TEMA 7º: ESPACIOS REFLEXIVOS

1. BIDUAL

Sea (E,E') un par dual. Dotemos a E' de la topología polar más fina, es decir, de la topología fuerte $\beta(E',E)$. Lo denotaremos por E'_β.

Sabemos que el dual topológico $(E'_\beta)'$ de E'_β verifica que

$$E \subset (E'_\beta)' \subset (E'_\beta)^*$$

pues para cada $x \in E$ la aplicación $x : x' \in E' \longmapsto \langle x, x' \rangle \in \mathbb{K}$ es continua cuando sobre E' tenemos la topología débil $\sigma(E',E)$, y, por tanto, es continua cuando E' está provisto de la topología fuerte $\beta(E',E)$.

DEFINICION: (BIDUAL)

Sea (E,E') un par dual. Al dual topológico de E'_β se le denomina bidual de E. Lo denotaremos por E''.

Es decir, $E'' = (E'_\beta)'$.

Luego $E \subset E'' \subset (E')^*$

1.1. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual y $\mathcal{A}$ la familia de los conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados de E. Para cada $A \in \mathcal{A}$ denotemos por A° la polar de A respecto de (E,E') y por $A^{\circ\bullet}$ la polar de A° respecto de (E', E'^*). Entonces, el bidual de E es

$$E'' = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A^{\circ\bullet}$$

Demostr.: Ver teorema 2.8. (TEMA 4º). ■

OBSERVACION: A los conjuntos acotados en E'_β los llamaremos fuertemente acotados o $\beta(E',E)$-acotados. Consideremos el par dual $(E'_\beta, (E'_\beta)')$, que denotaremos por (E', E''). La topología $\beta(E',E)$ es compatible con la dualidad (E',E''). También la topología $\sigma(E',E'')$ es compatible. Por tanto, los conjuntos fuertemente acotados y los $\sigma(E',E'')$-acotados son los mismos (teorema de MacKey). Aun más

1.2. TEOREMA: Todo conjunto $\beta(E',E)$-acotado es $\sigma(E',E)$-acotado.

Demostr.: Si $A' \subset E'$ es $\beta(E',E)$-acotado, es $\sigma(E',E'')$-acotado. Puesto que $\sigma(E',E) \leq \sigma(E',E'')$, pues $E \subset E''$, se verifica que A' es $\sigma(E',E)$-acotado.

1.3. TEOREMA: Sea (E, E') un par dual y ξ una topología compatible sobre E. Se verifica:

a) Todo conjunto equicontinuo de E' es fuertemente acotado.

b) Todo disco débilmente compacto de E' es fuertemente acotado.

Demostr.: a) Sea A' un conjunto equicontinuo de E'.
Existe un entorno de cero U en E_ξ tal que $A' \subset U^\circ$.
Queremos probar que todo entorno fuerte de cero en E' absorbe a A'.
Una base de 0-entornos fuertes de E' está formada por las polares de los conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados de E.
Puesto que ξ es compatible, si B es débilmente acotado en E, es ξ-acotado en E (Teorema de Mackey) y, por tanto, B es absorbido por U.
Luego B° absorbe a U° y, en consecuencia, a A'.
Luego A' es fuertemente acotado.

b) Sea B un disco débilmente compacto de E'.
Consideremos en E la topología de Mackey $\tau(E,E')$.
Probemos que B es equicontinuo cuando E va provisto de dicha topología.
Los entornos de cero para la topología $\tau(E,E')$ son las polares de los discos débilmente compactos de E'. Por tanto, B° es un entorno de cero en $E-\tau(E,E')$, y en consecuencia, $B^{\circ\circ}$ es equicontinuo en E'.
Puesto que $B \subset B^{\circ\circ}$ se verifica que B también es equicontinuo.
Luego, aplicando a), B es fuertemente acotado, csqd.

En el caso de que E sea un espacio localmente convexo y E' su dual topológico se verifica que

$$\begin{array}{l} (A' \text{ equicontinuo en } E') \Rightarrow \\ \quad \Uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (A' \text{ fuertemente acotado}) \Rightarrow (A' \text{ débilmente acotado}). \\ (A' \text{ disco } \sigma(E',E)\text{-compacto}) \Rightarrow \end{array}$$

En el caso de que E sea tonelado se verifica que
$$(A' \text{ débilmente acotado}) \Rightarrow (A' \text{ equicontinuo}).$$
Luego en el dual de un espacio tonelado los conjuntos equicontinuos, los fuertemente acotados y los débilmente acotados son los mismos.

