathcal{F}$, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F}\preceq\mathcal{U}$; en consecuencia $A\in\mathcal{U}$ y, por 3), $\mathcal{U}$ es de Cauchy, y por tanto, $\mathcal{U}$ es un refinamiento de Cauchy de $\mathcal{F}$.

Si probamos que 1) $\Rightarrow$ 3) y que 2) $\Rightarrow$ 1) quedará demostrado el teorema.

1) $\Rightarrow$ 3) Sea A un conjunto precompacto y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro tal que $A\in\mathcal{U}$. Se trata de probar que $\mathcal{U}$ es de Cauchy, es decir, que para todo entorno de cero U existe $B\in\mathcal{U}$ tal que B es pequeño de orden U.

Siendo A precompacto existen $A_1,\dots,A_n$ conjuntos pequeños de orden U tal que $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. Puesto que $A\in\mathcal{U}$, $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in\mathcal{U}$ y por tanto existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tal que $A_i\in\mathcal{U}$. Puesto que A_i es pequeño de orden U queda visto que $\mathcal{U}$ es de Cauchy.

2) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que se verifica 2) y razonemos por reducción al absurdo. Si A no es precompacto, existe un entorno de cero U de forma que A no admite ningún subrecubrimiento finito formado por conjuntos pequeños de orden U. Consideremos la familia $\mathcal{B}$ formada por los conjuntos B de E que pueden ser recubiertos por una colección finita de conjuntos pequeños de orden U. Entonces $A\notin\mathcal{B}$.

Además A no puede ser subconjunto de ningún elemento de $\mathcal{B}$ (pues en ese caso $A\in\mathcal{B}$).

Por tanto, $\forall B\in\mathcal{B}$, $A\cap\complement B\neq\emptyset$.

Es trivial que $\{A\cap\complement B\}$ es una base de filtro.

Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por ella. Entonces $A\in\mathcal{F}$ (pues $A\cap\complement B\subset A$ $\forall B\in\mathcal{B}$).

Por hipótesis (2)) $\mathcal{F}$ admite un refinamiento $\mathcal{G}$ de Cauchy, es decir, existe un filtro $\mathcal{G}\succeq\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{G}$ es de Cauchy.

Dado el entorno de cero U precedente, existe $G\in\mathcal{G}$ tal que $G-G\subset U$, es decir, G es pequeño de orden U. Por tanto, $G\in\mathcal{B}$.

Entonces $A\cap\complement G$ está en la base de $\mathcal{F}$ y, por tanto, en $\mathcal{G}$.

Puesto que $A\cap\complement G\subset\complement G$ se deduce que $\complement G\in\mathcal{G}$.

Hemos llegado ya a un absurdo, pues G y $\complement G$ no pueden estar a la vez en el filtro $\mathcal{G}$, pues si estuvieran, su intersección, es decir, el vacío pertenecería a $\mathcal{G}$. Por tanto, A debe ser precompacto. csqd.

<u>OBSERVACIÓN:</u> Observemos la analogía que existe entre el teorema anterior y el teorema 5.9. Se puede expresar esta analogía diciendo que los filtros convergentes son a los conjuntos compactos lo que los filtros de Cauchy son a los precompactos. Del mismo modo que a los filtros de Cauchy les falta la completitud para ser convergentes, se puede decir

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

6.7. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y $A \subset E$. Entonces A es compacto si, y solo si, es precompacto y completo.

Demostr.: $\Rightarrow$ Ya sabemos que si A es compacto también es precompacto. Además A es completo, pues si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy tal que $A \in \mathcal{F}$, siendo A compacto, admite un refinamiento que converge a un punto de A. Por tanto, dicho punto es adherente al refinamiento de $\mathcal{F}$ y, en consecuencia, también es adherente a $\mathcal{F}$. Puesto que $\mathcal{F}$ es de Cauchy, $\mathcal{F}$ será convergente (Th. 6.3).

$\Leftarrow$ Supongamos que A es precompacto y completo. Para ver que A es compacto probaremos que todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $A \in \mathcal{U}$ converge a un punto de A.

