TEMA 9: COMPLECION

1. DEFINICIONES. CARACTERIZACIONES DE LA COMPLECION.

DEFINICION: (Compleción de un espacio localmente convexo)
Sea E un espacio localmente convexo. Se llama una compleción de E a un espacio localmente convexo $\hat{E}$ que es completo y de forma que E es un subespacio denso de $\hat{E}$.

La forma de determinar la compleción de un espacio localmente convexo no es única, sin embargo todas dan como resultado un mismo espacio (salvo isomorfismos), y en este sentido podemos hablar de "la" compleción de E.

Resolveremos el problema de determinar la compleción en un caso algo más general que el planteado hasta ahora: estudiaremos la compleción de un par dual y como caso particular obtendremos la compleción de un espacio localmente convexo.

Sea pues (E,E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados satisfaciendo las ya conocidas propiedades de bornología

B.1) $\forall A,B\in\mathcal{A}, \exists C\in\mathcal{A} / A\cup B\subset C$.
B.2) $\forall A\in\mathcal{A}, \forall\lambda>0, \lambda A\in\mathcal{A}$.
B.3') $\langle \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A\rangle = E$
B.4) Los elementos de $\mathcal{A}$ son discos débilmente cerrados.

Consideremos entonces el conjunto

$$M' = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (E'+A^{\circ})$$

donde A° es la polar de A respecto de la paridad (E,E^*).
Por tanto $M'\subset E^*$.
Además $E'\subset M'$, pues $0\in A^{\circ}, \forall A\in\mathcal{A}$.
Es trivial comprobar que M' tiene estructura de espa-

cio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Consideramos en E la topología débil $\sigma(E,M')$, es decir, la topología generada por la familia de seminormas $\{|\langle\cdot,z'\rangle| \,/\, z'\in M'\}$ (considerando los elementos de M' como elementos de E^*) donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es la forma bilineal del par dual algebraico (E,E^*).

En las condiciones anteriores se verifica el siguiente

1.1. LEMA: Los elementos de la familia $\mathcal{A}$ son conjuntos $\sigma(E,M')$-acotados.

Demostr.: Se trata de probar que $\forall A\in\mathcal{A}, \forall z'\in M'$, $\langle A,z'\rangle$ es acotado en $\mathbb{K}$.

Dado $A\in\mathcal{A}$, se tiene que $M'\subset E'+A^\circ$

Si $z'\in M'$, entonces existen $x'\in E'$ e $y'\in A^\circ$ tal que $z'=x'+y'$.

Se tiene entonces que

$$|\langle A,z'\rangle| = |\langle A,x'+y'\rangle| \leq |\langle A,x'\rangle| + |\langle A,y'\rangle| \leq M+1$$

donde M es una cota de $|\langle A,x'\rangle|$ que existe por ser A $\sigma(E,E')$-acotado. ($|\langle A,y'\rangle|\leq 1$ pues $y'\in A^\circ$). csqd.

1.2. COROLARIO: La familia $\mathcal{A}$ de conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados define en M' una topología polar.

Demostr.: Basta observar que los elementos de $\mathcal{A}$ son conjuntos $\sigma(E,M')$-acotados, que definen en el par dual (E,M') la topología polar de la $\mathcal{A}$-convergencia. csqd.

1.3. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual, $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados en E y M' el conjunto definido anteriormente. Entonces, si E' va provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, la compleción de E' es M' provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

Demostr.: Tenemos que probar los siguientes puntos:

1) M' induce en E' su propia topología.
2) E' es denso en M'.
3) M' es completo.

Probémoslos.

1) La topología de E' tiene como base de entornos de cero las polares A° de los elementos $A \in \mathcal{A}$ respecto de la paridad (E,E'), y la topología de M' tiene como base de entornos de cero las polares $A^\bullet$ respecto de (E,M'). Pero se comprueba trivialmente que $A^\circ = A^\bullet \cap E'$. Luego M' induce en E' su propia topología.

2) E' es denso en M': Se trata de probar que todo entorno en M' corta a E'. Sea $z'+A^\bullet$ un entorno en M', donde $z' \in M'$ y $A \in \mathcal{A}$, y $A^\bullet$ es la polar de A respecto de (E,M').