Según acabamos de ver los conjuntos equicontinuos de E' constituyen una familia de conjuntos débilmente acotados (aun más, fuertemente acotados). Esta observación da pie a la siguiente

DEFINICION: (Topología equicontinua en E'')

Sea (E,E') un par dual y ξ una topología compatible en E. Consideremos la paridad (E'_β, E''). Se llama topología equicontinua en E'' y se denota por $\xi^{\circ\circ}$, la topología polar en E'' generada por todos los equicontinuos en E'_β.

Si $\mathcal{U}$ es una base de 0-entornos en E, entonces $\mathcal{U}^\circ = \{U^\circ\}_{U\in\mathcal{U}}$ es base de equicontinuos de E', donde U° es la polar de U respecto de (E,E') y, por tanto, $\mathcal{U}^{\circ\bullet} = \{U^{\circ\bullet}\}_{U\in\mathcal{U}}$ es base de 0-entornos de la topología equicontinua.

OBSERVACION: Es trivial comprobar que para cada $U\in\mathcal{U}$ se verifica que $U^{\circ\bullet}\cap E = U^{\circ\circ}$. Por tanto, si E es un espacio localmente convexo y ξ es su topología original, se verifica que la topología equicontinua en E'' induce en E la topología ξ, pues si $\mathcal{U}$ es base de 0-entornos por ξ absolutamente convexos y cerrados, se verifica que $U^{\circ\circ} = U$ y, por tanto, $U^{\circ\bullet}\cap E = U$, $\forall U\in\mathcal{U}$. Se suele denotar esto por $\xi = \xi^{\circ\circ}\cap E$.

La inmersión canónica de E en E'' (inclusión) es la aplicación

$$\varphi : x\in E \longmapsto \hat{x}\in E''$$

siendo $\hat{x} : x'\in E'_\beta \longmapsto \hat{x}(x') = x'(x)\in \mathbb{K}$.

La aplicación φ está bien definida; probemoslo:

Sabemos que para cada $x\in E$, $\hat{x}$ es una forma lineal débilmente continua de E' en $\mathbb{K}$ ($\hat{x}$ no es más que $\langle x,\cdot\rangle$); por tanto, $\hat{x}$ es una forma lineal continua cuando E' va provisto de la topología fuerte, por ser $\beta(E',E)$ más fina que $\sigma(E',E)$; luego, efectivamente $\hat{x}\in (E'_\beta)' = E''$.

Es trivial comprobar que φ es lineal

También es inyectiva pues: $\hat{x} = \hat{y} \Rightarrow \hat{x}(x') = \hat{y}(x')$, $\forall x'\in E' \Rightarrow$
$\Rightarrow x'(x) = x'(y)$, $\forall x'\in E' \Rightarrow x'(x-y) = 0$, $\forall x'\in E' \Rightarrow x-y=0$. (Th. H-B).

De esto y de que $\xi = \xi^{\circ\circ}\cap E$ se concluye que la inmersión canónica de E en E'' es un homomorfismo topológico, si en E'' tenemos la topología equicontinua – Tdlcar.

topológico y E'' su bidual. Entonces, si E'' va provisto de la topología equicontinua se verifica que la inmersión canónica de E en E'' es un homomorfismo topológico. (*)

Se verifica tambien el siguiente

1.5. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo, E' su dual topológico y E'' su bidual. Denotemos por E''_β el bidual E'' dotado de la topología fuerte $\beta(E'', E')$ (entendiéndose siempre que E' va provisto de la topología $\beta(E', E)$ con la que se define E'') y denotemos por $E''_{\mathcal{U}}$ el espacio E'' dotado con la topología equicontinua. Entonces, la identidad

$$I : E''_\beta \longrightarrow E''_{\mathcal{U}}$$

es continua.

Demostr.: Una base de entornos de cero en $E''_{\mathcal{U}}$ está formada por las polares de los conjuntos equicontinuos de E'.