Siendo A precompacto, $\mathcal{U}$ es de Cauchy (Th. 6.6).

Puesto que A es completo, $\mathcal{U}$ converge a un punto de A. c.s.q.d.

6.8. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo completo. Entonces la envolvente convexa cerrada y la envolvente absolutamente convexa cerrada de un conjunto compacto son conjuntos compactos.

Demostr.: Sea A un compacto de E, y B su envolvente absolutamente convexa cerrada. Siendo A compacto, A es precompacto, y, por tanto, B es precompacto (COROLARIO 3.8).

Además, B es completo, pues B es cerrado y E es completo.

Por tanto, B es compacto.

Análogamente la envolvente convexa cerrada de A es compacto. c.s.q.d.

6.9. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo metrizable. Entonces E es completo si, y solo si, toda sucesión de Cauchy en E es convergente.

Demostr.: $\Rightarrow$ Es trivial comprobar que el filtro elemental asociado a una sucesión de Cauchy es de Cauchy. Puesto que E es completo, dicho filtro será convergente y, por tanto, la sucesión es convergente.

$\Leftarrow$ Probaremos aún algo más de lo que se dice en el enunciado.

Veamos que si E es metrizable y $A \subset E$ es tal que toda sucesión de Cauchy en A es convergente en A, entonces A es completo.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en E tal que $A \in \mathcal{F}$.

Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$U_n = \{x \in E \,/\, d(x,0) \leq \frac{1}{2n}\}$$

$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de entornos de cero en E.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Puesto que $\mathcal{F}$ es de Cauchy, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{F}$ tal que
$$A_n - A_n \subset U_n$$
Dado que $A \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $A_n \cap A \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Podemos suponer que la sucesión de conjuntos $\{A_n\}_n$ es decreciente (pues de no serlo tomaríamos $A'_1 = A_1$, $A'_2 = A_1 \cap A_2$, ..., $A'_n = A'_{n-1} \cap A_n$, ...)
Sea $a_n \in A_n \cap A$. La sucesión $\{a_n\}_n$ es de Cauchy, pues dados $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$, $a_p, a_q \in A_p$ y, por tanto, $a_p - a_q \in A_p - A_p \subset U_p$ y, por tanto, $d(a_p, a_q) \leq \frac{1}{2p}$.
Luego $d(a_p, a_q) \xrightarrow[q > p]{p \to \infty} 0$
Por hipótesis, existe $a \in A$ tal que $\{a_n\}_n \longrightarrow a$.
Probemos que $\mathcal{F} \to a$.
Se trata de probar que para todo entorno de cero U, $a + U \in \mathcal{F}$.
Dado el entorno de cero U, existe $n(\text{par}) \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n/2} \subset U$.
Dado $\varepsilon = \frac{1}{2n}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $p \geq n_0$, entonces $d(a_p, a) < \varepsilon$.
Supongamos que $n_0 \geq n$.
Probemos que si $p \geq n_0$, $A_p \subset a + U$, con lo cual $a + U \in \mathcal{F}$.
En efecto, sea $y \in A_p$. Entonces
$$d(y-a, 0) = d(y, a) \leq d(y, a_p) + d(a_p, a)$$
Puesto que $y - a_p \in A_p - A_p \subset U_p$ se verifica que $d(y, a_p) < \frac{1}{2p} \leq \frac{1}{2n}$ pues $n \leq n_0 \leq p$. Para $p \geq n_0$ se verifica además que $d(a_p, a) < 1/2n$
Luego $d(y, a) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$
Por tanto, $y - a \in U_{\frac{n}{2}} \subset U$ y, en consecuencia, $y \in a + U$.
Luego $A_p \subset a + U$, y por tanto, $a + U \in \mathcal{F}$. c.q.d.

