TEMA 8º: LIMITES INDUCTIVOS. LIMITES PROYECTIVOS.

1. ESPACIOS COCIENTES

A) Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y M un subespacio de E. Es trivial comprobar que la relación $x R y \overset{def}{\Leftrightarrow} x-y \in M$ es de equivalencia. Denotaremos por E/M el conjunto cociente, y por $x+M$ ó $\dot{x}$ la clase de equivalencia que admite a un elemento x de E como representante.

Definimos sobre E/M la operación interna

$$(x+M)+(y+M)=(x+y)+M$$

y la operación externa

$$\lambda(x+M)=\lambda x+M.$$

Se comprueba fácilmente que E/M es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Es evidente que para cada aplicacion lineal t de E en un espacio vectorial F que se anule para los elementos de M existe una única aplicación lineal

$$\hat{t}: E/M \longrightarrow F$$

de forma que $\forall x \in E$, $\hat{t}(x+M)=t(x)$.

Esta definición es buena, puesto que t se anula en M.

Aun más, existe una aplicación bijectiva entre las aplicaciones lineales de E en F que se anulan en M y las aplicaciones lineales de E/M en F.

DEFINICION: (Aplicación canónica)

Sea E un espacio vectorial y M un subespacio de E. Se llama aplicación canónica de E en E/M a

$$K: x\in E \longmapsto x+M \in E/M$$

Se prueba que K es lineal y suprayectiva.

Además se verifica que si $t: E\to F$ es una aplicación lineal que se anula sobre M entonces t se puede descomponer en la forma

$$t=\hat{t}\circ K$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "K"'] & & F \\ & E/M \arrow[ur, "\hat{t}"'] & \end{tikzcd}$$

B) Veamos como podemos dotar a E/M de una topología localmente convexa, si E es un espacio localmente convexo.

1.1. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E, y K la aplicación canónica de E en E/M. Existe entonces una topología localmente convexa en E/M que es la más fina para la cual la aplicación K es continua. Además, si $\mathcal{U}$ es una base de entornos de cero absolutamente convexos en E, entonces

$$K(\mathcal{U}) = \{K(U) / U \in \mathcal{U}\}$$

es una base de entornos de 0 absolutamente convexos en E/M para dicha topología, que llamaremos TOPOLOGIA COCIENTE.

Demostr.: Probemos en primer lugar que $K(\mathcal{U})$ verifica las condiciones que ha de satisfacer una familia para ser base de entornos de cero. En efecto, dados $K(U), K(V) \in K(\mathcal{U})$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$ y, por tanto, $K(W) \subset K(U) \cap K(V)$.
Además los elementos de $K(\mathcal{U})$ son absolutamente convexos pues lo son los de $\mathcal{U}$ y K es lineal, y son absorbentes pues lo son los de $\mathcal{U}$ y K, además de ser lineal, es suprayectiva.

Entonces, por el teorema fundamental de existencia de topologías localmente convexas, existe en E/M una topología localmente convexa para la cual $K(\mathcal{U})$ es base de entornos de cero.

Probemos ahora que K es continua: Dado $K(U) \in K(\mathcal{U})$, entorno de cero en E/M, se verifica que $K^{-1}(K(U))$ es entorno de cero en E, pues $U \subset K^{-1}(K(U))$.

Veamos, por último, que es la topología más fina sobre E/M que hace continua a K: Sea $\mathcal{T}$ otra topología sobre E/M que hace continua a K y V un entorno de cero por $\mathcal{T}$. Entonces $K^{-1}(V)$ es entorno de cero en E. Luego $\exists U \in \mathcal{U} / U \subset K^{-1}(V)$.
Por tanto, $K(U) \subset K(K^{-1}(V))$. Puesto que $K(K^{-1}(V)) = V$, pues K es sobre, queda visto que V es entorno de cero para la topología cociente. c.s.q.d.

Recordemos (TOPOLOGIA I) que un conjunto de E se dice saturado por una relación de equivalencia sobre E si es la unión de una familia de clases de equivalencia ~~de~~ del conjunto cociente.

Se probó allí que los abiertos (resp. cerrados) de E/M se corresponden biunívocamente con los abiertos (resp. cerrados) saturados de E.

C) Sea U un entorno absolutamente convexo de E y p la gauge de U. Veamos que relación existe entre la seminorma p y la gauge q de $K(U)$ en E/M.

Por definición, para cada $X \in E/M$

$$q(X) = \inf\{\lambda \geq 0 / X \in \lambda K(U)\}$$

Puesto que $X \in \lambda K(U) \Leftrightarrow \exists x \in X / x \in \lambda U$, por definición de $K(U)$.

Luego

$$q(X) = \inf_{x \in X} \left(\inf\{\lambda \geq 0 / x \in \lambda U\}\right) = \inf_{x \in X} p(x)$$

A q la llamaremos SEMINORMA COCIENTE de la seminorma p.

Ejemplo: Si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y M un subespacio de E, entonces la aplicación

$$\|\cdot\| : X \in E/M \longmapsto \|X\| = \inf_{x \in X} \|x\| \in \mathbb{R}$$

es una norma en E/M.

D) No siempre es cierto que el espacio cociente de un espacio localmente convexo separado sea separado. Sin embargo

1.2. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo separado y M un subespacio de E. El espacio cociente E/M es separado si, y solo si, M es cerrado.

Demostr.: Sea, como siempre, $K : E \to E/M$ la aplicación canónica.

$\Rightarrow$) Si E/M es separado, el conjunto $\{0\}$ en E/M es cerrado, pues todo punto en un espacio separado es cerrado. Siendo K continua $K^{-1}(0) = M$ es cerrado en E.

$\Leftarrow$) Supongamos que M es cerrado en E, y probemos que E/M es separado, para lo cual basta probar que si $X \in E/M - \{0\}$ existe un entorno de 0 que no contiene a X.

Si $X \in E/M - \{0\}$, necesariamente $X \cap M = \emptyset$.

Sea $x \in X$. Entonces $x \notin M$ y, puesto que M es cerrado existe un entorno de cero U tal que $(x+U) \cap M = \emptyset$.

Por tanto, si suponemos U equilibrado, $x \notin M + U$

Puesto que $K(M) = 0$, se verifica que $K(x) \notin K(U)$.

Pero $K(x) = X$ y $K(U)$ es entorno de cero en E/M.

Luego E/M es separado. c.s.q.d.

Si E y F son espacios localmente convexos y $t : E \to F$ es una aplicación lineal, entonces $Ker(t) = t^{-1}(0)$ es un subespacio de E. Entonces:

1.3. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos y $t: E \to F$ una aplicación lineal. Si factorizamos t en la forma
$$t = \hat{t} \circ K$$
donde $K: x \in E \longmapsto K(x) = x + t^{-1}(0) \in E/t^{-1}(0)$ y $\hat{t}: X \in E/t^{-1}(0) \longmapsto \hat{t}(X) = t(x) \in F$ se verifica que t es continua si, y solo si, $\hat{t}$ es continua.

Demostr.: Supondremos que en $E/t^{-1}(0)$ tenemos la topología cociente. Entonces, la aplicación canónica K es continua.

$\Leftarrow$ | Luego si $\hat{t}$ es continua, t también lo es, como composición de continuas.

$\Rightarrow$ | Supongamos ahora que t es continua y probemos que $\hat{t}$ también lo es. Sea W entorno de cero en F. Entonces $t^{-1}(W)$ es entorno de cero en E. Puesto que $t = \hat{t} \circ K$ se verifica que
$$t^{-1}(W) = K^{-1}(\hat{t}^{-1}(W))$$
Por definición de topología cociente, $K(t^{-1}(W))$ es entorno de cero en $E/t^{-1}(0)$. Pero $K(t^{-1}(W)) = K(K^{-1}(\hat{t}^{-1}(W))) = \hat{t}^{-1}(W)$
Luego $\hat{t}^{-1}(W)$ es entorno de cero en $E/t^{-1}(0)$. c.s.q.d.

1.4. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E. Consideremos el espacio cociente E/M. Entonces el dual de E/M "es" el subespacio M° de E', donde M° es la polar de E' respecto de (E, E').

Demostr.: Si $u \in (E/M)'$, u es una forma lineal continua en E/M. Se puede identificar u con una forma lineal u_0 en E ($u_0 = u \circ K$) que se anula sobre M. Entonces $u_0 \in M^\perp = \{f \in E^* / f(x) = 0, \forall x \in M\}$.
Siendo M subespacio $M^\perp = M^\circ$. Luego $u_0 \in M^\circ$
Además por el teorema anterior, u es continua si, y solo si, u_0 es continua. Luego $u \in (E/M)'$ si, y solo si, $u_0 = u \circ K \in M^\circ$.
Identificando u con u_0 podemos decir que $(E/M)' = M^\circ$. c.s.q.d.

1.5. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo, M un subespacio de E y $K: E \to E/M$ la suprayección canónica. Entonces la aplicación transpuesta de K es la inmersión canónica de M° en E'.

Demostr.: Puesto que $K: E \to E/M$ es continua, se verifica que su transpuesta K' está definida en $(E/M)'$ y valorada en E'.
Pero $(E/M)' = M^\circ$. Luego $K': M^\circ \to E'$.
De acuerdo con la demostración del teorema anterior la identificación $(E/M)' = M^\circ$ se produce identificando cada $\varphi \in (E/M)'$

con $\varphi = \varphi \circ K \in M^\circ$.

Se trata de probar que $\forall \varphi \in (E/M)'$, $K'(\varphi) = \varphi$.

Por definición de transpuesta

$$K'(\varphi) = \varphi \circ K = \hat{\varphi} \in M^\circ.$$

Puesto que hemos identificado φ con $\hat{\varphi}$ queda visto que K' es la inmersión de M° en E'. csqd.

1.6. COROLARIO: La transpuesta de la aplicación canónica es una aplicación continua.

Trivialmente, pues K' es la inmersión de M° en E'.

2. LIMITE INDUCTIVO DE UNA FAMILIA DE ESPACIOS LOCALMETE CONVEXOS.

A) El problema que se nos plantea es el siguiente: Sea E un espacio vectorial y $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de E de forma que $< \bigcup_{i\in I} E_i > = E$. Supongamos que cada E_i va provisto de una topología localmente convexa. Queremos construir en E una topología localmente convexa que induzca en cada E_i su topología original.

Resolveremos este problema de una manera algo más general.

2.1. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial y $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos. Sea, para cada i, $v_i: E_i \to E$ una aplicación lineal. Supongamos que $E = < \bigcup_{i\in I} v_i(E_i) >$. En estas condiciones existe una topología en E que es la más fina para la cual las aplicaciones v_i son continuas. Para esta topología, una base de entornos de cero está constituida por los conjuntos U de E absolutamente convexos tales que $v_i^{-1}(U)$ es entorno de cero en E_i, para todo $i \in I$. (*)

Demostr.: Sea $\mathcal{U} = \{U \subset E \,/\, U$ absolutamente convexo y $v_i^{-1}(U)$ entorno de cero en $E_i, \forall i \in I\}$. Probemos que $\mathcal{U}$ puede ser base de entornos de cero para alguna topología localmente convexa en E.

- Si U y $V \in \mathcal{U}$, $\exists W \in \mathcal{U} \,/\, W \subset U \cap V$: basta tomar $W = U \cap V$.
- Si $U \in \mathcal{U}$ y $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, entonces $\alpha U \in \mathcal{U}$: trivial.
- Por definición los elementos de $\mathcal{U}$ son absolutamente convexos. Probemos que tambien son absorbentes. Dado $x \in E$, puesto que $E = < \bigcup_{i\in I} v_i(E_i) >$ se verifica que x se puede expresar en la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i(y_i) \quad \text{con } y_i \in E_i.$$

(*) En adelante se supondrá que $E = < \bigcup_{i\in I} v_i(E_i) >$, aunque no se diga, cuando se tenga un esquema de límite inductivo como el que describe el teorema.

Si hacemos $x_i := \lambda_i y_i$, queda que $x_i \in E_i$ y
$$x = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i).$$
Dado entonces $U \in \mathcal{U}$, se verifica que $v_i^{-1}(U)$, $i=1,\dots,n$, es entorno de cero en E_i y, por tanto, existen $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ tales que $x_i \in \varepsilon_i v_i^{-1}(U)$, $i=1,\dots,n$. Sea $\varepsilon = \max_{1\le i\le n} \varepsilon_i$.

Entonces $x_i \in \varepsilon v_i^{-1}(U)$, $i=1,\dots,n$, y por tanto $v_i(x_i) \in \varepsilon U$, $i=1,\dots,n$.
Por tanto, $x = \sum_{i=1}^{n} v_i(x_i) \in n\varepsilon U$.
Luego U es absorbente.
Por el teorema fundamental de existencia de topologías, existe en E una topología localmente convexa para la cual $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero.
Además, cada v_i es continua, pues para todo $U \in \mathcal{U}$, $v_i^{-1}(U)$ es entorno de cero en E_i.
Probemos ahora que es la topología más fina que hace continuas a las aplicaciones v_i: Si $\mathcal{T}$ es otra topología localmente convexa en E que hace continuas a las aplicaciones v_i y W es un entorno absolutamente convexo de cero en E por $\mathcal{T}$ entonces $v_i^{-1}(W)$ es entorno de cero en E_i, para cada $i \in I$, y, por tanto, $W \in \mathcal{U}$. c.s.q.d.

<u>DEFINICION:</u> (Topología límite inductivo)

Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos y E un espacio vectorial. Sea $\{v_i\}_{i\in I}$ una familia de aplicaciones lineales tales que $v_i : E_i \longrightarrow E$. Se llama topología límite inductivo de las topologías de los espacios E_i por las aplicaciones v_i en E a la más fina topología localmente convexa en E para la cual las aplicaciones v_i son continuas. (*)

De acuerdo con el teorema 1.1. podemos enunciar el siguiente

<u>2.2. COROLARIO:</u> Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E. Sea $K : E \longrightarrow E/M$ la suprayección canónica. Entonces, la topología cociente en E/M es la topología límite inductivo de la topología de E por la aplicación K.

El siguiente teorema nos da un método constructivo de una base de entornos de cero para la topología límite inductivo.

2.3. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos, E un espacio vectorial y, para cada $i\in I$, $v_i : E_i \to E$ una aplicación lineal. Consideremos en E la topología límite inductivo correspondiente. Sea para cada $i\in I$, $\mathcal{V}_i$ una base de entornos de cero absolutamente convexos en E_i. Entonces, una base de entornos de cero para la topología límite inductivo la constituye la familia $\mathcal{V}$ de las envolventes absolutamente convexas de los conjuntos $\bigcup_{i\in I} v_i(U_i)$, $U_i\in\mathcal{V}_i$, es decir

$$\mathcal{V}=\{\Gamma(\bigcup_{i\in I} v_i(U_i)) \;/\; U_i\in\mathcal{V}_i,\ i\in I\}.$$

Demostr.: Veamos que son entornos de cero absolutamente convexos. Se trata de probar que

$$\forall j\in I,\quad v_j^{-1}\Big(\Gamma\big(\bigcup_{i\in I} v_i(U_i)\big)\Big) \text{ es entorno de cero en } E_j.$$

Pero eso es trivial pues $v_j^{-1}(\Gamma(\bigcup_{i\in I} v_i(U_i)))\supset v_j^{-1}(v_j(U_j))\supset U_j$

y $U_j\in\mathcal{V}_j$, que es base de entornos de cero en E_j.