Una base de entornos de cero en E''_β está formada por las polares de los conjuntos acotados en E'_β (fuertemente acotados).

Sea entonces U entorno de cero en $E''_{\mathcal{U}}$ que basta tomar de la forma $U = A^\circ$ donde $A \subset E'$ es equicontinuo. Siendo A equicontinuo es fuertemente acotado y, por tanto, U es entorno de cero en E''_β. Luego I es continua. c.s.q.d.

OBSERVACION: En general no es cierto que $I : E''_{\mathcal{U}} \to E''_\beta$ sea continua, pues no siempre los conjuntos fuertemente acotados son equicontinuos. Esta observación da lugar a la siguiente

DEFINICION: (Espacios casi tonelados).

Un espacio localmente convexo E se dice casi tonelado si todo conjunto fuertemente acotado de su dual E' es equicontinuo, o, equivalentemente si la identidad $I : E''_\beta \to E''_{\mathcal{U}}$ es isomórfica, en sentido topológico.

Podemos expresar lo dicho anteriormente en el siguiente esquema

E tonelado $\Leftarrow$

(A' equicontinuo) $\Rightarrow$ (A' fuertemente acotado) $\Rightarrow$ (A' débilmente acotado)

$\Leftarrow$ E casi tonelado

(*) Que $\varphi : E \to E''$ sea un homomorfismo topológico no significa más que $\varphi : E \to \varphi(E)$ sea un isomorfismo topológico.

Una condición suficiente para que todo conjunto débilmente acotado de E' sea fuertemente acotado la da el siguiente

1.6. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo completo. Entonces todo conjunto débilmente acotado de su dual E' es fuertemente acotado.

Demostr.: Consideremos la dualidad topológica (E,E') y sea A' un conjunto débilmente acotado de E'. Por el teorema de caracterización de toneles, A'^{o} es un tonel en E.

Por tanto, A'^{o} absorbe a todo conjunto acotado, convexo y completo de E (PROPOSICION 1.7., TEMA 5º).

Siendo E localmente convexo existe en E una base de acotados convexos y cerrados, que por tanto, serán completos, pues E es completo.

Como A'^{o} absorbe a todos los acotados de esta base, absorbe tambien a todos los acotados del espacio E.

Por tanto, A'^{oo} es absorbido por la polar de cualquier acotado de E, y puesto que $A' \subset A'^{oo}$, se verifica tambien que A' es absorbido por las polares de los acotados de E, es decir, A' es absorbido por todo entorno fuerte de cero en E'. Luego A' es fuertemente acotado. csqd.

2. REFLEXIVIDAD Y SEMIREFLEXIVIDAD.

Consideremos de nuevo la inmersión canónica de E en E''

$$\varphi : x \in E \longmapsto \hat{x} \in E'' \quad \text{donde } \hat{x} : x' \in E'_\beta \longmapsto \hat{x}(x') = x'(x) \in \mathbb{K}.$$

Sabemos que φ es inyectiva en virtud de la propiedad de separación de la paridad (E,E') en E'.

DEFINICION: (Pares duales semireflexivos y reflexivos)

a) Sea (E,E') un par dual. Se dice que (E,E') es semireflexivo si la inmersión canónica φ es biyectiva (es decir, si $E \cong E''$).

b) Se dice que el par dual (E,E') es reflexivo si es semireflexivo y además φ es un isomorfismo topológico supuesto que E'' va provisto de la topología fuerte $\beta(E'',E')$.

En el caso de que E sea un espacio localmente convexo, diremos que E es semireflexivo (resp. reflexivo) si el par dual topológico (E,E') es semireflexivo (resp. reflexivo).

En este caso que E sea reflexivo no significa más que J sea biyectiva y la topología original de E "coincida" con la topología fuerte $\beta(E'',E')$ del bidual.

2.1. TEOREMA: (Caracterización de pares duales semireflexivos)

Sea (E,E') un par dual. Entonces (E,E') es semireflexivo si, y solo si, todo conjunto acotado de E está contenido en un conjunto débilmente compacto de E, o dicho de otra forma, si todo acotado en E es relativamente débilmente compacto.

Demostr.: $\Longrightarrow$ Si (E,E') es semireflexivo se verifica que $E=E''$, es decir, E es el dual topológico de E'_β. Por tanto, la topología fuerte $\beta(E',E)$ es compatible con la dualidad (E,E').