<u>OBSERVACION</u>: Acabamos de ver como en espacios metrizables, la completitud secuencial (por sucesiones) equivale a la completitud por filtros. Sabemos que el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) es completo. Veremos un ejemplo importante de espacio completo (Th. 6.12). Antes probemos el siguiente

<u>6.10. LEMA</u>: Sea (E, E') un par dual. Consideremos en E una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos débilmente acotados satisfaciendo las condiciones B.1)–B.4) y consideremos en E' la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. Entonces un filtro $\mathcal{F}'$ en E' converge a $x' \in E'$ si, y solo si, la base de filtro $\langle x, \mathcal{F}' \rangle$ en $\mathbb{K}$ converge a $\langle x, x' \rangle$ uniformemente en los puntos $x \in A$, para cada $A \in \mathcal{A}$. (*)

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor José Mª García Lafuente

(*) De aquí que la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia se llame también topología de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{A}$. Que $\langle x, \mathcal{F}' \rangle$ converja a $\langle x, x' \rangle$

Demostr.: Efectivamente $\langle x, \mathcal{F}'\rangle$ es una base de filtro en $\mathbb{K}$, pues para cada $x \in E$, $\langle x, \cdot\rangle$ es una aplicación (por tanto, transforma filtros de E' en bases de filtro de $\mathbb{K}$).

Que para cada $A \in \mathcal{A}$, $\langle x, \mathcal{F}'\rangle$ converja a $\langle x, x'\rangle$ uniformemente en los puntos $x \in A$ significa que dado $A \in \mathcal{A}$ y el entorno $U = \{\lambda \in \mathbb{K} / |\lambda - \langle x, x'\rangle| \leq \varepsilon\}$ de $\langle x, x'\rangle$ en $\mathbb{K}$ existe un elemento $\langle x, A'\rangle \in \langle x, \mathcal{F}'\rangle$ tal que $\langle x, A'\rangle \subset U$, $\forall x \in A$.

Por otra parte $\mathcal{F}' \longrightarrow x' \in E'$ significa que para todo entorno de x' en E' (que es de la forma $x' + A^\circ$, $A \in \mathcal{A}$), exista $F' \in \mathcal{F}'$ tal que $F' \subset x' + A^\circ$. Entonces

$\Longrightarrow$] Si $\langle x, \mathcal{F}'\rangle$ converge a $\langle x, x'\rangle$ uniformemente en $x \in A$ ($A \in \mathcal{A}$) existe $A' \in \mathcal{F}'$ tal que $\langle x, A'\rangle \subset \{\lambda \in \mathbb{K} / |\lambda - \langle x, x'\rangle| \leq 1\}$, $\forall x \in A$, por tanto, $|\langle x, x''\rangle - \langle x, x'\rangle| \leq 1$, $\forall x'' \in A'$, es decir $|\langle x, x'' - x'\rangle| \leq 1$, $\forall x'' \in A'$, $\forall x \in A$, es decir, $x'' - x' \in A^\circ$, $\forall x'' \in A'$ y, por tanto, $A' \subset x' + A^\circ$. Luego $\mathcal{F}' \longrightarrow x'$.

$\Longleftarrow$] Sea $A \in \mathcal{A}$ y $U = \{\lambda \in \mathbb{K} / |\lambda - \langle x, x'\rangle| \leq \varepsilon\}$. Queremos probar que existe $A' \in \mathcal{F}'$ tal que $\langle x, A'\rangle \subset U$, $\forall x \in A$.
Por hipótesis $\mathcal{F}' \longrightarrow x'$. Entonces, dado el entorno $x' + (\varepsilon^{-1}A)^\circ$ (*) existe $A' \in \mathcal{F}'$ tal que $A' \subset x' + (\varepsilon^{-1}A)^\circ$, lo cual significa que $x'' - x' \in (\varepsilon^{-1}A)^\circ$, $\forall x'' \in A'$, es decir que $|\langle \varepsilon^{-1}x, x'' - x'\rangle| \leq 1$, $\forall x'' \in A'$, $\forall x \in A$ o bien que $|\langle x, x''\rangle - \langle x, x'\rangle| \leq \varepsilon$, $\forall x'' \in A'$, $\forall x \in A$, es decir, que $\langle x, A'\rangle \subset U$, $\forall x \in A$. csqd.