Además son discos por ser envolventes absolutamente convexas.

Probemos que $\mathcal{V}$ es base de entornos de cero.

Sea U entorno de cero absolutamente convexo para la topología límite inductivo. Entonces $v_i^{-1}(U)$ es entorno de cero en E_i

Luego $\exists\, U_i\in\mathcal{V}_i \;/\; U_i\subset v_i^{-1}(U)$

Por tanto, $v_i(U_i)\subset U$ y, por tanto, $\bigcup_{i\in I} v_i(U_i)\subset U$.

Siendo U absolutamente convexo, se verifica que

$$\Gamma(\bigcup_{i\in I} v_i(U_i))\subset U. \quad \text{csqd.}$$

2.4. TEOREMA: Sea E el límite inductivo de los espacios E_i, $i\in I$, por las aplicaciones $v_i : E_i\to E$, $i\in I$.

a) Una aplicación lineal v de E en un espacio localmente convexo F es continua si, y solo si, $v\circ v_i$ es continua, para todo $i\in I$.

b) Una familia A de aplicaciones lineales de E en F es equicontinua si, y solo si, la familia $A\circ v_i=\{v\circ v_i \,/\, v\in A\}$ es equicontinua, para cada $i\in I$.

Demostr.: a) $\Rightarrow$] Si v es continua, puesto v_i es continua se verifica que $v\circ v_i$ es continua.

$\Leftarrow$] Supongamos que $v\circ v_i$ es continua, para todo $i\in I$, y veamos que v es continua. Sea V entorno absolutamente convexo de cero

en F. Entonces $(v \circ v_i)^{-1}(V)$ es entorno de cero en E_i, para cada i, es decir $v_i^{-1}(v^{-1}(V))$ es entorno de cero en E_i, $\forall i \in I$.
Por tanto, puesto $v^{-1}(V)$ es absolutamente convexo, se verifica que es entorno de cero para la topología límite inductivo.
b) Análogo: Basta observar que
(A equicontinuo) $\Leftrightarrow$ ($\forall V$ entorno de cero en F, $\bigcap_{v \in A} v^{-1}(V)$ es entorno de cero en E)
y (A o v_i equicontinuo) $\Leftrightarrow$ ($\forall V$ entorno de cero en F, $\bigcap_{v \in A} v_i^{-1}(v^{-1}(V))$ es entorno de cero en E_i) ■

B) 2.5. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios localmente convexos, E un espacio vectorial y, para cada $i \in I$, $v_i : E_i \to E$ una aplicación lineal. Si cada E_i es un espacio tonelado entonces, E provisto de la topología límite inductivo es tonelado.

Demostr.: Sea T un tonel en E. Probemos que es entorno de cero. Puesto que cada aplicación v_i es lineal y continua se verifica que $v_i^{-1}(T)$ es un tonel en E_i.
Puesto que cada E_i es tonelado se verifica que $v_i^{-1}(T)$ es entorno de cero en E_i. Entonces, por definición de topología límite inductivo T es entorno de cero en E. c.s.q.d.
Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente

2.6. TEOREMA: El cociente de un espacio tonelado por un subespacio es un espacio tonelado.

3. ESPACIOS BORNOLOGICOS.

DEFINICION: (Aplicación lineal acotada)
Sean E y F espacios localmente convexos y $u: E \to F$ una aplicación lineal. Se dice que u es acotada si para cada acotado $A \subset E$ se verifica que $u(A)$ es acotado en F.
En virtud de PROPOSICION 1.7 (TEMA 4, pg. 37), toda aplicación lineal continua es acotada. No siempre es cierto que toda aplicación acotada sea continua. Esto da lugar a la siguiente
DEFINICION: (Espacio bornológico)
Un espacio localmente convexo E se dice que es bornológico si cualquier aplicación lineal acotada definida en E es continua

3.1. TEOREMA: Sea E un espacio bornológico y E' su dual topológico. Entonces la topología de E es la topología de Mackey $\mathcal{Z}(E,E')$.

Demostr.: Consideremos la aplicación identidad

$$I: E_{\mathcal{Z}} \to E$$

Se trata de probar que es bicontinua.
La topología original de E es compatible con la dualidad (E,E') y por tanto es menos fina que la topología de Mac Key $\mathcal{Z}(E,E')$.
Por tanto, I es continua.

Probemos ahora que $I^{-1}: E \to E_{\mathcal{Z}}$, tambien es continua.
Puesto que E es bornológico basta probar que I^{-1} es acotada.
Por el teorema de Mac Key, la topologia original de E y la topología $\mathcal{Z}(E,E')$ presentan los mismos acotados. Luego I^{-1} es acotada y, por tanto, continua.

En definitiva, la topología de E es $\mathcal{Z}(E,E')$. csqd.

Probaremos ahora que todo límite inductivo de espacios bornológicos es un espacio bornológico; probaremos despues que todo espacio bornológico es límite inductivo de una familia de espacios bornológicos. Podemos resumir esto diciendo que la categoría de los espacios bornológicos es cerrada frente a los límites inductivos.

3.2. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos, $\forall i\in I$, $u_i: E_i \to E$ una aplicación lineal. Dotemos a E de la topología límite inductivo. Si los espacios E_i son bornológicos, entonces E tambien lo es.

Demostr.: Sea F un espacio localmente convexo cualquiera y $u: E\to F$ una aplicación lineal acotada. Queremos probar que es continua. Por teorema 2.4., u es continua si, y solo si, las aplicaciones $u\circ u_i: E_i \to F$ son continuas.

Puesto que las aplicaciones u_i son continuas, son acotadas.
Luego $\forall i$, $u\circ u_i$ es acotada.
Siendo los E_i bornológicos se verifica que $u\circ u_i$ es continua, $\forall i\in I$.
Luego E es bornológico. csqd.

Los espacios metrizables son un caso particular de espacios bornológicos como prueba el siguiente

3.3. TEOREMA: Todo espacio localmente convexo metrizable es un espacio bornológico.

Demostr.: Sea E un espacio un espacio metrizable. Podemos seleccionar entonces una base numerable de entornos de cero $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que

$$U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

Sea F un espacio localmente convexo cualquiera y $u: E \to F$ una aplicación lineal acotada. Se trata de probar que u es continua.

Si u no fuese continua, existiría un entorno V de cero en F, que podemos tomar equilibrado, tal que $u^{-1}(V)$ no es entorno de cero en E. En este caso, $n\cdot u^{-1}(V)$ tampoco será entorno de cero en E, $\forall n\in\mathbb{N}$. En particular se verificará que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ U_n \not\subset n\cdot u^{-1}(V)$$

Sea, entonces, para cada $n\in\mathbb{N}$, $x_n \in U_n \setminus n\cdot u^{-1}(V)$.

Por tanto, $u(x_n)\notin n\cdot V$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Puesto que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base de entornos de cero decreciente se verifica que $\{x_n\}_n$ converge a cero y, en particular, es acotada en E. Sin embargo, la sucesión $\{u(x_n)\}_n$ no es acotada en F, pues no es absorbida por el entorno V y esto contradice que u es acotada. Luego u es continua y, por tanto, E es bornológico. c.s.q.d. ■

Sabemos por el teorema de Mackey que, si E es un espacio localmente convexo, todas las topologías compatibles con la dualidad topológica (E,E'), desde la topología débil hasta la de Mackey, presentan los mismos acotados. Cabe preguntarse si existen otras topologías sobre E que tengan los mismos acotados que la topología original de E. Trataremos de encontrar la más fina de ellas.

Sea pues E un espacio localmente convexo separado. Para cada conjunto A absolutamente convexo y acotado de E denotaremos por E_A la envolvente lineal de A: $E_A = \langle A\rangle$.

Siendo A absolutamente convexo se prueba que $E_A = \langle A\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nA$, pues si $x_1,\ldots,x_m\in A$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \sum_{i=1}^m \lambda_i A = \left(\sum_{i=1}^m |\lambda_i|\right) A \subset nA$, para $n\geq \sum_{i=1}^m |\lambda_i|$.

Denotemos por p_A la gauge de A.

Probemos que p_A es una norma en E_A.

Solo falta probar que p_A está bien definida en E_A y que $p_A(x)>0$ $\forall x\in E_A\setminus\{0\}$.

Si $x\in E_A$, $\exists n\in\mathbb{N}$ / $x\in nA$. Luego $p_A(x)\leq n$. Luego p_A está bien definida. Observar que si A fuese absorbente $E_A = E$.

Sea ahora $x \in E_A \setminus \{0\}$. Puesto que τ es separado existe un entorno de cero U en E tal que $x \notin U$.
Puesto que A es acotado, U absorbe a A. Existe entonces $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset nU$, o bien $n^{-1}A \subset U$.
Como $x \notin U$, se tiene que $x \notin n^{-1}A$ y por tanto $p_A(x) \geq n^{-1} > 0$.
Por tanto, (E_A, p_A) es un espacio normado. (*)
Sea $\mathcal{A}$ la familia de discos acotados de E y consideremos la familia de espacios normados $\{(E_A, p_A)\}_{A \in \mathcal{A}}$.
Consideremos también las inmersiones canónicas

$$\varphi_A : E_A \hookrightarrow E$$

Denotaremos por $E_{\mathcal{T}}$ el espacio E dotado con la topología límite inductivo de las topologías normadas de los espacios E_A por las aplicaciones φ_A. A veces se denota la topolofía límite inductivo en la forma $E_{\mathcal{T}} = \varinjlim E_A$.
Se verifica entonces

3.4. TEOREMA: El espacio $E_{\mathcal{T}}$ es un espacio bornológico. Además $E_{\mathcal{T}}$ presenta los mismos acotados que E. Por último, la topología $\mathcal{T}$ de $E_{\mathcal{T}}$ es la más fina topología que tiene los mismos acotados que E.

Demostr.: – $E_{\mathcal{T}}$ es bornológico: En efecto, pues los espacios E_A son normados (por tanto, metrizables); luego, por el teorema anterior, los espacios E_A son bornológicos. En consecuencia, $E_{\mathcal{T}}$, como límite inductivo de espacios bornológicos, es un espacio bornológico (TEOREMA 3.2.).
– Veamos que $E_{\mathcal{T}}$ y E tienen los mismos acotados.
Las aplicaciones $\varphi_A : E_A \hookrightarrow E_{\mathcal{T}}$ son continuas.
Consideremos la identidad $I : E_{\mathcal{T}} \longrightarrow E$.
Probemos que I es continua, para lo cual basta probar que $I \circ \varphi_A : E_A \longrightarrow E$ es continua, $\forall A \in \mathcal{A}$.
Sea U entorno de cero en E por la topología original. Puesto que A es acotado, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda A \subset U$.
Además $\lambda A \subset E_A$.
Luego $\lambda A \subset U \cap E_A$.
Pero λA es entorno de cero en E_A, pues A es la bola unidad en E_A.
Luego $U \cap E_A$ es entorno de cero en E_A.
Puesto que $U \cap E_A = (I \circ \varphi_A)^{-1}(U)$, queda probado que $I \circ \varphi_A$ es continua. Luego I es continua y, por tanto, acotada.

(*) Este espacio sería de Banach si E es completo (incluso más, si E es secuencialmente completo) supuesto que los discos acotados A sean cerrados, como probaremos más adelante.

En consecuencia todo acotado de $E_{\mathcal{T}}$ es acotado en E.
Probemos ahora que todo acotado de E es acotado en $E_{\mathcal{T}}$.
Sea A un conjunto acotado en E, que podemos suponer absolutamente convexo, sin pérdida de generalidad. Entonces $A \in \mathcal{A}$ y por tanto, es la bola unidad en E_A. En particular, A es acotado en E_A. Puesto que $\varphi_A : E_A \to E_{\mathcal{T}}$ es continua, y por tanto acotada, se verifica que $\varphi_A(A) = A$ es acotado en $E_{\mathcal{T}}$.
- Probemos que $\mathcal{T}$ es la topología más fina en E que presenta los mismos acotados que la topología original de E. Sea ξ otra topología en E con los mismos acotados que la original. Veamos que $\xi \leq \mathcal{T}$.
Consideremos la identidad $I : E_{\mathcal{T}} \to E_{\xi}$. Se trata de probar que I es continua.

Puesto que ξ y $\mathcal{T}$ presentan los mismos acotados se verifica que I es acotada y, por tanto, continua, pues $E_{\mathcal{T}}$ es bornológico. c.s.q.d.

Como corolario obtenemos que todo espacio bornológico es límite inductivo de espacios bornológicos. Más concretamente

3.5. COROLARIO: Sea E un espacio bornológico y $\mathcal{A}$ la familia de discos acotados de E. Consideremos la familia de espacios bornológicos $\{(E_A, p_A)\}_{A \in \mathcal{A}}$. Entonces la topología límite inductivo de los espacios E_A mediante las inmersiones $\varphi_A : E_A \hookrightarrow E$, $A \in \mathcal{A}$, es la topología original de E.

Demostr.: Por el teorema anterior $I : E_{\mathcal{T}} \to E$ es continua.
Probemos que, siendo E bornológico, $I^{-1} : E \longrightarrow E_{\mathcal{T}}$ también es continua. En efecto; por el teorema anterior, $E_{\mathcal{T}}$ y E presentan los mismos acotados y, por tanto, I^{-1} es acotada.
Puesto que E es bornológico, I^{-1} es continua.
Luego las topologías de E y $E_{\mathcal{T}}$ coinciden. c.s.q.d.

OBSERVACION: Hasta aquí hemos supuesto que $\mathcal{A}$ es la familia de discos acotados de E. Si suponemos que $\mathcal{A}$ es la familia de discos cerrados y acotados de E todos los teoremas anteriores siguen siendo ciertos, pues la familia de discos cerrados y acotados de E es una base de acotados de E. En adelante supondremos que los elementos de $\mathcal{A}$ son discos cerrados y acotados.

Podemos enunciar entonces el siguiente

3.6. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y denotemos por $\mathcal{T}$ la topología límite inductivo de los espacios (E_A, p_A) por las inmersiones φ_A. Entonces $\mathcal{T}$ es la topología de E si, y solo si, E es bornológico.

Demostr.: La condición suficiente está probada en el teorema anterior. Supongamos entonces que $\mathcal{T}$ coincide con la topología original de E. Entonces E es límite inductivo de los espacios (E_A, p_A) por las aplicaciones $\varphi_A : E_A \hookrightarrow E$.
Puesto que los espacios E_A son bornológicos (son metrizables por ser normados) se verifica por TEOREMA 3.2. que E es bornológico. csqd.

3.7. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo separado y secuencialmente completo (es decir, toda sucesión de Cauchy en E es convergente). Sea A un disco cerrado y acotado en E. Entonces el espacio normado (E_A, p_A) es un espacio de Banach.