Por el teorema de Mackey-Arens (pg. 57) $\beta(E',E)$ será entonces la topología polar respecto de una determinada familia de discos débilmente compactos de E.

Pero, por definición, $\beta(E',E)$ es la topología polar respecto de la familia de los conjuntos acotados de E.

Entonces, si A es acotado en E, A° es entorno de cero en E'_β y, por tanto, existe un disco B débilmente compacto en E tal que $A^\circ \supset B^\circ$. Luego $A^{\circ\circ} \subset B^{\circ\circ}$.

Pero $B^{\circ\circ}=B$, pues B es un disco débilmente cerrado. Además $A \subset A^{\circ\circ}$. Luego $A \subset B$.

$\Longleftarrow$ Para ver que (E,E') es semireflexivo basta ver que $E=(E'_\beta)'$, es decir, que $\beta(E',E)$ es compatible.

Puesto que todo acotado está contenido en un disco débilmente compacto de E se verifica que para todo entorno de cero en E'_β, que contiene a la polar de un conjunto acotado de E, existe un disco débilmente compacto en E cuya polar está contenida en dicho entorno. Como además dicha polar es $\beta(E',E)$-entorno de cero en E' (*) se deduce que existe en E'_β una base de entornos de cero formada por las polares de una familia de conjuntos débilmente compactos de E. Por tanto, $\beta(E',E)$ es la topología polar respecto de dicha familia de conjuntos débilmente compactos (se puede asegurar también que $\beta(E',E)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre una familia de discos débilmente compactos; basta con consi-

(*) Todo conjunto débilmente compacto es acotado en E.

derar las envolventes absolutamente convexas[(*)] de dichos conjuntos]. (*)
El teorema de Mackey-Arens asegura en estas condiciones que $\beta(E',E)$ es compatible con la dualidad (E,E'), es decir, que (E,E') es semireflexivo. c.s.q.d.

Consecuencia inmediata es el siguiente

2.2. COROLARIO: Un espacio localmente convexo E es semireflexivo si, y solo si, todo conjunto acotado es relativamente débilmente compacto, o lo que es equivalente, que todo disco cerrado y acotado es débilmente compacto.

2.3. TEOREMA: (Caracterización de espacios reflexivos).
Un espacio localmente convexo E es reflexivo si, y solo si, es semireflexivo y casi tonelado.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si E es reflexivo es semireflexivo.
Veamos que es casi tonelado, es decir, que todo conjunto fuertemente acotado de E' es equicontinuo.

Sea A' un conjunto fuertemente acotado de E'. Entonces $A'^{\bullet}$ es un entorno de cero en $E''-\beta(E'',E')$, donde $A'^{\bullet}$ es la polar de A' respecto de la dualidad topológica (E'_β, E''). Siendo φ isomorfismo topológico de E en E'', por ser E reflexivo, $\varphi^{-1}(A'^{\bullet})$ es entorno de cero en E. Pero $\varphi^{-1}(A'^{\bullet}) = A'^{\bullet} \cap E = A'^{0}$, donde A'^{0} es la polar de A' respecto de la dualidad (E,E'). Luego A'^{0} es entorno de cero en E y, por tanto, A'^{00} es equicontinuo en E'. Puesto que $A' \subset A'^{00}$, A' es equicontinuo. Luego E es casi tonelado.
$\Leftarrow$] Si E es semireflexivo $\varphi: E \to E''$ es biyectiva.
Por tanto, $\varphi: E \to E''_{\mathcal{U}}$ es un isomorfismo topológico (PROPOSICION 1.4).
Siendo E casi tonelado la identidad $I: E''_{\mathcal{U}} \to E''_\beta$ es un isomorfismo topológico. Luego $\varphi: E \to E''_\beta$ es un isomorfismo topológico, es decir, E es reflexivo. c.s.q.d.

OBSERVACION: El teorema anterior puede enunciarse en los siguientes términos: "Un espacio localmente convexo E es reflexivo si, y solo si, todo acotado de E es relativamente débilmente compacto y todo conjunto fuertemente acotado de E' es equicontinuo".

Algunos ejemplos concretos de espacios reflexivos vienen dados por los siguientes teoremas.