6.11. COROLARIO: Sea (E, E') un par dual. Entonces un filtro $\mathcal{F}'$ en E' converge débilmente a un punto $x' \in E'$ si, y solo si, $\langle x, \mathcal{F}'\rangle$ converge en $\mathbb{K}$ a $\langle x, x'\rangle$, $\forall x \in E$.

Demostr.: La demostración es consecuencia inmediata del lema anterior sin más que observar que la topología débil $\sigma(E', E)$ en E' es la topología de la $\mathcal{P}_F(E)$-convergencia, donde $\mathcal{P}_F(E)$ es el conjunto de las partes finitas de E. ■

6.12. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial y E^* su dual algebraico. Entonces, E^*, provisto con la topología débil $\sigma(E^*, E)$ es completo.

Demostr.: Sea $\mathcal{F}^*$ un filtro de Cauchy en E^*_σ. Queremos hallar $x^* \in E^*$ tal que $\mathcal{F}^* \longrightarrow x^*$.

Para cada $x \in E$, $\langle x, \mathcal{F}^*\rangle$ es base de filtro en $\mathbb{K}$. Veamos que

(*) $x' + (\varepsilon^{-1}A)^\circ$ es entorno de x' pues si $A \in \mathcal{A}$, $\varepsilon^{-1}A \in \mathcal{A}$, pues $\mathcal{A}$ satisface B.2).

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

es una base de filtro de Cauchy, es decir, que para todo entorno U de una base de 0-entornos en $\mathbb{K}$ existe un elemento de la base de filtro $\langle x, \mathcal{F}^* \rangle$ que es pequeño de orden U: Dado $U = \{\lambda \in \mathbb{K} / |\lambda| \le \varepsilon\}$ consideremos el entorno débil de cero en E^*, $V = \{y \in E^* / |\langle x, y\rangle| \le \varepsilon\}$.
Existe entonces $A^* \in \mathcal{F}^*$ tal que $A^* - A^* \subset V$.

Se verifica que $\langle x, A^*\rangle \in \langle x, \mathcal{F}^*\rangle$ y $\langle x, A^*\rangle - \langle x, A^*\rangle \subset U$, pues $\forall a, a' \in A^*$, $|\langle x, a\rangle - \langle x, a'\rangle| = |\langle x, a-a'\rangle| \le \varepsilon$, pues $a - a' \in V$.
Por tanto, $\langle x, \mathcal{F}^*\rangle$ es una base de filtro de Cauchy en $\mathbb{K}$.
Si denotamos por $\mathcal{F}_x^*$ el filtro generado por $\langle x, \mathcal{F}^*\rangle$ se verifica que $\mathcal{F}_x^*$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, puesto que $\mathbb{K}$ es completo, existe $f(x) \in \mathbb{K}$ tal que $\mathcal{F}_x^* \longrightarrow f(x) \in \mathbb{K}$.
Consideremos la aplicación $f : x \in E \longmapsto f(x) \in \mathbb{K}$.
Probemos que f es una forma lineal, es decir, que $f \in E^*$.