Demostr.: En la demostración del TEOREMA 3.4 vimos que la aplicación $\varphi_A : E_A \hookrightarrow E$ es continua (allí esta aplicación era $I \circ \varphi_A$).
Sea entonces $\{x_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en E_A.
Puesto que φ_A es continua se verifica que $\{\varphi_A(x_n)\}_n = \{x_n\}_n$ es una sucesión de Cauchy en E, que por hipótesis, es secuencialmente completo.
Luego existe $x \in E$ tal que $\{x_n\}_n \xrightarrow[E]{} x$.
Probemos que $x \in E_A$ y que $\{x_n\}_n$ converge a x en (E_A, p_A).
En efecto: siendo $\{x_n\}_n$ de Cauchy en E_A se verifica que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq n_0 \Rightarrow p_A(x_n - x_m) \leq \varepsilon.$$

que $p_A(x_n - x_m) \leq \varepsilon$ significa que $x_n - x_m \in \varepsilon A$.
Fijando n y tomando límite en E cuando $m \to \infty$ se verifica que

$$x_n - x \in \varepsilon \overline{A} = \varepsilon A$$

por ser A cerrado.
Puesto que $x_n \in E_A$ y $x_n - x \in \varepsilon A \subset E_A$ se verifica que $x \in E_A$.
Además, como $x_n - x \in \varepsilon A$ se verifica que $p_A(x_n - x) \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$.
Luego $\{x_n\}_n \xrightarrow[E_A]{} x$. csqd.

3.8. COROLARIO: Si E es un espacio localmente convexo separado y completo, para cada disco cerrado y acotado A en E, E_A es un espacio de Banach.

D: Trivial pues todo espacio completo es secuencialmente completo.

3.9. COROLARIO: Sea E un espacio bornológico completo. Entonces E es límite inductivo de espacios de Banach.

Demostr.: Siendo E bornológico, E es límite inductivo de los espacios (E_A, p_A) cuando A recorre la familia de discos cerrados y acotados de E.

Puesto que E es completo, los espacios E_A son de Banach. c.s.q.d.

DEFINICION: (Espacios ultrabornológicos)

Todo espacio localmente convexo que sea límite inductivo de espacios de Banach se llama espacio ultrabornológico.

Se deduce entonces del corolario anterior que todo espacio bornológico completo es ultrabornológico.

3.10. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo bornológico. Entonces E es casitonelado.

Demostr.: Consideremos la dualidad topológica (E, E'). Se trata de probar que todo conjunto fuertemente acotado de E' es equicontinuo.

Sea $\mathcal{T}$ la topología original de E y ξ la topología polar en E de los conjuntos $\beta(E', E)$-acotados de E'.

Sabemos que $\mathcal{T}$ es la topología polar de los equicontinuos de E' y una base de 0-entornos por $\mathcal{T}$ está formada por las polares B° de los equicontinuos B de E'.

Una base de entornos de cero por ξ está formada por las polares C° de los conjuntos C fuertemente acotados de E'.

Si probamos que $\mathcal{T}$ y ξ coinciden quedará probado que los equicontinuos y los $\beta(E', E)$-acotados coinciden, con lo cual E será casitonelado.

Puesto que todo conjunto equicontinuo de E' es fuertemente acotado se verifica que $\mathcal{T} \leq \xi$, pues todo entorno de cero por $\mathcal{T}$ contiene a la polar de un conjunto equicontinuo que es la polar de un fuertemente acotado y, por tanto, un ξ-entorno de cero.

Si probamos que $\mathcal{T}$ y ξ tienen los mismos acotados quedará probado que $\mathcal{T} = \xi$, pues, en ese caso, ξ es una topología más fina o igual que $\mathcal{T}$, que es una topología bornológica por hipótesis, y, por tanto, la más fina de las topologías que tienen los mismos acotados que $\mathcal{T}$

que todo acotado por $\mathcal{T}$ es acotado por ξ, (pues siendo $\mathcal{T} \leq \xi$ se verifica que todo conjunto ξ-acotado es $\mathcal{T}$-acotado).

Sea pues A acotado por $\mathcal{T}$. Queremos ver que A es absorbido por todo ξ-entorno de cero.

Sea C° entorno de cero por ξ, donde C es fuertemente acotado en E'. Siendo A acotado en E, con su topología $\mathcal{T}$ original, se verifica que A° es un $\beta(E',E)$-entorno de cero en E', que, por tanto, absorbe a C.

Es decir, $\exists \lambda > 0 / \ \lambda C \subset A^\circ$.

Por tanto, $\lambda^{-1} C^\circ \supset A^{\circ\circ} \supset A$.

Es decir, A es absorbido por C°, que prueba que A es ξ-acotado.

En definitiva, E es casi tonelado. csqd.

3.11. TEOREMA: Si E es un espacio bornológico completo, entonces E es tonelado.

Demostr.: Siendo E bornológico completo, se puede expresar como límite inductivo de los espacios de Banach E_A: $E = \varinjlim E_A$.

Por el teorema de Banach-Steinhaus los espacios E_A son tonelados. Luego, por TEOREMA 2.5, E es tonelado. csqd.

Se verifica entonces el esquema siguiente

$$\begin{tikzcd}
(E \text{ normable}) \arrow[d, Rightarrow] & & \\
(E \text{ metrizable}) \arrow[r, Rightarrow] & (E \text{ bornológico}) \arrow[r, Rightarrow] & (E \text{ casi tonelado}) \\
(E \text{ de Banach}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (E \text{ bornológico completo}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (E \text{ tonelado}) \arrow[u, Rightarrow] \\
 & (E \text{ ultrabornológico}) & (E \text{ reflexivo}) \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

4. LIMITES PROYECTIVOS

Trataremos en este apartado del siguiente problema: Sea E un espacio vectorial y $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos. Para cada $i \in I$ sea $v_i : E \to E_i$ una aplicación lineal. Queremos ver si existe una topología en E que haga continuas a las aplicaciones v_i. El siguiente teorema responde a esta cuestión y nos da, además, una base de 0-entornos para la topología menos fina en E que satisface lo anterior.

4.1. TEOREMA: Sea E un espacio vectorial, $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos y para cada $i\in I$, $v_i: E \to E_i$ una aplicación lineal. Existe entonces una topología localmente convexa en E que es la menos fina para la cual las aplicaciones v_i son continuas.

Una base de entornos de cero para esta topología está formada por la familia $\mathcal{U}$ de las intersecciones finitas de contraimágenes de entornos de cero U_i en E_i por las aplicaciones v_i. Dicho de otra forma, si para cada $i\in I$, $\mathcal{U}_i$ es una base de entornos de cero absolutamente convexos en E_i, entonces

$$\mathcal{U} = \{ \bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset E \;/\; n\in\mathbb{N},\ U_{i_k}\in \mathcal{U}_{i_k},\ k=1,\dots,n \}$$

es base de entornos de cero en E.

Demostr.: Veamos que $\mathcal{U}$ satisface las condiciones i), ii) e iii) del TEOREMA 2.1 (pg. 6) supuesto que las familias $\mathcal{U}_i$ satisfacen dichas condiciones, lo cual se puede exigir por ser los espacios E_i localmente convexos.

i) Evidentemente la intersección de dos elementos de $\mathcal{U}$ es un elemento de $\mathcal{U}$.

ii) Si $\alpha \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ y $\bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathcal{U}$, entonces $\alpha \bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathcal{U}$

pues $\alpha \bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = \bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(\alpha U_{i_k}) \in \mathcal{U}$, pues $\alpha U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}$.

iii) Los elementos de $\mathcal{U}$ son absolutamente convexos pues los U_i lo son (por tanto, $v_i^{-1}(U_i)$ es un disco en E y la intersección de discos es un disco). Veamos que tambien son absorbentes:

Sea $\bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathcal{U}$. Basta probar que $v_i^{-1}(U_i)$ es absorbente para cada $i\in I$ y cada $U_i \in \mathcal{U}_i$, pues la intersección finita de conjuntos absorbentes es absorbente. Sea $x\in E$; entonces $v_i(x)\in E_i$ y puesto que U_i es absorbente, $\exists \alpha>0$ tal que $\alpha v_i(x) \in U_i$. Por tanto, $\alpha x \in v_i^{-1}(U_i)$, que prueba que $v_i^{-1}(U_i)$ es absorbente.

En virtud del TEOREMA 2.1 (TEMA 2º) existe en E una topología localmente convexa para la cual $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero.

Evidentemente, si E va provisto de dicha topología, para todo $i\in I$ $v_i: E\to E_i$ es continua, pues $\forall U_i \in \mathcal{U}_i$, $v_i^{-1}(U_i)$ es entorno de cero.

Probemos que dicha topología es la menos fina en E para la cual las aplicaciones v_i son continuas.

En efecto: Si $\mathcal{T}$ es otra topología sobre E de forma que las aplicaciones $v_i : E \to E_i$ son continuas, entonces todo elemento de $\mathcal{U}$ es entorno de cero por $\mathcal{T}$, pues dados $n \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_n \in I$, $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{i_k}, k=1,\dots,n$ se verifica que $v_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ es entorno de cero por $\mathcal{T}$, pues v_{i_k} es continua cuando E va provisto de esta topología, y por tanto $\bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ es entorno de cero por $\mathcal{T}$. csqd.

DEFINICION: (Topología límite proyectivo)

Sea E un espacio vectorial y $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios localmente convexos. Para cada $i \in I$ sea $v_i : E \to E_i$ una aplicación lineal. Se llama topología límite proyectivo de las topologías de los espacios E_i por las aplicaciones v_i a la topología menos fina en E para la cual las aplicaciones v_i son continuas.

Se suele denotar $E = \varprojlim E_i$.

4.2. TEOREMA: Sea $E = \varprojlim E_i$ por las aplicaciones v_i. Sea F un espacio localmente convexo y $u : F \to E$ una aplicación lineal. Entonces u es continua si, y sólo si, $v_i \circ u$ es continua para todo $i \in I$.

Demostr.: $\Rightarrow$ Si u es continua entonces $v_i \circ u : F \longrightarrow E_i$ es continua para todo $i \in I$, pues v_i es continua.

$\Leftarrow$ Supongamos que las aplicaciones $v_i \circ u$ son continuas. Veamos que u es continua.

Sea $U = \bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ entorno de cero en E.

Veamos que $u^{-1}(U)$ es entorno de cero.

Puesto que $u^{-1}(U) = \bigcap_{k=1}^{n} u^{-1}(v_{i_k}^{-1}(U_{i_k})) = \bigcap_{k=1}^{n} (v_{i_k} \circ u)^{-1}(U_{i_k})$

se verifica que $u^{-1}(U)$ es entorno de cero como intersección finita de entornos de cero, pues $(v_{i_k} \circ u)^{-1}(U_{i_k})$ es entorno de cero, por ser $v_{i_k} \circ u$ continua. csqd.

Veamos en qué condiciones una topología límite proyectivo es separada.

4.3. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios localmente convexos separados, y $v_i : E \to E_i$ una aplicación lineal, para cada $i \in I$. Dotemos a E de la topología límite proyectivo correspondiente.

Si $\bigcap_{i \in I} v_i^{-1}(0) = \{0\}$ entonces E es separado.

Demostr.: Sea $\mathcal{U}$ la base de 0-entornos en E indicada en TEOREMA 4.1.

Se trata de probar que E es separado, es decir, que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \{0\}$.

Evidentemente $\bigcap_{\substack{U_i \in \mathcal{U}_i \\ i \in I}} \left(\bigcap_{\text{finita}} v_i^{-1}(U_i) \right) = \bigcap_{i \in I} \bigcap_{U_i \in \mathcal{U}_i} v_i^{-1}(U_i)$.

Dado $i \in I$, $\bigcap_{U_i \in \mathcal{U}_i} v_i^{-1}(U_i) = v_i^{-1}\left(\bigcap_{U_i \in \mathcal{U}_i} U_i\right) = v_i^{-1}(0)$

por ser E_i separado.

Entonces $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcap_{i \in I} v_i^{-1}(0) = \{0\}$ por hipótesis.

Luego E es separado. c.s.q.d.

EJEMPLOS: (1) Sea (E, E') un par dual. Consideremos en E la topología débil $\sigma(E,E')$. Consideremos la familia de aplicaciones $x' : x \in E \mapsto \langle x, x'\rangle \in \mathbb{K}$. $\sigma(E,E')$ es la topología en E menos fina para la cual las aplicaciones $x' \in E'$ son continuas. Por tanto, $\sigma(E,E')$ es la topología límite proyectivo de la topología de $\mathbb{K}$ mediante las aplicaciones x'. Esto pone de manifiesto la "similitud" entre la topología débil y la topología de $\mathbb{K}$.

(2) Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E. La topología inducida en M por la de E es la topología límite proyectivo de la topología de E por la inmersión canónica $\varphi : x \in M \mapsto x \in E$, por ser dicha topología inducida la menos fina para la cual φ es continua.

OBSERVACION: Cuando sea preciso que E, provisto de la topología límite proyectivo de una familia de topologías localmente convexas separadas, sea separado supondremos que se verifica la hipótesis del teorema anterior: $\bigcap_{i \in I} v_i^{-1}(0) = \{0\}$.

Un importante resultado acerca de la topología límite proyectivo es el siguiente

4.4. TEOREMA: Sea $E = \varprojlim E_i$ por las aplicaciones $v_i : E \to E_i$, $i \in I$.

Entonces se verifica

a) $A \subset E$ es acotado si, y solo si, $v_i(A)$ es acotado, $\forall i \in I$.

b) $A \subset E$ es precompacto si, y solo si, $v_i(A)$ es precompacto, $\forall i \in I$.

Demostr.: a) $\Rightarrow$ Si A es acotado en E, $v_i(A)$ es acotado en E_i, $\forall i \in I$, pues v_i es continua.

$\Leftarrow$ Supongamos que $v_i(A)$ es acotado, $\forall i \in I$.

Veamos que A es acotado en E.

Sea $\bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ un entorno de cero en E; probemos que A es absorbido por dicho entorno.

Puesto que $v_{i_k}(A)$ es acotado en E_{i_k}, existe $\lambda_{i_k} > 0$ tal que

$$\lambda_{i_k} v_{i_k}(A) \subset U_{i_k}.$$

Sea $\lambda = \min_{1 \le k \le n} \lambda_{i_k}$. Entonces

$$\lambda A \subset \bigcap_{k=1}^{n} v_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$$

y, por tanto, A es acotado.

b) $\Rightarrow$] Si A es precompacto en E, $v_i(A)$ es precompacto en E_i, $\forall i$, por ser v_i lineal y continua.

$\Leftarrow$] Supongamos que para todo $i \in I$, $v_i(A)$ es precompacto en E_i.
Queremos ver que A es precompacto en E, es decir, que para todo entorno de cero U en E existe un conjunto finito C en E tal que $A \subset C + U$.
Sea $U = \bigcap_{i \in J} v_i^{-1}(U_i)$ un entorno básico de cero E donde J es un subconjunto finito de I.
Puesto que $v_i(A)$ es precompacto en E_i, dado U_i existe un conjunto finito C_i en E_i tal que $v_i(A) \subset C_i + U_i$
Para cada $i \in J$ sea $D_i = C_i \cap v_i(E)$ y para cada $x_i \in D_i$ elijamos un $z_i \in E$ tal que $v_i(z_i) = x_i$

Trivialmente para cada $i \in J$, $A \subset \{z_i \in E / v_i(z_i) = x_i, x_i \in D_i\} + v_i^{-1}(U_i)$ pues $v_i(A) \subset C_i + U_i$. Sea $D = \{z_i \in E / v_i(z_i) = x_i, x_i \in D_i, i \in J\}$

Por tanto, $A \subset D + \bigcap_{i \in J} v_i^{-1}(U_i) = D + U$.