Puesto que $M' = \bigcap_{B\in\mathcal{A}} (E'+B^\bullet)$, se verifica que $z' \in E'+A^\bullet$ y por tanto existe $x' \in E'$ tal que $z' \in x'+A^\bullet$, donde aquí $A^\bullet$ es la polar de A respecto de (E,E^*) (ver definición de M'). Puesto que $A^\bullet$ es equilibrado se verifica que $x' \in z'+A^\bullet$ y por tanto $x'-z' \in A^\bullet$. Como $x', z' \in M'$ se verifica que $x'-z' \in A^\bullet \cap M' = A^\bullet$ (*) y por tanto $x' \in (z'+A^\bullet)\cap E'$.

Luego $(z'+A^\bullet)\cap E' \neq \emptyset$ y por tanto E' es denso en M'.

3) Veamos que M' es completo.

Sea $\mathcal{F}'$ un filtro de Cauchy en M'. Puesto que la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en M' es más fina que la topología débil $\sigma(M',E)$ se verifica que $\mathcal{F}'$ es un filtro de Cauchy para $\sigma(M',E)$. Pero es trivial comprobar que $\sigma(M',E)$ es la topología que induce en M' la topología $\sigma(E^*,E)$. En consecuencia, $\mathcal{F}'$ es una base de filtro de Cauchy en $E^*-\sigma(E^*,E)$. Recordemos que E^* provisto de $\sigma(E^*,E)$ es completo. Luego existe un punto $x_0 \in E^*$ tal que $\mathcal{F}'$ converge a x_0 para la topología $\sigma(E^*,E)$.

Habríamos terminado si probamos que $x_0 \in M'$ y que $\mathcal{F}' \to x_0$ para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

– Veamos que $x_0 \in E'+A^\circ$, $\forall A \in \mathcal{A}$, con lo cual $x_0 \in M'$.

Dado $A \in \mathcal{A}$ consideremos el entorno de cero $(2A)^\bullet \cap M'$ en M'. Existe entonces $B' \in \mathcal{F}'$ tal que $B'-B' \subset (2A)^\bullet \cap M'$.

Si $z' \in B'$, entonces $B' \subset z'+[(2A)^\bullet \cap M']$ y puesto que $B' \subset M'$ se verifica que $B' \subset z'+(2A)^\bullet$. (*)

(*) Nótese que estamos denotando de la misma forma las polares de A respecto de (E,E^*) y respecto de (E,M'). P.ej. cuando escribimos $A^\bullet \cap M' = A^\bullet$, la primera $A^\bullet$ es respecto de (E,E^*) y la segunda respecto de (E,M').

Por tanto, $z' + (2A)^\circ \in \mathcal{F}'$.

Como $\mathcal{F}' \xrightarrow[\sigma(E^*,E)]{} x_0$, se verifica que x_0 es $\sigma(E^*,E)$-adherente a los elementos de $\mathcal{F}'$. En particular

$$x_0 \in \overline{z' + (2A)^\circ}^{\,\sigma(E^*,E)}$$

Pero $z' + (2A)^\circ$ es $\sigma(M',E)$-cerrado y, aun más, $\sigma(E^*,E)$-cerrado en E^*.

Luego $x_0 \in z' + (2A)^\circ$.

Como $z' \in B' \subset M'$ se verifica que $z' \in E' + (2A)^\circ$. Luego

$$x_0 \in E' + (2A)^\circ + (2A)^\circ = E' + A^\circ$$

y esto para cada $A \in \mathcal{A}$. Luego $x_0 \in M'$.

- Veamos por último que $\mathcal{F}' \to x_0$ para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, es decir, que $\forall A \in \mathcal{A}$, $x_0 + A^\circ \in \mathcal{F}'$.

 Dado $A \in \mathcal{A}$, existe $B' \in \mathcal{F}'$ tal que $B' - B' \subset A^\circ$

 Si $z' \in B'$, entonces $B' \subset z' + A^\circ$.

 Luego $z' + A^\circ \in \mathcal{F}'$ y puesto que $z' + A^\circ$ es $\sigma(E^*,E)$-cerrado se verifica que $x_0 \in z' + A^\circ$.

 Siendo A° equilibrado se verifica que $z' \in x_0 + A^\circ$ y esto para todo $z' \in B'$. Luego

$$B' \subset x_0 + A^\circ$$

 y por tanto $x_0 + A^\circ \in \mathcal{F}'$.

Luego $\mathcal{F}' \to x_0$ para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en M' y M' es completo. csqd.

<u>1.4. COROLARIO</u>: Si E' va provisto de la topología fuerte $\beta(E',E)$, entonces su compleción M' va provisto de la topología fuerte $\beta(M',E)$.