(*) Dichas envolventes absolutamente convexas y cerradas de compactos son acotadas en E y, por tanto, relativamente débilmente compactas. Siendo cerradas son discos débilmente compactos.

2.4. TEOREMA: Si un espacio localmente convexo es reflexivo, su dual fuerte E'_β también lo es.

Demostr.: Si E es reflexivo, entonces $E = E''$ y la inmersión canónica $\varphi: E \to E''_\beta$ es un isomorfismo topológico.

El dual topológico de E'_β es E'' (bidual de E). Supondremos que E'' va provisto de la topología fuerte $\beta(E'', E')$ y lo denotaremos por E''_β.

Entonces el dual topológico de E''_β, que lo denotaremos por E''', es el bidual de E'_β.

Puesto que $E = E''$ se verifica que $E' = E'''$, es decir, E' es semireflexivo.

Falta probar que el dual fuerte E'_β, cuyo dual es E''_β, es casi tonelado, es decir, que todo conjunto fuertemente acotado en E''_β es equicontinuo.

Sea pues $A \subset E''$ un conjunto fuertemente acotado. Puesto que $E = E''_\beta$ algebraica y topológicamente, se verifica que A es acotado en E y, por tanto, A^o es entorno de cero en E'_β, donde A^o es la polar de A respecto de la dualidad (E, E'). Entonces, A^{oo} es equicontinuo en E'', y por tanto, A es equicontinuo en E'' como subconjunto de A^{oo}. c.s.q.d. (*)

2.5. TEOREMA: Un espacio normado E es reflexivo si, y solo si, su bola unidad (cerrada) es débilmente compacta.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si E es reflexivo, todo disco cerrado y acotado es débilmente compacto, y la bola unidad es un disco cerrado y acotado.

$\Leftarrow$] Puesto que todo acotado de E está contenido en un conjunto homotético de la bola unidad que, por hipótesis, es débilmente compacta, se verifica que todo acotado de E es relativamente débilmente compacto y, por tanto, E es semireflexivo.

Falta probar que también es casi tonelado, es decir, que todo conjunto fuertemente acotado de E' es equicontinuo.

Sabemos que E' es un espacio normado y que la topología de la norma en E' coincide con la topología fuerte $\beta(E', E)$.

—

(*) Obsérvese que las dualidades (E, E') y (E'', E') "coinciden".

Sea entonces A' un conjunto fuertemente acotado de E', es decir, acotado en E'_β. Entonces, A' está contenido en un homotético de la bola unidad de E'. Es trivial comprobar que la bola unidad en E' es un conjunto equicontinuo (es la polar de la bola unidad de E, que es entorno de cero en E). Por tanto, los homotéticos de la bola unidad en E' son conjuntos equicontinuos. Luego A' es equicontinuo. c.s.q.d.

2.6. COROLARIO: El dual topológico de un espacio normado semirreflexivo es un espacio reflexivo.

Demostr.: La bola unidad de E' es la polar de la bola unidad de E, que es entorno de cero en E. Por tanto, por el teorema de Alaoglu-Bourbaki (pg. 56), la bola unidad de E' es un disco débilmente compacto(*). Por el teorema anterior, E' es reflexivo. c.s.q.d.

OBSERVACION: No todo espacio normado es reflexivo.

2.7. TEOREMA: Todo espacio reflexivo es tonelado.

Demostr.: Sea A' un conjunto débilmente acotado en E'. Veamos que es equicontinuo.

Si A' es débilmente acotado, A'° es entorno de cero en E''_β. Puesto que E es reflexivo, $E = E''_\beta$. Luego A'° es entorno de cero en E y, por tanto, $A'^{\circ\circ}$ es equicontinuo en E'. Luego A' también es equicontinuo, pues $A' \subset A'^{\circ\circ}$. c.s.q.d.

(*) La bola unidad de E' es $\sigma(E',E)$-compacta, por el th. de Alaoglu-Bourbaki. Para poder aplicar el th. anterior, dicha bola unidad debe ser $\sigma(E',E'')$-compacta. Siendo E semirreflexivo, $E=E''$ y, por tanto, $\sigma(E',E)=\sigma(E',E'')$. Luego la bola unidad en E' es $\sigma(E',E'')$-compacta.