Como D es finito, pues J es finito y $D = \bigcup_{i \in J} \{z_i \in E / v_i(z_i) = x_i, x_i \in D_i\}$ y D_i es finito, queda visto que A es precompacto. c.s.q.d.

Existe una "dualidad" entre los conceptos de límite inductivo y límite proyectivo, como queda de manifiesto en el siguiente teorema.

4.5. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios localmente convexos separados y consideremos para cada $i \in I$ la dualidad topológica (E_i, E_i'). Para cada $i \in I$, sea $\mathcal{A}_i$ una familia de acotados en E_i satisfaciendo las condiciones B.1), B.2), B.3) y B.4) (pg. 39). Sea E un espacio vectorial y para cada $i \in I$, $v_i : E_i \longrightarrow E$ una aplicación lineal. Dotemos a E de la topología límite inductivo de las topologías de los E_i por las aplicaciones v_i. Supongamos que dicha topología es separada. Consideremos la dualidad topológica (E, E') y consideremos en E la familia $\mathcal{A}$ de acotados, imágenes por las v_i de los elementos de las familias $\mathcal{A}_i$, es decir, $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} v_i(\mathcal{A}_i)$. Si suponemos que en cada E_i' tenemos definida la topología de la $\mathcal{A}_i$-convergencia se verifica que la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' coincide con la topología límite proyectivo de las topologías de E_i' por las aplicaciones traspuestas $v_i' : E' \longrightarrow E_i'$.

Demostr.: La familia $\mathcal{A}$ es en efecto una familia de acotados en E que satisface las condiciones B.1), B.2) y B.3): Basta, para probar esto, observar que las aplicaciones v_i son continuas y lineales, que $E = \langle \bigcup_{i\in I} v_i(E_i) \rangle$ (ver TEOREMA 2.1) y que las familias $\mathcal{A}_i$ de acotados satisfacen B.1), B.2) y B.3).

Además, puesto que las aplicaciones v_i son continuas, y por tanto débilmente continuas, sus traspuestas están valoradas en E_i'.

Probemos ahora que $\bigcap_{i\in I} v_i'^{-1}(0) = \{0\}$, para garantizar así que la topología límite proyectivo en E' por las aplicaciones $v_i' : E' \longrightarrow E_i'$ es separada: Si $x' \in \bigcap_{i\in I} v_i'^{-1}(0)$, entonces $v_i'(x') = 0$, $\forall i \in I$.

Por tanto, $\forall i \in I$, $\forall x_i \in E_i$, $\langle x_i, v_i'(x') \rangle = 0$.

Por definición de aplicación traspuesta, se verificará que

$$\langle v_i(x_i), x' \rangle = 0, \ \forall i \in I, \forall x_i \in E_i.$$

Por tanto, x' se anula sobre $\bigcup_{i\in I} v_i(E_i)$; luego por linealidad x' se anula sobre $E = \langle \bigcup_{i\in I} v_i(E_i) \rangle$. Es decir, $x' = 0$.

Luego $E' = \varprojlim E_i'$ es separado.

Probemos ya que dicha topología límite proyectivo en E' coincide con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

Una base de entornos de cero para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es $\{[v_i(A_i)]^\circ \subset E' \ / \ i \in I, A_i \in \mathcal{A}_i\}$.

Una base de entornos de cero en $E' = \varprojlim E_i'$ está formada por intersecciones finitas de contraimágenes de entornos de cero en E_i' con la topología de la $\mathcal{A}_i$-convergencia, es decir, intersecciones finitas de conjuntos del tipo

$$(v_i')^{-1}(A_i^\circ), \quad i \in I, \ A_i \in \mathcal{A}_i.$$

Pero $[v_i(A_i)]^\circ = (v_i')^{-1}(A_i^\circ)$. (*)

Es trivial ya comprobar que se verifica la tesis del teorema. ■

En particular

4.6. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo, M un subespacio cerrado de E y $K : E \to E/M$ la suprayección canónica. Consideremos la inmersión canónica $K' : M^\circ \hookrightarrow E'$. Si $\mathcal{A}$ es una familia de acotados en E satisfaciendo las condiciones B.1) – B.4), entonces la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' induce en M° la topología de la $K(\mathcal{A})$-convergencia.

Demostr.: Sabemos que si M es cerrado, entonces el espacio cociente E/M es separado. Además M° es el dual topológico de E/M (Th. 1.4) y $K': M^\circ \hookrightarrow E'$, inmersión de M° en E', es precisamente la traspuesta de la suprayección canónica $K: E \to E/M$ (Th. 1.5.). Además, la familia $K(\mathcal{A})$ de acotados en E/M satisface B.1)–B.3), por ser K suprayectiva, lineal y continua.

Sabemos que la topología cociente en E/M es la topología límite inductivo de la de E por la aplicación K, y que la topología que induce en M° la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' es la topología límite proyectivo de dicha topología en E' por la inmersión canónica K'. Por el teorema anterior, esta topología coincide con la topología de la $K(\mathcal{A})$-convergencia en M°. Luego la topología que induce $E'_{\mathcal{A}}$ en M° es la topología de la $K(\mathcal{A})$-convergencia. c.q.d.

El siguiente teorema prueba como cualquier topología localmente convexa separada se puede expresar como límite proyectivo de topologías normadas.

4.7. TEOREMA: Todo espacio localmente convexo separado es límite proyectivo de espacios normados.

Demostr.: Sea E un espacio localmente convexo separado y $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados de E. Para cada $U \in \mathcal{U}$ sea p_U la gauge de U.

Entonces, las seminormas p_U son continuas y, por tanto, $p_U^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de E, $\forall U \in \mathcal{U}$, pues $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

Denotemos por E_U el espacio vectorial cociente $E/p_U^{-1}(0)$.

Definimos sobre E_U la aplicación

$$\|\cdot\|_U : X \in E_U \longmapsto \|X\|_U = p_U(x) \in \mathbb{R}, \text{ si } x \in X.$$

Probemos que $\|\cdot\|_U$ está bien definida para cada $U \in \mathcal{U}$, es decir, que si x e y son dos representantes de la misma clase $X \in E_U$ entonces $p_U(x) = p_U(y)$. En efecto: si $x, y \in X$ (es decir $y \in x + p_U^{-1}(0)$), entonces $x - y \in p_U^{-1}(0)$ y, por tanto, $p_U(x-y) = 0$; puesto que

$$|p_U(x) - p_U(y)| \leq p_U(x-y)$$

se verifica que $p_U(x) = p_U(y)$.

Es trivial comprobar que $\|\cdot\|_U$ es una seminorma en E_U

norma en E). Probemos también que $\|X\|_U = 0 \Rightarrow X = 0$, con lo cual $\|\cdot\|_U$ será una norma en E_U.

Si $\|X\|_U = 0$, entonces $p_U(x) = 0$ y, por tanto, $x \in p_U^{-1}(0)$.
Luego, como $p_U^{-1}(0)$ es el neutro en E_U, queda visto que $X = 0$.
Luego para cada $U \in \mathcal{U}$, $(E_U, \|\cdot\|_U)$ es un espacio normado.

Consideremos las suprayecciones canónicas

$$\varphi_U : x \in E \longmapsto x + p_U^{-1}(0) \in E_U = E/p_U^{-1}(0).$$

Probemos que la topología original de E es la topología límite proyectivo de las topologías normadas sobre los E_U por las aplicaciones φ_U.

Veamos en primer lugar que dicho límite proyectivo es separado, para lo cual basta probar que $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U^{-1}(0) = \{0\}$:
Si $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U^{-1}(0)$ entonces $\varphi_U(x) = 0$, $\forall U \in \mathcal{U}$ y por tanto

$$X = x + p_U^{-1}(0) = 0 \in E_U, \ \forall U \in \mathcal{U}.$$

Luego $\|X\|_U = 0$, $\forall U \in \mathcal{U}$.
Puesto que $\forall U \in \mathcal{U}$, $\|X\|_U = p_U(x)$, se verifica que $p_U(x) = 0$, $\forall U \in \mathcal{U}$.
Como E es separado y $\{p_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ genera la topología de E se ha de verificar que $x = 0$. Luego $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} \varphi_U^{-1}(0) = \{0\}$.

Veamos ya que $E = \varprojlim E_U$.
Una base de 0-entornos para la topología límite proyectivo está formada por intersecciones finitas de conjuntos del tipo

$$\varphi_U^{-1}(V_\varepsilon), \ U \in \mathcal{U}$$

donde $V_\varepsilon = \{X \in E_U / \|X\|_U \leq \varepsilon\} = \{X \in E_U / p_U(x) \leq \varepsilon\}$.
Por tanto, $x \in \varphi_U^{-1}(V_\varepsilon) \Leftrightarrow p_U(x) \leq \varepsilon$.
Luego, por definición de p_U, $\varphi_U^{-1}(V_\varepsilon) = \varepsilon U$, pues U es cerrado.
Se deduce de esta igualdad que la topología de E (para la cual $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero) coincide con la topología límite proyectivo de los E_U por las aplicaciones φ_U. csqd.

5. ESPACIOS PRODUCTO

Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos. El conjunto producto, que denotaremos por $\prod_{i \in I} E_i$ se define como

$$\prod_{i \in I} E_i = \{x = (x_i)_{i \in I} / x_i \in E_i, \forall i \in I\}. \quad (*)$$

Si los conjuntos E_i son espacios vectoriales podemos dotar a $\prod_{i \in I} E_i$

(*) El axioma de elección garantiza la existencia de dicho conjunto.

de una estructura de espacio vectorial mediante las operaciones

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i+y_i)_{i\in I}.$$

$$\lambda\cdot(x_i)_{i\in I} = (\lambda x_i)_{i\in I}.$$

A $\prod_{i\in I} E_i$ se le llama espacio vectorial producto.

En el caso fue $\{E_i\}_{i\in I}$ sea una familia de espacios localmente convexos vamos a definir en $\prod_{i\in I} E_i$ una topología localmente convexa.

Consideremos para cada $j\in I$ la aplicación proyección canónica:

$$\pi_j : (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \longmapsto \pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j \in E_j$$

<u>DEFINICION:</u> (Topología producto)

Se llama topología producto en $\prod_{i\in I} E_i$ a la topología límite proyectivo de las topologías de los E_i por las aplicaciones lineales proyección π_i, es decir, a la menos fina topología en $\prod_{i\in I} E_i$ que hace continuas a todas las proyecciones canónicas.

Comprobemos que $\bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(0) = \{0\}$. (*)

Si $x \in \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(0)$, entonces $\pi_i(x)=0, \forall i\in I$ y por tanto $x_i=0, \forall i\in I$, es decir, $x=0$.

<u>5.1. PROPOSICION:</u> Una base de entornos de cero para la topología producto viene dada por conjuntos de la forma $\prod_{i\in I} W_i$, donde W_i es entorno de cero en E_i, para cada $i\in I$, y $W_i = E_i$ para todos los índices salvo, quizás, un número finito de ellos.

Demostr.: Por definición de topología límite proyectivo, una base de entornos de cero en $\prod_{i\in I} E_i$ está formada por intersecciones finitas de conjuntos del tipo $\pi_i^{-1}(U_i)$, donde U_i es entorno de cero en E_i.

Pero $\pi_i^{-1}(U_i) = \{x=(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \,/\, x_i \in U_i\} = \prod_{j\in I} W_j$ donde $W_j = E_j$ si $j\neq i$ y $W_i = U_i$.

Entonces $\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = \prod_{j\in I} W_j$ donde $W_{i_k} = U_{i_k}, k=1,\dots,n$, $W_j = E_j$ si $j\notin\{i_1,\dots,i_n\}$.

<u>5.2. TEOREMA:</u> El espacio producto $\prod_{i\in I} E_i$ es separado si, y solo si, cada espacio E_i es separado.

Demostr.: $\Rightarrow$) Supongamos que $\prod E_i$ es separado. Queremos ver que para cada $i\in I$, E_i es separado.

Sea $z_i \in E_i \setminus \{0\}$.

Sea $x = (x_j)_{j\in I} \in \prod E_i$ tal que $x_j = 0$ si $j\neq i$ y $x_i = z_i$.

(*) Aunque en la definición de topología límite proyectivo no se exige esta condición, de aquí en adelante la exigiremos siempre, para garantizar la separación de la topología límite proyectivo, si las de los E_i lo son.

Puesto que $x \neq 0$ y $\prod_{i\in I} E_i$ es separado, existe un entorno de cero en $\prod E_i$, que podemos tomar de la forma $\prod_{i\in I} W_i$, tal que $x \notin \prod_{i\in I} W_i$.
Si $j \neq i$, $x_j \in W_j$, pues $x_j = 0$ y W_j es entorno de cero.
Por tanto, $z_i \notin W_i$. Puesto que W_i es entorno de cero en E_i, queda visto que E_i es separado.

$\Leftarrow$] Puesto que los espacios E_i son separados y $\bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(0) = \{0\}$, se verifica que $\prod_{i\in I} E_i$ es separado. csqd.

Puesto que hemos definido la topología producto como una topología límite projectiva se verifica (TEOREMAS 4.2. y 4.4) que

5.3. TEOREMA: a) Si F es un espacio localmente convexo, entonces una aplicación lineal $u: F \to \prod E_i$ es continua si, y solo si, $\pi_i \circ u: F \to E_i$ es continua, para todo $i \in I$.
b) Sea $A \subset \prod E_i$. Entonces A es acotado en $\prod E_i$ si, y solo si, $\pi_i(A)$ es acotado en E_i, $\forall i \in I$.
A es precompacto en $\prod E_i$ si, y solo si, $\pi_i(A)$ es precompacto en E_i, $\forall i \in I$.

No es cierto, en general, que una topología límite projectiva de una familia de topologías localmente convexas sea completa si y solo si lo son estas últimas. Sin embargo

5.4. TEOREMA: Consideremos el espacio producto $\prod_{i\in I} E_i$ y sea, para cada $i \in I$, A_i un subconjunto no vacío de E_i. Sea $A = \prod_{i\in I} A_i$.
Entonces A es completo si, y solo si, cada A_i es completo.
En particular, $\prod_{i\in I} E_i$ es completo si, y solo si, cada espacio E_i es completo.

Demostr.: $\Rightarrow$] Supongamos que $A = \prod_{i\in I} A_i$ es completo y probemos que cada factor A_i es completo.
Sea entonces $\mathcal{F}_i$ un filtro de Cauchy en E_i tal que $A_i \in \mathcal{F}_i$.
Para cada $j \neq i$ sea $\mathcal{F}_j$ un filtro de Cauchy en E_j tal que $A_j \in \mathcal{F}_j$: siempre existe un filtro $\mathcal{F}_j$ como el descrito, pues si $z_j \in A_j$ el filtro (aun más, ultrafiltro) de los superconjuntos de $\{z_j\}$ es un filtro de Cauchy (aun más, convergente) al que pertenece A_j.