Demostr: Sea $\mathcal{A}$ la familia de los conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados de E. $\beta(E',E)$ es la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E'. Si probamos que $\mathcal{A}$ es la familia de los conjuntos $\sigma(E,M')$-acotados de E quedará visto en virtud del teorema anterior que M' (que va provisto de la $\mathcal{A}$-topología) va provisto de la topología fuerte $\beta(M',E)$. Por el LEMA 1.1. los elementos de $\mathcal{A}$ son conjuntos $\sigma(E,M')$-acotados. Además, puesto que $M' \supset E'$ se verifica que $\sigma(E,E') \preccurlyeq \sigma(E,M')$ y, por tanto, todo conjunto $\sigma(E,M')$-acotado es $\sigma(E,E')$-acotado. Luego $\mathcal{A}$ es la familia de los conjuntos $\sigma(E,M')$-acotados de E. csqd.

Vamos a dar otra expresión para la compleción de E'. Para ello necesitamos los lemas siguientes

1.5. LEMA: Sean E y F espacios localmente convexos y $f: E \to F$ una aplicación lineal. Sea A un disco en E, y f_0 la restricción de f a A. Entonces f_0 es continua si, y sólo si, es continua en 0.

Demostr.: Si f_0 es continua en A lo es en particular en $0 \in A$. Probemos ahora el recíproco.

Sea $a \in A$ y V un entorno de cero absolutamente convexo en F. Puesto que f_0 es continua en cero, existe un entorno de cero U en E, que podemos tomar equilibrado, de forma que

$$f_0(U \cap A) \subset \tfrac{1}{2} V.$$

Veamos que $f_0[(a+U) \cap A] \subset f_0(a) + V$, con lo cual quedará probado que f_0 es continua en a, pues $(a+U) \cap A$ es entorno de a en A.

Sea $x \in (a+U) \cap A$. Entonces $x - a \in U \cap (A - A)$. Siendo A disco, $A - A \subset 2A$ y puesto que U es equilibrado se tiene que $U \subset 2U$. Luego

$$x - a \in 2(U \cap A)$$

y por tanto $\frac{1}{2}(x-a) \in U \cap A$

Entonces, $\frac{1}{2} f_0(x-a) \in f_0(U \cap A) \subset \frac{1}{2} V$

o bien $f_0(x-a) \in V$.

Siendo f_0 lineal queda probado que $f_0(x) \in f_0(a) + V$. c.s.q.d.

1.6. LEMA: Sea U un entorno de cero absolutamente convexo y cerrado en E por una topología ξ compatible con una dualidad (E, E'). Sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos de E $\sigma(E,E')$-acotados satisfaciendo B.1) – B.3). Sea A un disco $\sigma(E,E')$-cerrado en $\mathcal{A}$. Entonces se satisfacen las inclusiones

$$(U \cap A)^\circ \subset U^\circ + A^\circ \subset 2(U \cap A)^\circ$$

donde las polares están referidas a la dualidad (E, E^*). (*)

Demostr.: Puesto que $U^\circ \subset (U \cap A)^\circ$ y $A^\circ \subset (U \cap A)^\circ$ se verifica que $U^\circ + A^\circ \subset (U \cap A)^\circ + (U \cap A)^\circ = 2(U \cap A)^\circ$, por ser $(U \cap A)^\circ$ un disco.

Veamos que $(U \cap A)^\circ \subset U^\circ + A^\circ$

(*) Observar que no se utiliza para nada que A sea débilmente acotado; no obstante, se lo hemos exigido para estar en las condiciones del teorema siguiente.

Denotaremos por E^*_σ el dual algebraico E^* provisto de la topología débil $\sigma(E^*,E)$.

$U°$ satisface lo siguiente.

- Es $\sigma(E^*,E)$-acotado (por ser U absorbente) y, por tanto, $\sigma(E^*,E)$-precompacto, pues los acotados y los precompactos son los mismos para la topología débil.
- Es $\sigma(E^*,E)$-cerrado y por tanto completo pues E^*_σ es completo.

Por tanto, $U°$ es un compacto en E^*_σ.

Además, $A°$ es un conjunto $\sigma(E^*,E)$-cerrado (es una polar).