- $\forall x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$: Dado un entorno U de cero en $\mathbb{K}$ y puesto que $\mathcal{F}_z^* \longrightarrow f(z)$, $\forall z \in E$, existen, dados $x, y \in E$, $A_x^* \in \mathcal{F}_x^*$ y $A_y^* \in \mathcal{F}_y^*$ tales que $A_x^* \subset f(x) + \frac{1}{2}U$ y $A_y^* \subset f(y) + \frac{1}{2}U$.
Puesto que $\langle x, \mathcal{F}^*\rangle$ e $\langle y, \mathcal{F}^*\rangle$ son bases de filtro de $\mathcal{F}_x^*$ y $\mathcal{F}_y^*$ existen $A^*, B^* \in \mathcal{F}^*$ tales que $\langle x, A^*\rangle \subset A_x^* \subset f(x) + \frac{1}{2}U$ y $\langle y, B^*\rangle \subset A_y^* \subset f(y) + \frac{1}{2}U$.
Sea $C^* = A^* \cap B^* \in \mathcal{F}^*$. Entonces $\langle x, C^*\rangle \subset f(x) + \frac{1}{2}U$ y $\langle y, C^*\rangle \subset f(y) + \frac{1}{2}U$. Por tanto, supuesto que U es absolutamente convexo (basta hacerlo para estos entornos, pues $\mathbb{K}$ es localmente convexo), se verifica que
$$\langle x+y, C^*\rangle \subset f(x) + f(y) + U \quad (*)$$
Se deduce de aquí que el filtro generado por $\langle x+y, \mathcal{F}^*\rangle$, converge a $f(x)+f(y)$, es decir, $\mathcal{F}_{x+y}^* \longrightarrow f(x) + f(y)$.
Pero por definición $\mathcal{F}_{x+y}^* \longrightarrow f(x+y)$.
Siendo $\mathbb{K}$ separado, cada filtro en $\mathbb{K}$ converge, a lo sumo, a un punto. Por tanto, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
- Es trivial comprobar que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Por tanto, $f \in E^*$. Sea $x^* = f$. Hemos visto entonces que existe $x^* \in E^*$ tal que la base de filtro $\langle x, \mathcal{F}^*\rangle$ en $\mathbb{K}$ converge a $\langle x, x^*\rangle$, $\forall x \in E$.
Entonces, el filtro $\mathcal{F}^*$ converge a x^* (COROLARIO 6.11).
En definitiva $(E^*, \sigma(E^*, E))$ es completo. c.s.q.d.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

(*) Observar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal y que, por tanto, $\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle = \langle x+y, z\rangle$.

OBSERVACION: En general no es cierto que, si E es un espacio localmente convexo y E' su dual topológico, que E' dotado con la topología débil $\sigma(E',E)$ sea completo.

DEFINICIONES: * Un espacio localmente convexo metrizable y completo se llamará un ESPACIO DE FRÉCHET.
* Un espacio localmente convexo normable y completo se llamará un ESPACIO DE BANACH.

7. TEOREMA DE McKEY-ARENS. TOPOLOGIA DE McKEY.

Antes de probar el teorema de Mackey-Arens (resultado fundamental en la teoría de la dualidad) veamos una serie de resultados previos importantes.

7.1. TEOREMA: (de Alaoglu-Bourbaki).

Sea E un espacio localmente convexo y U un entorno de cero en E. Entonces, la polar de U respecto de la dualidad topológica (E,E') es un disco $\sigma(E',E)$-compacto.

Demostr.: Sabemos que U° es un conjunto absolutamente convexo (disco) $\sigma(E',E)$-cerrado (PROPOSICION 5.1, TEMA 3º).
Veamos que también es $\sigma(E',E)$-compacto.
Consideremos las dualidades algebraica (E,E^*) y topológica (E,E').
Denotaremos por $U^{\bullet}$ la polar de U respecto de (E,E^*) y por U° la polar de U respecto de (E,E').
Trivialmente se verifica que $U^{\circ}=U^{\bullet}\cap E'$.
Consideremos en E^* la topología débil $\sigma(E^*,E)$, y lo denotaremos por E^*_σ. El TEOREMA 6.12 asegura que E^*_σ es completo.
La polar $U^{\bullet}$ verifica lo siguiente:
1) Es un conjunto absolutamente convexo en E^*.
2) Es $\sigma(E^*,E)$-cerrado.
3) Es $\sigma(E^*,E)$-acotado, pues $U^{\bullet\bullet}$ es entorno de cero (contiene a U) y, por tanto, absorbente, lo cual equivale a que $U^{\bullet}$ es débilmente acotado (TEOREMA 1.5).
4) Es $\sigma(E^*,E)$-precompacto (TEOREMA 3.5)
Puesto que $U^{\bullet}$ es un conjunto cerrado en un espacio completo, E^*_σ, se verifica que $U^{\bullet}$ es $\sigma(E^*,E)$-completo. Siendo además $\sigma(E^*,E)$-precompacto se verifica que $U^{\bullet}$ es $\sigma(E^*,E)$-compacto.
Queremos probar que U° es $\sigma(E',E)$-compacto.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas U
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Si probamos que $U^{\bullet} \subset E'$ se verificará que $U^{\bullet} = U^{\circ}$ (pues $U^{\circ} = U^{\bullet} \cap E'$) y portanto U° será $\sigma(E',E)$-compacto, pues $U^{\bullet}$ es $\sigma(E^*,E)$-compacto y $\sigma(E^*,E)$ induce en E' la topología $\sigma(E',E)$ (pues están generadas por las mismas seminormas).