Sea $\mathcal{B} = \{\prod_{i\in I} H_i \subset \prod_{i\in I} E_i \,/\, H_i \in \mathcal{F}_i, i \in I\}$.

Fácilmente se comprueba que $\mathcal{B}$ es una base de filtro en $\prod_{i\in I} E_i$. Sea $\mathcal{F}$ el filtro generado por dicha base. Se verifica que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $\prod E_i$ tal que $A \in \mathcal{F}$ y de forma que $\pi_i(\mathcal{F})$ es una base de filtro en E_i que genera el filtro $\mathcal{F}_i$.

Puesto que A es completo y $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy tal que $A \in \mathcal{F}$ se verifica que existe $x = (x_i)_{i\in I} \in A$ tal que $\mathcal{F} \to x$.

Como las proyecciones π_i son continuas se verifica que $\pi_i(\mathcal{F}) \to \pi_i(x)$.

Luego $\mathcal{F}_i \to x_i$. Como $x_i \in A_i$, queda visto que A_i es completo.

$\Leftarrow$] Supongamos que cada factor A_i es completo. Veamos que A es completo.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $\prod_{i\in I} E_i$ tal que $A \in \mathcal{F}$.

Puesto que las aplicaciones proyección π_i son lineales y continuas se verifica que $\pi_i(\mathcal{F})$ es una base de filtro de Cauchy en E_i, a la cual pertenece $A_i = \pi_i(A)$.

Puesto que A_i es completo, existe $x_i \in A_i$ tal que $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i$.

Sea $x = (x_i)_{i\in I} \in A$. Probemos que $\mathcal{F} \to x$, es decir, que para todo U entorno de cero en $\prod E_i$, $x + U \in \mathcal{F}$.

Sea $U = \prod_{i\in I} W_i$ un entorno de cero en $\prod E_i$. Entonces $W_i = E_i$ salvo quizás para un conjunto finito de índices $\{i_1, \dots, i_n\}$.

Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, W_{i_k} es entorno de cero en E_{i_k}.

Puesto que $\pi_i(\mathcal{F}) \to x_i$, $\forall i \in I$, existe $F_{i_k} \in \mathcal{F}$ tal que

$$\pi_{i_k}(F_{i_k}) \subset x_{i_k} + W_{i_k}, \quad k = 1, \dots, n$$

Sea $F = \bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}$. Entonces $F \in \mathcal{F}$, como intersección finita de elementos de $\mathcal{F}$. Además $\pi_{i_k}(F) \subset x_{i_k} + W_{i_k}$, $k = 1, \dots, n$

Si $j \notin \{i_1, \dots, i_n\}$, $W_j = E_j$ y por tanto $\pi_j(F) \subset x_j + W_j$.

Luego $\pi_i(F) \subset x_i + W_i$, $\forall i \in I$

y, por tanto, $F \subset x + \prod_{i\in I} W_i$, que prueba que $x + \prod_{i\in I} W_i \in \mathcal{F}$.

Luego $\mathcal{F} \to x$. csqd.

<u>5.5. COROLARIO:</u> Sea el espacio producto $\prod_{i\in I} E_i$ y para cada $i \in I$ sea A_i subconjunto no vacío de E_i. Sea $A = \prod_{i\in I} A_i$.
Entonces A es compacto si, y sólo si, cada A_i es compacto.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si A es compacto es precompacto y completo (Th. 6.7, pg 54) y, por tanto, $\pi_i(A) = A_i$ es precompacto y completo (Th. 5.3 y 5.4). Luego cada A_i es compacto.

$\Leftarrow$] Si cada A_i es compacto, entonces A_i es precompacto y completo, $\forall i$, y, por tanto, A es precompacto y completo, es decir, compacto. csqd.

El siguiente teorema prueba, de alguna forma, que los únicos límites projectivos son los subespacios y los espacios productos. Más concretamente

5.6. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos, E un espacio vectorial y para cada $i\in I$, $v_i: E \to E_i$ una aplicación lineal. Dotemos a E de la topología límite projectivo correspondiente. Entonces E es isomorfo a un subespacio del espacio producto $\prod_{i\in I} E_i$.

Demostr.: Consideremos la aplicación

$$\varphi : x\in E \longmapsto (v_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$$

- φ es lineal: trivialmente, pues las aplicaciones v_i lo son.
- φ es continua: Por el TEOREMA 5.3 a), para probar que φ es continua basta probar que $\pi_i \circ \varphi : E \to E_i$ son continuas. Pero $\pi_i\circ\varphi = v_i$, $\forall i\in I$, que es continua por ser $E = \varprojlim E_i$. Luego φ es continua.
- φ es inyectiva: Siendo φ lineal basta ver que $\varphi^{-1}(0)=\{0\}$.
  $\varphi^{-1}(0) = \{x\in E \,/\, v_i(x)=0, \forall i\in I\} = \bigcap_{i\in I} v_i^{-1}(0) = \{0\}$, pues suponemos siempre que si $E=\varprojlim E_i$ por las aplicaciones v_i entonces $\bigcap_{i\in I} v_i^{-1}(0)=\{0\}$.
- $\varphi^{-1} : \varphi(E) \to E$ es continua: Puesto que $E=\varprojlim E_i$, basta probar que $v_i\circ\varphi^{-1}$ es continua, $\forall i\in I$. Trivialmente se comprueba que $v_i\circ\varphi^{-1}$ es la restricción de π_i al subespacio $\varphi(E)$, que es continua, por serlo π_i.

Por tanto, φ es un isomorfismo de E en $\varphi(E)$. Puesto que $\varphi(E)$ es un subespacio de $\prod E_i$, queda visto que E es isomorfo (topológicamente) a un subespacio de $\prod E_i$. csqd.

5.7. COROLARIO: Todo espacio localmente convexo separado es subespacio de un producto de espacios normados.

La demostración es consecuencia inmediata del TEOREMA 4.7 y el teorema anterior.

OBSERVACION: De alguna forma podemos decir que cada factor E_i es un subespacio del producto $\prod E_i$. Veamoslo: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos y sea $\prod_{i\in I} E_i$ el espacio producto dotado de la topología producto. Para cada $i\in I$ consideremos la aplicación

$$j_i : E_i \longrightarrow \prod_{i\in I} E_i$$

de forma que para cada $z \in E_i$ se tiene que $j_i(z) = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i$ donde $x_i = z$ y $x_K = 0$ si $K \neq i$.

Evidentemente las aplicaciones j_i son inyectivas y lineales. Identificando E_i con $j_i(E_i)$ podemos decir que E_i es un subespacio vectorial de $\prod_{i\in I} E_i$.

Consideremos el esquema

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "I_{E_i}"'] & \prod_{i\in I} E_i \arrow[d, "\pi_i"] \\ & E_i \end{tikzcd}$$

Es trivial que $\pi_i \circ j_i = I_{E_i}$, $\forall i \in I$. Además $\pi_i \circ j_K = 0$ si $K \neq i$.

Aún más, se verifica que

5.8. TEOREMA: Cada espacio factor E_i es isomorfo topológicamente a $j_i(E_i)$.

Demostr.: Hemos visto como $j_i : E_i \to j_i(E_i)$ es una aplicación lineal biyectiva. Además es continua pues $\forall K \in I$, $\pi_K \circ j_i$ es continua (o es la aplicación nula o es la identidad en E_i).

Veamos que la inversa $j_i^{-1} : j_i(E_i) \to E_i$ es continua.

Por definición de j_i se verifica que $j_i^{-1} = \pi_i |_{j_i(E_i)}$. Luego j_i^{-1} es continua, pues π_i lo es. c.s.q.d.

5.9. COROLARIO: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos separados. Entonces cada factor E_i es un subespacio cerrado del espacio producto $\prod_{i\in I} E_i$.

Demostr.: Acabamos de probar que E_i "es" un subespacio de $\prod_{i\in I} E_i$.

Es trivial comprobar que

$$E_i = \bigcap_{j\neq i} \pi_j^{-1}(0).$$

Puesto que los espacios E_j son separados, $\{0\}$ es cerrado en cada E_j. Como las aplicaciones proyección π_j son continuas se verifica que E_i es cerrado, como intersección de cerrados. c.s.q.d.

OBSERVACION: De la misma forma se puede comprobar que si $J \subset I$ entonces $\prod_{i\in J} E_i$ es un subespacio cerrado del producto $\prod_{i\in I} E_i$.

6. ESPACIOS SUMA DIRECTA.

Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios vectoriales y $\prod_{i\in I} E_i$ su espacio producto.

DEFINICION: Se llama espacio suma directa de los espacios E_i, y lo denotaremos por $\bigoplus_{i\in I} E_i$ al conjunto

$$\bigoplus_{i\in I} E_i = \{x=(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \,/\, x_i = 0 \text{ salvo, quizás, para un número finito de índices}\}.$$

Trivialmente se verifica

6.1. PROPOSICION: 1) Con las notaciones del apartado anterior

$$\boxed{\bigoplus_{i\in I} E_i = \langle \bigcup_{i\in I} j_i(E_i) \rangle \quad \left(= \langle \bigcup_{i\in I} E_i \rangle \text{ si identificamos } E_i \equiv j_i(E_i)\right)^{(*)}}$$

2) Si I es finito, $\bigoplus_{i\in I} E_i = \prod_{i\in I} E_i$

Es trivial que $\forall i\in I$, $j_i(E_i) \subset \bigoplus_{i\in I} E_i$.

Vamos a dotar a $\bigoplus_{i\in I} E_i$ de una topología. Exigiremos que las aplicaciones $j_i : E_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i$ sean continuas y que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ induzca en cada E_i su propia topología (supuesto que cada E_i es un espacio localmente convexo).

Bastaría para ello dotar a $\bigoplus_{i\in I} E_i$ de la topología inducida por la topología producto en $\prod_{i\in I} E_i$. Dotaremos a $\bigoplus_{i\in I} E_i$, sin embargo, de la más fina topología que satisface las condiciones anteriores.

Entonces:

Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos y $\bigoplus_{i\in I} E_i$ el espacio vectorial suma directa. Para cada $i\in I$ consideremos la inmersión $j_i : E_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i$. Se verifica que $\bigoplus_{i\in I} E_i = \langle \bigcup_{i\in I} j_i(E_i) \rangle$.
En virtud del TEOREMA 2.1 podemos dar la siguiente

DEFINICION: Se llama topología suma directa en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ a la topología límite inductivo de las topologías de los espacios E_i por las aplicaciones j_i, es decir, la más fina topología que hace continuas a las aplicaciones j_i.

En virtud de TEOREMA 2.3, una base de entornos de cero para esta topología está formada por conjuntos del tipo

$$\Gamma\left(\bigcup_{i\in I} j_i(U_i)\right)$$

donde U_i es entorno de cero en E_i.

(*) De acuerdo con esto podremos representar los elementos de $\bigoplus_{i\in I} E_i$ como sumas finitas de elementos de los E_i.

6.2. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos y $\bigoplus_{i\in I} E_i$ el espacio suma directa. Entonces

1) La topología suma directa es más fina que la inducida por la topología producto de $\prod E_i$ en $\bigoplus E_i$.

2) Si I es finito entonces la topología suma directa coincide con la topología producto en $\bigoplus E_i$ (la inducida por la de $\prod E_i$).

3) La topología suma directa induce en cada espacio E_i su propia topología.

Demostr.: 1) Sea ξ la topología suma directa en $\bigoplus E_i$ y η la topología producto en $\bigoplus E_i$. Queremos probar que $\eta \leq \xi$.

Denotemos por $\bigoplus_\eta E_i$ el espacio suma directa dotado de la topología η. Puesto que las inmersiones $j_i : E_i \longrightarrow \bigoplus_\eta E_i$ son continuas (recordemos que $j_i(E_i) \subset \bigoplus E_i$ y que $j_i : E_i \longrightarrow \prod E_i$ es continua) se verifica que $\eta \leq \xi$, pues ξ es la más fina topología en $\bigoplus E_i$ que hace continuas a las inmersiones j_i.

2) Probaremos algo más general que lo que se enuncia en 2): Sea J una parte finita de I; veamos que ξ y η inducen en $\bigoplus_{i\in J} E_i$ la misma topología. Puesto que $\xi \geq \eta$ en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ se verifica que $\xi \geq \eta$ en $\bigoplus_{i\in J} E_i$.

Probemos ahora que si $U \cap \bigoplus_{i\in J} E_i$ es entorno de cero por ξ en $\bigoplus_{i\in J} E_i$ también es entorno de cero por η, donde U es un ξ-entorno de cero en $\bigoplus_{i\in I} E_i$, que podemos tomar absolutamente convexo.

Para cada $i\in J$, $j_i^{-1}(U)$ es entorno de cero en E_i, pues $j_i : E_i \rightarrow \bigoplus E_i$ es continua. Sea $W = \prod_{i\in I} W_i$, donde $W_i = E_i$ si $i \in I\setminus J$ y $W_i = j_i^{-1}(U)$ si $i\in J$. Entonces W es entorno de cero en $\prod_{i\in I} E_i$.

Sea $n = \operatorname{card} J$. Probemos que

$$n^{-1}\Big(W \cap \bigoplus_{i\in J} E_i\Big) \subset U \cap \bigoplus_{i\in J} E_i$$

con lo cual $U \cap \bigoplus_{i\in J} E_i$ será entorno de cero por la topología que η induce en $\bigoplus_{i\in J} E_i$, como queremos probar.

Sea $x \in n^{-1}(W \cap \bigoplus_{i\in J} E_i)$

Entonces $x_i = 0$ si $i \in I\setminus J$ y $x_i \in n^{-1} W_i$ si $i\in J$.

Luego $\forall i \in J$, $n x_i \in W_i = j_i^{-1}(U)$ y por tanto $n\, j_i(x_i) \in U$ si $i\in J$.

Entonces $x = \sum_{i\in J} j_i(x_i) \in \sum_{i\in J} n^{-1} U = U$, por ser U absolutamente convexo (*)

(*) Recordar que $\bigoplus_{i\in J} E_i = \langle \bigcup_{i\in J} j_i(E_i) \rangle$.

Luego $x \in U \cap \bigoplus_{i\in J} E_i$.

3) Consideremos la familia finita $J=\{i\}$. Entonces, por 2), $\bigoplus_{i\in I} E_i$ y $\prod_{i\in I} E_i$ inducen en E_i la misma topología. Como $\prod_{i\in I} E_i$ induce en E_i la topología original queda probado que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ induce en E_i la topología original de este espacio. csqd.

6.3. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos. Entonces

a) $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es separado si, y solo si, cada espacio E_i es separado.

b) Para cada $i\in I$, E_i es cerrado en $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Demostr.: a) Si $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es separado, entonces E_i es separado, $\forall i\in I$, pues la topología suma directa induce en cada E_i su topología original y todo subespacio de un espacio separado es separado.