Luego $U°+A°$ es un disco $\sigma(E^*,E)$-cerrado. (Th. 4.5 pg. 48)

Pero $U° \cup A° \subset U°+A°$ pues $0\in U°$ y $0 \in A°$

Luego $U°+A°$ es un disco $\sigma(E^*,E)$-cerrado que contiene a $U°\cup A°$. Por tanto

$$\overline{\Gamma(U°\cup A°)} \subset U°+A°$$

Pero por COROLARIO 5.6 (pg. 34) se verifica que

$$(U\cap A)° = \overline{\Gamma(U°\cup A°)}.$$

Queda así probado el lema. ■

<u>1.7. TEOREMA</u>: Sea (E,E') un par dual, ξ una topología en E compatible con la dualidad (E,E') y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos de E débilmente acotados satisfaciendo B.1) – B.4). Entonces si E' va provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, su compleción M' es el conjunto de formas lineales en E que son ξ-continuas sobre cada $A\in\mathcal{A}$, es decir

$$M' = \{f: E\to \mathbb{K} \text{ lineal } / f_{|A} \text{ es } \xi\text{-continua}, \forall A\in\mathcal{A}\}.$$

Demostr.: Sea $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos absolutamente convexos para ξ, que podemos elegir cerrados por ξ (y por tanto, cerrados para cualquier topología compatible).

Los elementos de $\mathcal{U}$ y de $\mathcal{A}$ son discos $\sigma(E,E')$-cerrados

Sabemos que $M' = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} (E'+A°)$

y que $E' = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U°$ (Th. 5.3. pg. 33).

Luego $(z'\in M') \Leftrightarrow (\forall A\in\mathcal{A}, \exists U\in\mathcal{U} / z'\in U°+A°)$ (I)

Denotemos por

$$X = \{f: E\to\mathbb{K} \text{ lineal } / f_{|A} \text{ es } \xi\text{-continua}, \forall A\in\mathcal{A}\}.$$

Queremos probar que $X = M'$.
Sea $z' \in X$ y probemos que $z' \in M'$, utilizando (I).
Sea $A \in \mathcal{A}$ y $z'_0 = z'|_A$.

Por hipótesis z'_0 es continua. Por tanto dado $\varepsilon = 1$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que
$$|z'_0(x)| \leq 1 \quad , \forall x \in U \cap A.$$
Luego $z' \in E^*$ verifica que $|z'(x)| \leq 1$, $\forall x \in U \cap A$, es decir $z' \in (U \cap A)^\circ$ y, por tanto, en virtud del lema anterior,
$$z' \in U^\circ + A^\circ$$
Por (I) queda visto que $z' \in M'$.
Recíprocamente, sea $z' \in M'$ y probemos que $z' \in X$.
Dado $A \in \mathcal{A}$, sea $z'_0 = z'|_A$. Para ver que z'_0 es continua basta ver que es continua en 0 (LEMA 1.5.). Probemos esto

Dado $\varepsilon > 0$, se verifica que $\frac{2}{\varepsilon} A \in \mathcal{A}$ pues $\mathcal{A}$ satisface B.2.).
Puesto que $z' \in M'$, se verifica en virtud de (I) que
$$\exists \tfrac{2}{\varepsilon} U \in \mathcal{U} \;/\; z' \in \left(\tfrac{2}{\varepsilon} U\right)^\circ + \left(\tfrac{2}{\varepsilon} A\right)^\circ =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2} U^\circ + \frac{\varepsilon}{2} A^\circ = \frac{\varepsilon}{2} (U^\circ + A^\circ) \subset \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2 (U \cap A)^\circ = \varepsilon (U \cap A)^\circ.$$
Luego $\forall x \in U \cap A$, $|z'(x)| \leq \varepsilon$, que prueba que z'_0 es continua en cero. csqd.

<u>OBSERVACION:</u> El teorema anterior solo ~~de~~ determina la compleción de E' como conjunto y no como espacio vectorial topológico.

<u>1.8. COROLARIO:</u> En las hipótesis del teorema, si cada forma lineal en E que es continua sobre cada $A \in \mathcal{A}$ es continua en E, entonces E' es completo para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia.

Demostr.: En los supuestos del corolario se verifica que $E' = X$ (conjunto definido en el teorema anterior) y, por tanto, $E' = M'$. Luego las topologías de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' y M' coinciden y por tanto $E'_{\mathcal{A}}$ es completo, pues M' provisto de la $\mathcal{A}$-topología es completo. csqd.

1.9. COROLARIO: Sea (E,E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados satisfaciendo B.1) − B.4). Entonces la familia

$$\{f: E \to \mathbb{K} \text{ lineal } / f|_A \text{ es } \xi\text{-continua}, \forall A \in \mathcal{A}\}$$

es invariante para las topologías ξ compatibles con (E,E').