Veamos entonces que $U^{\bullet} \subset E'$. Dado $x' \in U^{\bullet}$ se verifica que $|\langle x, x' \rangle| \leq 1$, $\forall x \in U$, es decir, x' es una forma lineal acotada en el entorno de cero U, y portanto, x' es continua (TEOREMA 1.8., TEMA 3º), es decir, $x' \in E'$. csqd.

DEFINICION: (Conjunto relativamente compacto)

Un conjunto en un espacio topológico se dice que es relativamente compacto si está contenido en un conjunto compacto.

Si el espacio es separado, entonces un conjunto es relativamente compacto si, y solo si, su adherencia es un conjunto compacto.

Dos corolarios del teorema anterior son los siguientes:

7.2. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Si A es un conjunto equicontinuo de E' entonces es relativamente $\sigma(E',E)$-compacto.

Demostr.: Siendo A equicontinuo, existe un entorno de cero U en E tal que $A \subset U^{\circ}$ (TEOREMA 5.2, TEMA 3º).

Por el teorema anterior U° es débilmente compacto y, portanto, A es relativamente débilmente compacto. csqd.

7.3. COROLARIO: Sea E un espacio normado. La bola unidad cerrada $\overline{B}(0,1)$ de E' es débilmente compacta.

Demostr.: La bola unidad en E' es

$$\overline{B}(0,1) = \{x' \in E' / \|x'\| \leq 1\}$$

Por definición de la norma en el dual topológico E' se verifica que

$$\overline{B}(0,1) = \{x' \in E' / \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, x' \rangle| \leq 1\}.$$

Es trivial comprobar que $\overline{B}(0,1)$ es la polar de la bola unidad cerrada U de E respecto de la dualidad (E,E')

Por tanto, $\overline{B}(0,1)$ es débilmente compacta. csqd.

OBSERVACION: No siempre se verifica que la bola unidad de E sea $\sigma(E,E')$-compacta.

Probemos entonces el teorema de MacKey-Arens.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

7.4. TEOREMA: (de Mackey-Arens)

Sea (E,E') un par dual. Sea $\mathcal{T}$ una topología localmente convexa en E. Denotemos por $E_{\mathcal{T}}$ el espacio vectorial E dotado de la topología $\mathcal{T}$. Entonces, es condición necesaria y suficiente para que el dual de $E_{\mathcal{T}}$ sea E' que la topología $\mathcal{T}$ sea la topología de la convergencia uniforme sobre una familia de discos $\sigma(E',E)$-compactos de E'.

Demostr.: $\Leftarrow$] Ya está probado en el TEOREMA 4.8.

$\Rightarrow$] Supongamos que $(E_{\mathcal{T}})' = E'$.

En TEOREMA 2.5. se prueba que $\mathcal{T}$ es la topología de la $\mathcal{E}$-convergencia donde $\mathcal{E}$ es la familia de los conjuntos equicontinuos de $(E_{\mathcal{T}})' = E'$. Entonces U es entorno de cero por $\mathcal{T}$ si, y solo si, U° es equicontinuo (Th. 5.2, TEMA 3º) lo cual equivale a que $U^{\circ\circ}$ es entorno de cero por la topología de la $\mathcal{E}$-convergencia. Por tanto, $\{U^{\circ\circ} / U \text{ entorno de cero}\}$ es base de 0-entornos en $E_{\mathcal{T}}$.