Recíprocamente, si cada espacio E_i es separado, entonces el espacio producto $\prod_{i\in I} E_i$ es separado (Th. 5.2). Por tanto, $\bigoplus_{i\in I} E_i$ provisto de la topología producto es separado. Puesto que la topología suma directa es más fina que la topología producto en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ se verifica que $\bigoplus E_i$ es separado (dotado de la topología suma directa, por supuesto).

b) Puesto que cada E_i "es" un subespacio cerrado de $\prod_{i\in I} E_i$ (COROLARIO 5.9) y a fortiori, E_i es un subespacio cerrado para la topología suma directa que es más fina que la topología producto en $\bigoplus E_i$. csqd.

Se verifica que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es completo si, y solo si, cada E_i es completo. Para probarlo necesitamos el siguiente

6.4. LEMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos. Consideremos en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ la topología suma directa y la topología producto. Existe entonces una base de entornos de cero para la topología suma directa que son conjuntos cerrados para la topología producto en $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Demostr.: Para cada $i\in I$ sea $\mathcal{V}_i$ una base de entornos de cero absolutamente convexos de E_i. Si para cada $V_i\in\mathcal{V}_i$ identificamos $V_i = j_i(V_i)$ sabemos que una base de entornos de cero para la topología suma directa es la familia

$$\mathcal{V} = \{\Gamma(\bigcup_{i\in I} V_i) \,/\, V_i\in\mathcal{V}_i, \forall i\in I\}.$$

Denotamos por $\overline{\mathcal{V}}$ el conjunto de las clausuras respecto de la topología producto de los elementos de $\mathcal{V}$.

Veamos que $\overline{\mathcal{V}}$ es la base de entornos de cero buscada.

- Los elementos de $\overline{\mathcal{V}}$ son entornos de cero para la topología suma directa en $\bigoplus_{i\in I} E_i$, como superconjuntos de entornos de cero.
- Son cerrados para la topología producto, pues los elementos de $\overline{\mathcal{V}}$ se han definido como clausuras respecto de dicha topología.
- Probemos que $\overline{\mathcal{V}}$ es base de entornos de cero para la topología suma directa. Será suficiente probar que $\forall V\in \mathcal{V}$, $\overline{V}\subset 3V$, siendo $\overline{V}$ la clausura de V respecto de la topología producto.

Sean pues $V\in\mathcal{V}$ y $x\in \overline{V}\cap \bigoplus_{i\in I} E_i$, donde $V=\Gamma(\bigcup_{i\in I} V_i)$.
Existe entonces un conjunto finito J contenido en I tal que

$$\pi_i(x)=0\ ,\ \forall i\in I\setminus J.$$

Sea $n=\operatorname{card} J$. Consideremos el conjunto

$$W=n^{-1}\bigcap_{i\in J}\pi_i^{-1}(V\cap E_i)$$

Veamos que W es entorno de cero para la topología producto.
Puesto que $V=\Gamma(\bigcup_{i\in I} V_i)$ se verifica que $V\supset V_i$, $\forall i\in I$. Luego $V\cap E_i\supset V_i$, $\forall i\in I$, y en particular, para todo $i\in J$.
Luego $V\cap E_i$ es entorno de cero en E_i y, por tanto, $\pi_i^{-1}(V\cap E_i)$ es entorno de cero en $\prod_{i\in I} E_i$. Luego W es entorno de cero en $\prod_{i\in I} E_i$, como múltiplo escalar de una intersección finita de entornos de cero.
Puesto que $x\in\overline{V}$ se verifica que $(x+W)\cap V\neq\emptyset$.
Sea $y\in V$ tal que $y\in x+W$.
Entonces $y-x\in W$ y por tanto $\pi_i(y-x)\in n^{-1}V$, $\forall i\in J$.

Luego $\sum_{i\in J}\pi_i(y-x)\in\sum_{i\in J} n^{-1}V=V$, por ser V absolutamente convexo.

Veamos que también $\sum_{i\in I\setminus J}\pi_i(y-x)\in V$.

Puesto que $y\in V=\Gamma(\bigcup_{i\in I} V_i)$, y se puede expresar en la forma

$$y=\sum_{i\in I}\lambda_i y_i\ ,\quad \sum_{i\in I}|\lambda_i|\leq 1\ ,\ y_i\in V_i\subset V\cap E_i$$

donde los λ_i son nulos, salvo quizás un número finito de ellos.
Puesto que $\pi_i(x)=0$, $\forall i\in I\setminus J$, se verifica que

$$\sum_{i\in I\setminus J}\pi_i(y-x)=\sum_{i\in I\setminus J}\pi_i(y)=\sum_{i\in I\setminus J}\lambda_i y_i\in\sum_{i\in I\setminus J}\lambda_i V=\Big(\sum_{i\in I\setminus J}|\lambda_i|\Big)V\subset V$$

pues V es absolutamente convexo y $\sum_{i\in I\setminus J}|\lambda_i|\leq 1$

Por tanto, $\sum_{i\in J} \pi_i(y-x) \in V$ y $\sum_{i\in I\setminus J} \pi_i(y-x) \in V$.

Entonces $y-x = \sum_{i\in I} \pi_i(y-x) = \sum_{i\in J} \pi_i(y-x) + \sum_{i\in I\setminus J} \pi_i(y-x) \in V+V = 2V$.

Además $y \in V$.

Luego $y-x \in 2V$ e $y\in V$ y por tanto $x-y \in 2V$ e $y \in V$, por ser $2V$ equilibrado. Sumando resulta que $-x \in 3V$ y por tanto $x\in 3V$. En definitiva, $\overline{V} \subset 3V$ y $\overline{\mathcal{V}}$ es base de entornos de cero para la topología suma directa. csqd.

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente

6.5. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos separados y $\bigoplus_{i\in I} E_i$ el espacio suma directa dotado con la topología suma directa. Entonces

$\bigoplus_{i\in I} E_i$ es completo si, y solo si, E_i es completo, $\forall i \in I$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es completo, entonces cada E_i es completo como subespacio cerrado de $\bigoplus E_i$.

$\Leftarrow$] Supongamos que cada espacio E_i es completo.

Sea ξ la topología suma directa en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ y η la topolofía producto en $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ por ξ. Se trata de probar que $\mathcal{F}$ es convergente para dicha topología.

Siendo $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy por ξ tambien es filtro de Cauchy por η, pues $\eta \leq \xi$.

Puesto que los espacios E_i son completos, $\prod_{i\in I} E_i$ es completo (Th. 5.4.)

Existe entonces $x \in \prod_{i\in I} E_i$ tal que

$$\mathcal{F} \longrightarrow x$$

Nuestro problema se reduce entonces a probar

1) $x \in \bigoplus_{i\in I} E_i$.

2) $\mathcal{F} \longrightarrow x$ por ξ

Probemos estas proposiciones:

1) Sea $J = \{i \in I \,/\, \pi_i(x) \neq 0\}$.

Se trata de probar que J es finito. Razonaremos por reducción al absurdo suponiendo que J es infinito.

Por definición de J, para cada $i\in J$ existe un entorno de cero absolutamente convexo U_i en E_i tal que $\pi_i(x) \notin U_i$, por ser E_i separado

Sea $U' = \frac{1}{2} \bigcap_{i \in J} \pi_i^{-1}(U_i)$. Veamos que U es entorno de cero para la topología suma directa ξ, siendo $U = U' \cap \bigoplus_{i \in I} E_i$. (*)

U es absolutamente convexo, pues $\pi_i^{-1}(U_i)$ es absolutamente convexo para todo $i \in J$. Veamos que $j_K^{-1}(U)$ es entorno de cero en E_K, $\forall K \in I$ con lo cual U será entorno de cero por ξ (Th. 2.1), por ser ξ la topología límite inductivo de las de los espacios E_K por las inyecciones j_K.

Si $K \in J$, $j_K^{-1}(U) = \frac{1}{2} U_K$ y si $K \notin J$, $j_K^{-1}(U) = E_K$, pero en cualquier caso es entorno de cero en E_K. Luego U es entorno de cero por ξ.

Puesto que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy por ξ, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A - A \subset U$. Sea $y \in A$. Como $A \subset \bigoplus_{i \in I} E_i$, y tiene a lo sumo un número finito de coordenadas no nulas y puesto que suponemos que J es infinito se ha de verificar que existe $i \in J$ tal que

$$\pi_i(y) = 0.$$

Para este $i \in J$, $\frac{1}{2}\pi_i^{-1}(U_i)$ es entorno de cero en $\prod_{i \in I} E_i$.

Además, puesto que $\mathcal{F} \to x$ por η y $A \in \mathcal{F}$, se verifica que x es adherente a A respecto de η, es decir, $x \in \overline{A}^{(\eta)}$.

Por tanto $$\left(x + \frac{1}{2}\pi_i^{-1}(U_i)\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea $z \in \left(x + \frac{1}{2}\pi_i^{-1}(U_i)\right) \cap A$.

Entonces

$\left.\begin{array}{l} z \in A \\ y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow z - y \in A - A \subset U \Rightarrow \pi_i(z-y) \in \frac{1}{2} U_i$

$z \in x + \frac{1}{2}\pi_i^{-1}(U_i) \Rightarrow x - z \in \frac{1}{2}\pi_i^{-1}(U_i) \Rightarrow \pi_i(x-z) \in \frac{1}{2} U_i$

Además $\pi_i(y) = 0$.

Entonces, puesto que $x = y + (x-z) + (z-y)$ se verifica que

$$\pi_i(x) = \pi_i(y) + \pi_i(x-z) + \pi_i(z-y) \in \frac{1}{2} U_i + \frac{1}{2} U_i = U_i$$

en contra de que $\pi_i(x) \notin U_i$, $\forall i \in J$.

Luego J no puede ser infinito y, por tanto, $x \in \bigoplus_{i \in I} E_i$.

2) En virtud de LEMA 6.4., existe en $\bigoplus_{i \in I} E_i$ una base $\mathcal{V}$ de entornos de cero por ξ, que podemos elegir absolutamente convexos, formada por conjuntos cerrados para la topología η.

Se trata de probar que $\forall V \in \mathcal{V}$, $x + V \in \mathcal{F}$, con lo cual $\mathcal{F}$ convergerá a x por ξ.

Puesto que $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en $\bigoplus E_i$ por ξ, dado el ξ-entorno de cero $\frac{1}{2}V$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A - A \subset \frac{1}{2}V$.

Sea z un punto de A. Entonces $A - z \subset \frac{1}{2}V$ y, por tanto, $A \subset z + \frac{1}{2}V$

Como $\mathcal{F} \longrightarrow x$ por η, x es adherente respecto de η a todos los elementos de $\mathcal{F}$. En particular $x \in \overline{A}^{(\eta)}$

Como $A \subset z + \frac{1}{2}V$ se verifica que $\overline{A}^{(\eta)} \subset z + \frac{1}{2}V$, pues V es cerrado por η. Luego $x \in z + \frac{1}{2}V$.

Puesto que $\frac{1}{2}V$ es equilibrado, $z \in x + \frac{1}{2}V$.

Como $A \subset z + \frac{1}{2}V$ se verificará que

$$A \subset x + \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = x + V$$

y por tanto $x + V \in \mathcal{F}$, pues $A \in \mathcal{F}$.

En definitiva, $\mathcal{F} \longrightarrow x$ por ξ. csqd.

6.6. TEOREMA: Sea $\bigoplus_{i \in I} E_i$ el espacio suma directa de los espacios localmente convexos E_i, $i \in I$. Entonces un conjunto $A \subset \bigoplus_{i \in I} E_i$ es acotado (resp. precompacto) si, y solo si, está contenido en una suma finita de conjuntos acotados (resp. precompactos) en los E_i correspondientes.

Demostr.: $\Leftarrow$| Supongamos que existen índices $i_1, \dots, i_k \in I$ y conjuntos B_{i_k}, $k = 1, \dots, n$, acotados (resp. precompactos) en E_{i_k}, $k = 1, \dots, n$, tal que $A \subset \bigoplus_{k=1}^{n} B_{i_k}$. (*)

Veamos que A es acotado (resp. precompacto).

Puesto que toda suma finita de acotados (precompactos) es acotada (precompacta) se verifica que $\bigoplus_{k=1}^{n} B_{i_k}$ es acotado (precompacto) y, por tanto, A es acotado (precompacto).

$\Rightarrow$| Sea A un conjunto acotado en $\bigoplus_{i \in I} E_i$ (resp. precompacto)

Consideremos las proyecciones

$$\pi_i : \bigoplus_{i \in I} E_i \longrightarrow E_i$$

Puesto que π_i es lineal y continua, $\pi_i(A)$ es acotado (precpto) en E_i.

Obviamente, $A \subset \prod_{i \in I} (\pi_i(A))$

Si probamos que $\pi_i(A) = \{0\}$ salvo para un número finito de índices $i_1, \dots, i_n \in I$, quedará visto que $A \subset \bigoplus_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(A)$, y el teorema quedará probado.

Supongamos que existe una infinidad de factores $\pi_i(A)$ no nulos.

En particular podremos elegir una sucesión $\{\varphi(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en I tal que
$$\Pi_{\varphi(n)}(A) \subset E_{\varphi(n)}, \forall n\in\mathbb{N} \quad y \quad \Pi_{\varphi(n)}(A) \neq \{0\}, \forall n.$$
Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $x_{\varphi(n)} \in \Pi_{\varphi(n)}(A)\setminus\{0\}$.
Por ser los espacios E_i separados (*)
$\exists U_{\varphi(n)}$ entorno de cero en $E_{\varphi(n)}$ tal que $x_{\varphi(n)} \notin n\, U_{\varphi(n)}, \forall n\in\mathbb{N}$.
Si $i\in I\setminus\varphi(\mathbb{N})$, definimos $U_i = E_i$.

Sea $U = \Gamma\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$. Entonces U es entorno de cero en $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Se verifica además que $\pi_i(U)\subset U_i$, $\forall i\in I$, pues si $x\in U$, es un elemento de la forma $x=\sum \lambda_i x_i$ donde casi todos los λ_i son nulos y $\sum|\lambda_i|\leq 1$, y $x_i\in U_i$, $\forall i\in I$; luego $\pi_i(x)=\lambda_i x_i \in \lambda_i U_i \subset U_i$ pues $|\lambda_i|\leq 1$ y los U_i los podemos elegir equilibrados.

Puesto que A es acotado o precompacto, es en cualquier caso, acotado en $\bigoplus_{i\in I} E_i$. Si probamos que A no es absorbido por U habremos llegado a un absurdo, con lo cual quedará probada la existencia de $\{i_1,\dots,i_n\}\subset I$ tal que $A\subset\bigoplus_{k=1}^{n}\Pi_{i_k}(A)$.

Pero A no es absorbido por U, pues $A\not\subset nU$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ya que $x_{\varphi(n)}\in\Pi_{\varphi(n)}(A)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ y $x_{\varphi(n)}\notin n\,U_{\varphi(n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. c.s.q.d.

Un resultado totalmente análogo se verifica para los conjuntos compactos.

67. TEOREMA: Un conjunto cerrado A en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ es compacto si, y solo si, está contenido en una suma finita de conjuntos compactos en los E_i.

Demostr.: $\Leftarrow$] Si existen $i_1,\dots,i_n\in I$ y conjuntos compactos $B_{i_1},\dots,B_{i_n}$ tales que $A\subset\bigoplus_{k=1}^{n} B_{i_k}$, puesto que toda suma finita de compactos es compacto y A es cerrado se verifica que A es compacto.
$\Rightarrow$] Si A es compacto en $\bigoplus_{i\in I} E_i$, como $\pi_i:\bigoplus_{i\in I} E_i\to E_i$ es continua, se verifica que $\pi_i(A)$ es compacto, $\forall i\in I$.
Evidentemente, $A\subset\prod_{i\in I}(\pi_i(A))$
Del mismo modo que en el teorema anterior se prueba que todos los factores, salvo un número finito, son iguales a $\{0\}$.
Por tanto, $\exists\{i_1,\dots,i_n\}\subset I$ / $A\subset\bigoplus_{k=1}^{n}\pi_{i_k}(A)$. c.s.q.d.

OBSERVACION: Nótese como mientras los entornos $\prod_{i\in I} U_i$ en $\prod_{i\in I} E_i$ solo tienen un número finito de factores distinto de E_i y $\prod_{i\in I} B_i$ es compacto (acotado o precompacto) si lo son todos los B_i, en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ los entornos $\Gamma\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right)$ verifican que todos los U_i son entornos y un conjunto $\overset{\text{cerrado}}{A} \subset \bigoplus_{i\in I} E_i$ es compacto (precompacto, acotado) si y sólo si está contenido en una suma finita de compactos (precompactos, acotados).

Veamos ahora como son los duales del espacio suma directa y el espacio producto.

6.8. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos y $\bigoplus_{i\in I} E_i$ su suma directa. Entonces

$$\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)' \approx \prod_{i\in I} E_i'$$

es decir, existe una biyección lineal entre $\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)'$ y $\prod_{i\in I} E_i'$.

Además si en cada espacio E_i tenemos una familia $\mathcal{A}_i$ de conjuntos acotados satisfaciendo las condiciones B.1) - B.4) y dotamos a E_i' de la topología de la $\mathcal{A}_i$-convergencia, entonces la topología producto en $\prod_{i\in I} E_i'$ coincide con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, donde $\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i$. (*)

Demostr.: Consideremos la aplicación

$$\varphi : x' \in \left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)' \longmapsto \varphi(x') = X' = (x' \circ j_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i'.$$

Puesto que $j_i : E_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i$ y $x' : \bigoplus_{i\in I} E_i \longrightarrow \mathbb{K}$, podemos decir que cada componente $x' \circ j_i$ de $\varphi(x')$ es la restricción de x' a E_i.

Trivialmente φ está bien definida, pues $x' \circ j_i \in E_i'$, $\forall i \in I$.

Se comprueba también que φ es lineal.

Probemos que φ es biyectiva:

- φ es inyectiva, pues si $\varphi(x') = 0$ entonces $x'|_{E_i} = 0$, $\forall i \in I$ y, por tanto, $x' = 0$.
- φ es supreyectiva: Sea $(y_i')_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i'$. Construyamos una forma lineal y' en $\bigoplus_{i\in I} E_i$ tal que $\varphi(y') = (y_i')_{i\in I}$. Para cada $\sum_{i\in I} x_i \in \bigoplus_{i\in I} E_i$, definimos $y'\left(\sum_{i\in I} x_i\right) = \sum_{i\in I} y_i'(x_i)$. (*)

Se comprueba fácilmente que y' pertenece, en efecto, a $\left(\bigoplus_{i\in I} E_i\right)'$

Probemos ya que $\varphi(y') = (y_i')_{i\in I}$:

$\forall i \in I$, $(y' \circ j_i)(x_i) = y'((z_j)_{j\in I})$ donde $z_j = 0$ si $j \neq i$ y $z_i = x_i$.

Por definición de y' se verifica que $y'((z_j)_{j\in I}) = \sum_{j\in I} y_j'(z_j) = y_i'(x_i)$.

Luego φ es una aplicación lineal biyectiva.

Veamos ahora que la topología producto en $\prod_{i\in I} E'_i$ coincide con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, si es que cada E'_i está provisto de la topología de la $\mathcal{A}_i$-convergencia.

Probaremos que se verifican todas las hipótesis del teorema 4.5, con lo cual acabará la demostración.

En $\bigoplus_{i\in I} E_i$ tenemos definida la topología límite inductivo de las de los espacios E_i por las inmersiones $j_i : E_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i$, por definición de topología suma directa. Además la traspuesta de j_i es

$$j'_i : (\bigoplus_{i\in I} E_i)' \longrightarrow E'_i$$

pues siendo j_i continua, $j'_i((\bigoplus_{i\in I} E_i)') \subset E'_i$.

Acabamos de probar que $(\bigoplus_{i\in I} E_i)'$ es algebraicamente isomorfo a $\prod_{i\in I} E'_i$.

Identificando ambos espacios podemos escribir que

$$j'_i : \prod_{i\in I} E'_i \longrightarrow E'_i$$

Veamos que $j'_i = \pi_i$

Estamos identificando cada $x' \in (\bigoplus_{i\in I} E_i)'$ con $X' = (x' \circ j_i)_{i\in I}$

Luego $\pi_i(x') = \pi_i(X') = x'_i$, donde $x'_i = x' \circ j_i$.

Por otra parte, veamos quien es $j'_i(x')$:

Si $x_i \in E_i$, $< j'_i(x'), x_i > = < x', j_i(x_i) > = (x' \circ j_i)(x_i)$.

Luego $j'_i(x') = x' \circ j_i = x'_i$.

Por tanto, $j'_i = \pi_i$.

Por teorema 4.5, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia coincide con la topología límite projectivo de las topologías de los E'_i por las aplicaciones $j'_i : \prod_{i\in I} E'_i \to E_i$, que como hemos visto coincide con π_i.

Luego dicha topología límite projectivo es la topología producto en $\prod_{i\in I} E'_i$. csqd.

Se verifica también

6.9. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos. Entonces

$$\left(\prod_{i\in I} E_i\right)' \approx \bigoplus_{i\in I} E'_i$$

Además, si cada espacio E'_i va provisto de la topología de la $\mathcal{A}_i$-convergencia, entonces la topología suma directa en $\bigoplus_{i\in I} E'_i$ es la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, donde

$$\mathcal{A} = \{ \prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} E_i \;/\; A_i \in \mathcal{A}_i \}. \quad (*)$$

Demostr.: Sea $x' \in (\prod_{i\in I} E_i)'$. Puesto que x' es una forma lineal continua en el producto $\prod_{i\in I} E_i$, está acotada en un entorno de cero, que podemos elegir de la forma $U = \prod_{i\in I} U_i$, donde $U_i = E_i$ para casi todos los índices salvo quizás para un conjunto finito J de ellos, para los cuales U_i es entorno de cero en E_i.

Veamos que x' se anula sobre los factores de U correspondientes a índices $i \in I \setminus J$.

Sea $i \in I\setminus J$ y $x_i \in U_i = E_i$. Supongamos que fuese $x'(x_i) \neq 0$. Entonces $|x'(nx_i)| \longrightarrow \infty$ si $n \longrightarrow \infty$. Como $nx_i \in U_i = E_i$, $\forall n \in \mathbb{N}$ llegamos así a un absurdo con que x' está acotada sobre U.

Por tanto, si $x' \in (\prod_{i\in I} E_i)'$ y hacemos $x'_i = x'|_{E_i}$ se verifica que $x'_i = 0$ salvo, quizás, para un número finito de índices.

Es correcta entonces la definición de la aplicación

$$\Psi : x' \in (\prod_{i\in I} E_i)' \longmapsto \Psi(x') = \sum_{i\in I} x'_i \in \bigoplus_{i\in I} E'_i .$$

Es trivial que Ψ es lineal y biyectiva.

Luego $(\prod_{i\in I} E_i)' \approx \bigoplus_{i\in I} E'_i$.

Probemos ahora la segunda parte del teorema. Suponemos que para cada $i \in I$, $\mathcal{A}_i$ es una familia de acotados en E_i satisfaciendo B.1) – B.4). Se trata de probar que la topología suma directa en $E' = \bigoplus_{i\in I} E'_i$ coincide con la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, donde

$$\mathcal{A} = \{ \prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} E_i \,/\, A_i \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I \}.$$

Una base de 0-entornos para la topología suma directa está formada por las envolventes absolutamente convexas de uniones de entornos de cero en los E'_i (con la topología de la $\mathcal{A}_i$-convergencia), es decir, por conjuntos del tipo

$$\Gamma\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ\right), \quad A_i \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I$$

donde A_i° es la polar de A_i respecto de (E_i, E'_i).

Una base de 0-entornos para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' está formada por conjuntos del tipo

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ, \quad A_i \in \mathcal{A}_i, \forall i \in I.$$

Para probar que ambas topologías coinciden es suficiente ver que

$$\Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ) \subset (\prod_{i\in I} A_i)^\circ \subset 2\Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ).$$

- $\Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ) \subset (\prod_{i\in I} A_i)^\circ$: Sea $x' = \sum_{i\in I} \lambda_i x'_i \in \Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ) \subset \bigoplus_{i\in I} E'_i$, donde los λ_i son casi todos nulos y $\sum_{i\in I} |\lambda_i| \leq 1$, y $x'_i \in A_i^\circ$, $\forall i \in I$.

Veamos que $x' \in (\prod_{i\in I} A_i)^\circ$, es decir que

$\forall x = (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $|\langle x, x'\rangle| \leq 1$. En efecto:

$$|\langle x, x'\rangle| = |\langle (x_i)_{i\in I}, \sum_{i\in I} \lambda_i x'_i\rangle| \leq \sum_{i\in I} |\lambda_i| \cdot |\langle (x_i)_{i\in I}, x'_i\rangle| =$$

$$= \sum_{i\in I} |\lambda_i| \cdot |\langle x_i, x'_i\rangle| \leq \sum_{i\in I} |\lambda_i| \leq 1$$, pues $x'_i \in A_i^\circ$ y $x_i \in A_i$, $\forall i \in I$.

- $(\prod_{i\in I} A_i)^\circ \subset 2\Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ)$: Sea $x' \in (\prod_{i\in I} A_i)^\circ \subset \bigoplus_{i\in I} E'_i$.

Puesto que $x' \in \bigoplus_{i\in I} E'_i$, se puede escribir, $x' = \sum_{i\in K} x'_i$, donde $x'_i \in E'_i$, y K es una parte finita de I.

Sea $J \subset K$ el conjunto de índices $i \in K$ para los cuales x'_i no sea anula sobre A_i, es decir, $(i \in J) \Leftrightarrow (i \in K \wedge \lambda_i = \sup_{x_i\in A_i} |\langle x_i, x'_i\rangle| > 0)$.

Observar que λ_i no puede ser infinito, por ser A_i acotado.

Sea $J' = K \setminus J$, es decir, el conjunto de índices $i \in K$ para los cuales x'_i se anula en A_i.

Entonces $x' - \sum_{i\in J} x'_i = \sum_{i\in J'} x'_i$. (I)

Sea $i \in J'$ y $x_i \in A_i$. Entonces

$|\langle x_i, \sum_{i\in J'} x'_i\rangle| = |\langle x_i, x'_i\rangle| = 0 \leq 1$, pues $i \in J'$, $x_i \in A_i$, $x'_i \in E'_i$.

Por tanto, $\sum_{i\in J'} x'_i \in A_i^\circ$.

Luego, por (I), $x' - \sum_{i\in J} x'_i \in A_i^\circ \subset \Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ)$ (II)

Veamos ahora que $\sum_{i\in J} x'_i \in \Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ)$, con lo cual, teniendo en cuenta (II), quedará probado que

$$x' \in 2\Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ). \quad \text{(III)}$$

Si $i \in J$, $\lambda_i = \sup_{x_i\in A_i} |\langle x_i, x'_i\rangle| > 0$, y por tanto

$$\sum_{i\in J} x'_i = \sum_{i\in J} \lambda_i \left(\frac{x'_i}{\lambda_i}\right) \in \sum_{i\in J} \lambda_i A_i^\circ.$$

Si probamos que $\sum_{i\in J} |\lambda_i| \leq 1$ quedaría probado que

$\sum_{i\in J} \lambda_i A_i^\circ \subset \Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ)$, y, por tanto, (III).

Puesto que $\lambda_i > 0$, se verifica que $|\lambda_i| = \lambda_i$. Entonces

$$\sum_{i\in J} |\lambda_i| = \sum_{i\in J} \lambda_i = \sum_{i\in J} \sup_{x_i\in A_i} |\langle x_i, x_i'\rangle| = \sup_{x_i\in A_i} \sum_{i\in J} |\langle x_i, x_i'\rangle| =$$

$$= \sup_{x=(x_i)\in A = \prod_{i\in I} A_i} |\langle x, \sum_{i\in J} x_i'\rangle| \overset{(1)}{=} \sup_{x\in A} |\langle x, \sum_{i\in K} x_i'\rangle| = \sup_{x\in A} |\langle x, x'\rangle| \overset{(2)}{\leq} 1$$

(1) es cierta pues en $J' = K \setminus J$ los x_i' se anulan sobre A_i.

(2) es cierta pues $x \in \prod_{i\in I} A_i = A$ y $x' \in A^\circ = (\prod_{i\in I} A_i)^\circ$, por hipótesis.

Luego $(\prod_{i\in I} A_i)^\circ \subset \Gamma(\bigcup_{i\in I} A_i^\circ)$, y el teorema queda probado ■

6.10. TEOREMA: Todo producto de espacios tonelados es un espacio tonelado.

Demostr.: Supongamos que E_i es un espacio tonelado, $\forall i \in I$.

Sea $E = \prod_{i\in I} E_i$. Su dual topológico es $E' = \bigoplus_{i\in I} E_i'$ (igualdad algebraica).

Dotemos a cada E_i' de la topología débil $\sigma(E_i', E_i)$.

Entonces $(E_i')' = E_i$. (I)

Dotemos a $E' = \bigoplus_{i\in I} E_i'$ de la topología $\mathcal{T}$ suma directa de las topologías débiles $\sigma(E_i', E_i)$.

Veamos que $\mathcal{T}$ es compatible con la paridad $(\prod_{i\in I} E_i, \bigoplus_{i\in I} E_i')$.

En efecto, pues por teorema 6.8

$$(\bigoplus_{i\in I} E_i')' = \prod_{i\in I} E_i'' \overset{(I)}{=} \prod_{i\in I} E_i = E.$$

Se trata de probar que E es tonelado, o bien, que todo conjunto A' débilmente acotado en E' ($\sigma(E',E)$-acotado) es equicontinuo.

Puesto que las topologías $\sigma(E',E)$ y $\mathcal{T}$ son compatibles con la paridad (E,E'), presentan los mismos acotados.

Luego A' es $\mathcal{T}$-acotado en $E' = \bigoplus_{i\in I} E_i'$.