Por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, para cada entorno de cero U en $E_{\mathcal{T}}$, U° es un disco $\sigma((E_{\mathcal{T}})', E_{\mathcal{T}})$-compacto, es decir, es un disco $\sigma(E',E)$-compacto. Queda visto, pues, que $\mathcal{T}$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de una familia de discos $\sigma(E',E)$-compactos de E', pues $\{U^{\circ\circ}\}_{U \text{ entorno por } \mathcal{T}}$ es base de 0-entornos en $E_{\mathcal{T}}$ y $U^{\circ\circ}$ es la polar de U°, que es un disco $\sigma(E',E)$-compacto. csqd.

DEFINICION: (Topología de Mackey)

Sea (E,E') un par dual. Se llama topología de Mackey en E, y la denotaremos por $\mathcal{T}(E,E')$, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia cuando $\mathcal{A}$ es la familia de todos los discos $\sigma(E',E)$-compactos de E'.

7.5. COROLARIO: Sea (E,E') un par dual. Entonces la topología de Mackey en E, $\mathcal{T}(E,E')$, es una topología compatible con la dualidad.

La demostración es trivial consecuencia del teorema de Mackey-Arens.

7.6. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual. Una topología localmente convexa ξ en E es compatible con la dualidad si, y solo si, está contenida entre la topología débil y la topología de Mackey, es decir, si y solo si

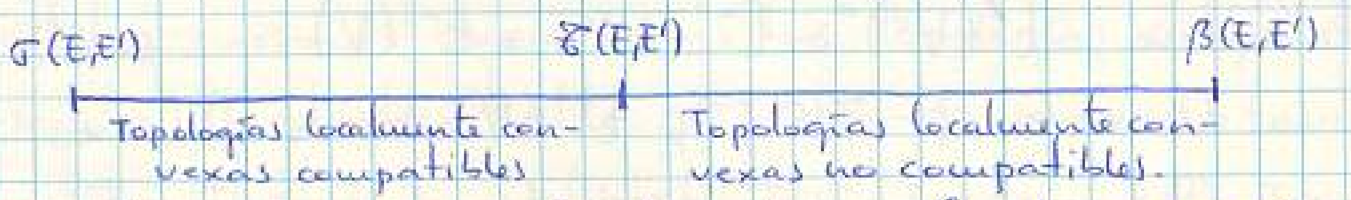
$$\sigma(E,E') \preccurlyeq \xi \preccurlyeq \mathcal{T}(E,E').$$

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

Demostr.: ξ es compatible con la dualidad sii $(E_\xi)' = E'$ lo cual equivale a que ξ sea la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia donde $\mathcal{A}$ es una cierta familia de discos $\sigma(E',E)$-compactos en E'. Por tanto, $\xi \leq \tau(E,E')$. Por ser $\sigma(E,E')$ la topología localmente convexa compatible menos fina se verifica que $\sigma(E,E') \leq \xi$.

Recíprocamente, si $\sigma(E,E') \leq \xi \leq \tau(E,E')$, para una cierta topología ξ en E, se verifica que es localmente convexa, por ser más fina que $\sigma(E,E')$ y que es compatible, por ser menos fina que $\tau(E,E')$, ya que todo 0-entorno por ξ es entorno de cero por $\tau(E,E')$ y, por tanto, es la polar de un disco $\sigma(E',E)$-compacto de E', es decir, ξ es la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia donde $\mathcal{A}$ es una familia de discos $\sigma(E',E)$-compactos, y esto significa ya que ξ es compatible. c.q.d.

<u>OBSERVACION</u>: Tenemos pues toda una gama de topologías localmente convexas compatibles con la dualidad (E,E'), de las cuales $\sigma(E,E')$ es la menos fina y $\tau(E,E')$ es la más fina y además, toda topología en E más fina que $\sigma(E,E')$ y menos fina que $\tau(E,E')$ es localmente convexa y compatible con la dualidad (E,E'). Pueden existir topologías localmente convexas en E no compatibles con la dualidad que serán estrictamente más finas que $\tau(E,E')$ y menos finas que la topología fuerte $\beta(E,E')$, que es la topología polar más fina que se puede definir en E (y sabemos que toda topología localmente convexa en E es una topología polar).