Por TEOREMA 6.6., siendo A' acotado para la topología suma directa en E' existe $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$ y $B_{i_1}, \dots, B_{i_n}$ acotados, resp., en $E_{i_1}', \dots, E_{i_n}'$ tales que

$$A' \subset \bigoplus_{k=1}^{n} B_{i_k}.$$

Luego B_{i_k} es débilmente acotado en E_{i_k}' y por tanto, equicontinuo, pues E_{i_k} es tonelado.

Si probásemos que toda suma finita de conjuntos equicontinuos es equicontinuo, quedaría probado que A' es equicontinuo.

Probaremos este resultado de una forma general en la siguiente proposición ■

6.11. PROPOSICION: Sea E un espacio localmente convexo y B y C equicontinuos en E'. Entonces $B+C$ es equicontinuo.

Demostr.: Siendo B y C equicontinuos existen entornos de cero U y V en E tales que $B\subset U^\circ$ y $C\subset V^\circ$.
Entonces $W = (U\cap V)$ es entorno de cero.

Se verifica que $U \supset U\cap V = W \Rightarrow W^\circ \supset U^\circ$
Análogamente $W^\circ \supset V^\circ$. Por tanto
$W^\circ \supset B$ y $W^\circ \supset C$.
Luego $2W^\circ \supset B+C$
ó bien $\left(\frac{1}{2}W\right)^\circ \supset B+C$.

Puesto que $\frac{1}{2}W$ es entorno de cero en E queda visto que $B+C$ es equicontinuo. csqd.

De la misma forma que en el TEOREMA 5.6 probamos que los "únicos" límites proyectivos son subespacios de productos, podemos decir que los únicos límites inductivos son espacios cocientes de sumas directas.

6.12. TEOREMA: Sea $\{E_i\}_{i\in I}$ una familia de espacios localmente convexos, E un espacio vectorial y para cada $i\in I$, $v_i: E_i \longrightarrow E$ una aplicación lineal. Dotemos a E de la topología límite inductivo correspondiente. Entonces E es isomorfo (topológicamente) a un cociente de la suma directa $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

Demostr.: Consideremos la aplicación

$$u: \bigoplus_{i\in I} E_i \longrightarrow E$$
$$x = \sum_{i\in I} x_i \longmapsto u(x) = \sum_{i\in I} v_i(x_i)$$

u está bien definida pues las sumas son finitas.
Además es suprayectiva pues, siendo $E = \varinjlim E_i$, se verifica que $E = \langle \bigcup_{i\in I} v_i(E_i)\rangle$.
Veamos que u es continua.
Puesto que $\bigoplus_{i\in I} E_i$ está provisto de la topología límite inductivo de las topologías de los E_i por las aplicaciones $j_i: E_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i$, basta probar que $u\circ j_i$ es continua, $\forall i\in I$, lo cual es trivial, pues

$$u\circ j_i = v_i, \ \forall i\in I.$$

Consideremos el espacio cociente $\bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u)$ y sea

$$K: \bigoplus_{i\in I} E_i \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u)$$

la aplicación canónica.

Sea $v : \bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u) \longrightarrow E$ la aplicación asociada a u, es decir, tal que $u = v \circ K$. La aplicación v es lineal, pues lo es u.

- La aplicación v es supravectiva por serlo u.
- v es inyectiva: Sea $x + Ker(u) \in \bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u)$ tal que $v(x + Ker(u)) = 0$. Entonces, $u(x) = 0$ y, por tanto, $x \in Ker(u)$, que prueba que $x + Ker(u) = 0$.
- v es continua: Para ver que v es continua, puesto que en $\bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u)$ tenemos definida la topología límite inductivo de la de $\bigoplus_{i\in I} E_i$ por K, basta ver que $v \circ K$ es continua, que lo es pues $v \circ K = u$.
- v^{-1} es continua: $v^{-1} : E \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u)$.
  Como $E = \varinjlim E_i$ por las aplicaciones $v_i : E_i \to E$ tenemos que v^{-1} es continua si, y solo si, lo son las aplicaciones $v^{-1} \circ v_i : E_i \to \bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u)$. Trivialmente, $v^{-1} \circ v_i = K \circ j_i, \forall i \in I$, que es continua. Luego v^{-1} es continua.

Por tanto, $v : \bigoplus_{i\in I} E_i / Ker(u) \longrightarrow E$ es un isomorfismo topológico. c.s.q.d.

7. Espacios suplementarios.

A) Sea E un espacio vectorial y M y N dos subespacios de E. Diremos que E es suma directa de M y N y lo representaremos por $E = M \oplus N$, si todo vector $x \in E$ puede escribirse de forma única como suma de un elemento de M y otro de N.

Que $E = M \oplus N$ equivale a que $E = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$.
La suma directa que acabamos de definir se llamará algebraica, cuando se quiera distinguir del concepto de espacio suma directa definido en el apartado anterior.

Supuesto que $E = M \oplus N$, para cada $x \in E$ existen $y_x \in M$ y $z_x \in N$, y son únicos, tales que $x = y_x + z_x$.

Podemos definir entonces dos aplicaciones, que obviamente son lineales,

$$p_M : x \in E \longmapsto y_x \in E$$

$$p_N : x \in E \longmapsto z_x \in E$$

Fácilmente se comprueba que

- $p_M + p_N = I_E$ (identidad en E)
- $p_M(E) = Ker(p_N) = M$.
- $p_N(E) = Ker(p_M) = N$

Consideremos los espacios vectoriales cocientes

$$E/_{Ker(p_M)} = E/N \quad \text{y} \quad E/_{Ker(p_N)} = E/M$$

y las aplicaciones cociente

$$K_M : x+N \in E/N \longmapsto K_M(x+N) = p_M(x) \in M$$

$$\text{y} \quad K_N : x+M \in E/M \longmapsto K_N(x+M) = p_N(x) \in N$$

Puesto que $p_M(E) = M$ y $p_N(E) = N$ se verifica que K_M y K_n son aplicaciones lineales biyectivas.

Luego $M \oplus N/_M = E/M$ es isomorfo algebraicamente a N.

Analogamente $M \oplus N/_N$ es isomorfo a M.

DEFINICION: (Proyector)

Sea E un espacio vectorial. Una aplicación lineal $p: E \to E$ se dice que es un proyector si $p^2 = p$, es decir, si $p \circ p = p$.

Evidentemente, si $E = M \oplus N$, las aplicaciones lineales p_M y p_N definidas anteriormente son proyectores.

B) Sea E un espacio localmente convexo y M y N subespacios vectoriales de E tales que $E = M \underset{a}{\oplus} N$ (suma directa algebraica). Supongamos que M y N van provistos de la topología inducida. Pondremos $M \underset{t}{\oplus} N$ cuando queramos significar que $M \oplus N$ va provisto de la topología suma directa de las topologías inducidas.

Cabe preguntarse si la topología de E coincide con la topología suma directa en $M \oplus N$. Cuando esto ocurra diremos que "E es la suma directa topológica de M y N".

El siguiente teorema responde a esta cuestión.

7.1. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M y N dos subespacios de E tales que $E = M \underset{a}{\oplus} N$. Las proposiciones siguientes son equivalentes

a) $E = M \underset{t}{\oplus} N$

b) $p_M : E \longrightarrow E$ es continua.

c) $p_N : E \longrightarrow E$ es continua.

d) $K_M : E/N \longrightarrow M$ es un isomorfismo.

e) $K_N : E/M \longrightarrow N$ es un isomorfismo.

Demostr.: Puesto que $p_M + p_N = I_E$ (identidad en E) es trivial que las proposiciones b) y c) son equivalentes.

a) $\Leftrightarrow$ b) | a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que $E = M \oplus_t N$, es decir, que la topología de E coincide con la topología suma directa en $M \oplus N$ (que coincide con la topología producto de las topologías en M y N, inducidas por la de E).

Como $p_M : M \oplus_t N \longrightarrow M$ no es más que la aplicación proyección sobre M queda visto que $p_M : E \to M$ es continua.

b) $\Rightarrow$ a) Supongamos que $p_M : E \longrightarrow M$ es continua. Como b) $\Leftrightarrow$ c) se verifica que $p_N : E \longrightarrow N$ es continua.

Consideremos la identidad $I : E \longrightarrow M \oplus N$.

I es continua si, y solo si, $p_M \circ I$ y $p_N \circ I$ son continuas, donde ahora p_M y p_N son las proyecciones de $M \oplus_t N$ sobre M y N.

Pero $p_M \circ I$ es la aplicacion $p_M : E \to M$ que por hipótesis es continua. Ademas $p_N \circ I$ es $p_N : E \to N$ que tambien es continua.

Luego $I : E \longrightarrow M \oplus_t N$ es continua.

Veamos que $I^{-1} : M \oplus_t N \longrightarrow E$ tambien es continua.

En efecto; se verifica que la topología suma directa en $M \oplus N$ "coincide" con la topología producto en $M \times N$ de las topologías que E induce en M y N. Por otra parte, la inmersión

$$\begin{aligned} i : M \times N &\longrightarrow E \times E \\ (y, z) &\longmapsto (y, z) \end{aligned}$$

es continua. La suma, $(y,z) \in E \times E \longmapsto y+z \in E$ tambien es continua. Luego, la aplicación $(y,z) \in M \times N \longmapsto y+z \in E$ es continua y, por tanto, I^{-1} es continua.

Por tanto, $E = M \oplus_t N$.

b) $\Leftrightarrow$ d) | Probemos que la aplicación $K_M^{-1} : M \longrightarrow E/N$ es continua siempre, con lo cual solo faltará probar que K_M es continua si, y solo si, p_M es continua.

Consideremos la inmersión canónica
$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow E \\ y &\longmapsto \varphi(y) = y \end{aligned}$$
y la suprayección canónica
$$\begin{aligned} K : E &\longrightarrow E/N \\ y &\longmapsto y+N \end{aligned}$$

Es obvio que $K_M^{-1} = K \circ \varphi$ y, por tanto, K_M^{-1} es continua, pues φ y K lo son.

Probemos que p_M es continua si, y solo si, lo es K_M

Que $p_M : E \to E$ sea continua significa que para todo U entorno de cero en E, $p_M^{-1}(U)$ sea entorno de cero en E.
Puesto que $p_M(E) = M$ y $E = M \oplus N$ se verifica que
$$p_M^{-1}(U) = (U \cap M) + N.$$

Que $K_M : E/N \to M$ sea continua significa que para todo entorno de cero en M, que es de la forma $U \cap M$ con U entorno de cero en E, se verifique que $K_M^{-1}(U \cap M)$ sea entorno de cero en E/N.
Pero $K_M^{-1}(U \cap M)$ es entorno de cero en E/N si, y solo si, su saturado $(U \cap M) + N$ es entorno de cero en E.
Luego p_M es continua sii K_M es continua.
En definitiva, p_M es continua si, y solo si, K_M es un isomorfismo topológico.
c) $\Leftrightarrow$ e) es totalmente análogo. csqd.

Veamos un caso particular en el que se verifica a).

7.2. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M y N subespacios suyos tales que $E = M \underset{a}{\oplus} N$. Si M es un subespacio cerrado de E y N es de dimensión finita entonces
$$E = M \underset{t}{\oplus} N$$

Demostr.: 1ª demostr.: Veamos que se satisface la proposición e) del teorema anterior.
Siendo M cerrado, el espacio cociente E/M es separado.
La aplicación $K_N : E/M \to N$ es biyectiva, y K_N^{-1} es continua (se probó anteriormente).
Entonces $\dim(E/M) = \dim(N)$ y, por tanto, siendo E/M separado y de dimensión finita (pues N lo es), toda aplicación lineal de E/M en N es continua. Luego K_N también es continua.
Luego K_N es un isomorfismo y, por tanto, $E = M \underset{t}{\oplus} N$.
2ª demostr.: Mediante la biyección $K_N : E/M \to N$ podemos "transportar" la topología de N a E/M. Tenemos entonces en E/M dos topologías localmente convexas y separadas que deben coincidir, por ser E/M de dimensión finita.
Por tanto, K_N es un isomorfismo. csqd.

DEFINICIONES: (Suplementos algebraico y topológico de un subespacio).

a) Sea E un espacio vectorial y M un subespacio de E. Se dice que un subespacio N de E es suplemento algebraico de M si $E = M \oplus_a N$.

b) Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E. Se dice que un subespacio N de E es suplemento topológico de M si $E = M \oplus_t N$.

DEFINICION: (Proyector sobre un subespacio).

Sea E un espacio vectorial. Una aplicación lineal $p: E \to E$ se dice que es un proyector sobre el subespacio M si se verifican

i) $p(E) = M$.

ii) $p^2 = p$.

De i) e ii) se deduce que si $E = M \oplus_a N$ y p es un proyector sobre M, entonces $Ker(p) = N$.

Veamos una condición necesaria y suficiente para que un subespacio tenga suplemento topológico. (*)

7.3. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E. Entonces M tiene suplemento topológico si, y solo si, existe en E un proyector continuo sobre M.

Demostr.: $\Rightarrow$] Supongamos que existe un subespacio N de E tal que $E = M \oplus_t N$.

Consideremos la aplicación lineal

$$p: x = y_x + z_x \in E = M \oplus N \longmapsto p(x) = y_x \in M.$$

Es obvio que p es un proyector sobre M.

Además es continuo, pues $E = M \oplus_t N$ (Th. 7.1).

$\Leftarrow$] Supongamos que p es un proyector continuo sobre M.

Si hacemos $N = Ker(p)$ se verifica que

$$E = M \oplus_a N.$$

Puesto que p es continuo, $E = M \oplus_t N$ (Th. 7.1). c.s.q.d.

Probaremos en el siguiente teorema que todo subespacio de dimensión finita admite suplemento topológico.

7.4. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de dimensión finita. Entonces M admite suplemento topológico.

Demostr.: Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ una base de M. Existen entonces $f_1,\dots,f_n$ formas lineales continuas en E tales que

$$f_i(e_j) = \delta_{ij}, \quad i,j\in\{1,\dots,n\}.$$

Probaremos que existe un proyector continuo sobre M, con lo cual M admitirá suplemento topológico, por el teorema anterior.
En efecto: consideremos la aplicación lineal

$$p : x\in E \longmapsto p(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, e_i \in E$$

Se verifica

1) $p(E)=M$, pues siendo $f_i \neq 0$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, se verifica que $f_i(E)=\mathbb{K}$ y, por tanto, $p(E) = \langle e_1,\dots,e_n\rangle = M$.

2) $p^2 = p$, pues

$$p(p(x)) = p\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, p(e_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\Big(\sum_{j=1}^{n} f_j(e_i)e_j\Big) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\cdot e_i = p(x)$$

3) p es continuo, pues lo son las aplicaciones f_i. c.s.q.d.

Si damos la siguiente

DEFINICION: La codimensión de un subespacio vectorial M de un espacio vectorial E se define por

$$\operatorname{codim}(M) = \dim(E/M) = \dim(N) \quad (\text{si } E = M \oplus_a N).$$

podemos englobar los teoremas 7.2 y 7.4 en el siguiente

7.5. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y M un subespacio de E. Entonces M tiene suplemento topológico en los dos casos siguientes:
a) Si M es de dimensión finita.
b) Si M es cerrado y de codimensión finita.