Para algunos espacios la topología fuerte $\beta(E,E')$ es compatible y, por tanto, $\beta(E,E') = \tau(E,E')$, como sucede con los espacios tonelados que estudiaremos en el capítulo siguiente. En estos espacios toda topología localmente convexa es compatible.

Recordemos (TEOREMA 7.4, TEMA 3º) que si E y F son espacios localmente convexos y $t: E \to F$ es una aplicación lineal continua, entonces t es débilmente continua (donde débilmente continua significaba que en E (F) tenemos la topología débil $\sigma(E^*,E')$ (y en F, $\sigma(F^*,F')$) inducidas por las dualidades topológicas (E,E') y (F,F'). Decíamos también que el recíproco no es siempre cierto. Pero

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente

7.7. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual y F es un espacio localmente convexo. Dotemos a E de la topología de Mackey $\tau(E,E')$. Entonces si $t: E \to F$ es una aplicación lineal débilmente continua, también es continua.

Demostr.: Sea V un entorno de cero en F, que podemos tomar absolutamente convexo y cerrado. Se trata de probar que $t^{-1}(V)$ en entorno de cero en $E-\tau(E,E')$ (espacio vectorial E dotado con la topología de Mackey).
Sea F' el dual topológico de F. Por el teorema de Alaoglu-Bourbaki V° es $\sigma(F',F)$-compacto. Puesto que $t: E \to F$ es débilmente continua su transpuesta $t': F' \to E'$ es débilmente continua (COROLARIO 7.3, TEMA 3º) y, por tanto, $t'(V^\circ)$ es $\sigma(E',E)$-compacto.
Puesto que $t'(V^\circ)$ es absolutamente convexo, pues V° lo es y t' es lineal, $t'(V^\circ)^\circ$ es entorno de cero en $E-\tau(E,E')$.
Pero $t'(V^\circ)^\circ = t^{-1}(V^{\circ\circ})$, pues

$$t'(V^\circ)^\circ = \{x \in E \,/\, |\langle x, x'\rangle| \leq 1, \forall x' \in t'(V^\circ)\} =$$
$$= \{x \in E \,/\, |\langle x, t'(y')\rangle| \leq 1, \forall y' \in V^\circ\} =$$
$$= \{x \in E \,/\, |\langle t(x), y'\rangle| \leq 1, \forall y' \in V^\circ\} =$$
$$= \{x \in E \,/\, t(x) \in V^{\circ\circ}\} = t^{-1}(V^{\circ\circ})$$

Puesto que V es convexo y cerrado es convexo y débilmente cerrado (los convexos y cerrados son los mismos para todas las topologías compatibles con la dualidad - COROLARIO 4.7, Tema 3º). Siendo V absolutamente convexo y débilmente cerrado se verifica que $V = V^{\circ\circ}$ (TEOREMA BIPOLARES: 5.4, TEMA 3º).

En definitiva, $t'(V^\circ)^\circ = t^{-1}(V^{\circ\circ}) = t^{-1}(V)$ y, puesto que $t'(V^\circ)^\circ$ era entorno de cero en $E-\tau(E,E')$, $t^{-1}(V)$ también lo es. c.s.q.d.

<u>OBSERVACION</u>: Observar que cuando se dice que $t: E \to F$ es débilmente continua se quiere decir que t es continua supuesto que en E tenemos la topología débil $\sigma(E,E')$ y en F la topología débil $\sigma(F,F')$ inducida por la dualidad topológica (F,F'). Cuando decimos que $t: E \to F$ es continua, simplemente, suponemos que en E tenemos la topología de Mackey y en F la topología localmente convexa original.

Apuntes de la asignatura
ANÁLISIS IV
de Agustín García Nogales
Licenciatura en Matemáticas UEx
Curso 1982/1983
Profesor: José Mª García Lafuente