D.: Basta observar que E' es el dual topológico de E_ξ cualquiera que sea la topología ξ compatible y, por tanto, puesto que $\mathcal{A}$ es fijo, $E'_{\mathcal{A}}$ es invariante cualquiera que sea ξ y por tanto, su compleción también permanece invariante. c.q.d.

1.10. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual, ξ una topología en E compatible con la dualidad y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados satisfaciendo B.1.) − B.4.). Sobre cada $A \in \mathcal{A}$ las topologías $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E,M')$ coinciden.

Demostr.: Puesto que $E' \subset M'$ se verifica que $\sigma(E,E') \leq \sigma(E,M')$ y, por tanto, sobre cada $A \in \mathcal{A}$, $\sigma(E,E')$ es menos fina que $\sigma(E,M')$. Probemos ahora que sobre cada $A \in \mathcal{A}$, $\sigma(E,E')$ es más fina que $\sigma(E,M')$.

Sea $A \in \mathcal{A}$. Probemos que si V es un $\sigma(E,M')$-entorno de cero en E, entonces para cada $a \in A$, $(a+V)\cap A$ es entorno de a en E para $\sigma(E,E')$, para lo cual basta probar que existe U entorno de cero en E por $\sigma(E,E')$ tal que

$$(a+U)\cap A \subset (a+V)\cap A.$$

Es suficiente probar esta condición para entornos V del tipo

$$V = \{x \in E / |\langle x, z'_i\rangle| \leq 1, \ i=1,\dots,n\}$$

donde $z'_1,\dots,z'_n \in M'$.

Por el corolario anterior (para $\xi = \sigma(E,E')$), se verifica que cada $z' \in M'$ es $\sigma(E,E')$-continuo en cada $A \in \mathcal{A}$.

En particular, para el A que hemos prefijado y para $z'_1,\dots,z'_n$ se verifica que $z'_i|A$ es continua para $\sigma(E,E')$, $i=1,\dots,n$.

Entonces, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\exists U_i$ $\sigma(E,E')$-entorno de cero / $|\langle x-a, z'_i\rangle| \leq 1$ si $x \in (a+U_i)\cap A$.

Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, que es $\sigma(E,E')$-entorno de cero.

Entonces

$$|\langle x-a, z'_i\rangle| \leq 1, \ \forall i \in \{1,\dots,n\}, \ \forall x \in (a+U)\cap A$$

Veamos ya que $(a+U)\cap A \subset (a+V)\cap A$.
Sea $x\in(a+U)\cap A$. Entonces $x\in A$ y $x-a\in U$.
Veamos que $x-a\in V$. En efecto, pues
$|\langle x-a, z'_i\rangle| \leq 1$, $i=1,\dots,n$ pues $x\in(a+U)\cap A$.
Luego $x\in(a+V)\cap A$. csqd.

1.11. TEOREMA: Si (E,E') es un par dual, la compleción de E' con la topología de Mackey $\tau(E',E)$ es M' con la topología de Mackey $\tau(M',E)$.

Demostr.: Sea $\mathcal{A}$ la familia de los discos $\sigma(E,E')$-compactos de E. La topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' es $\tau(E',E)$. Entonces la compleción de $E'-\tau(E',E)$ es M' provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. Veamos que la $\mathcal{A}$-topología en M' es precisamente la topología de Mackey $\tau(M',E)$.
Cada $A\in\mathcal{A}$ es $\sigma(E,E')$-compacto y, por tanto, $\sigma(E,M')$-compacto, pues sobre cada $A\in\mathcal{A}$ las topologías $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E,M')$ coinciden. Por la misma razón, cada disco $\sigma(E,M')$-compacto es $\sigma(E,E')$-compacto. Por tanto, $\mathcal{A}$ es la familia de los discos $\sigma(E,M')$-compactos de E y, en consecuencia, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en M' es $\tau(M',E)$. csqd.

1.12. PROPOSICION: Sea E un espacio bornológico y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos débilmente acotados en E satisfaciendo B.1)-B.3). Supongamos que cada compacto de E está contenido en algún elemento de $\mathcal{A}$. Entonces el dual topológico E' de E provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es completo.

Demostr.: Probaremos que $E'_{\mathcal{A}} = M'_{\mathcal{A}}$. Sabemos que $E'\subset M'$.
Veamos que $M'\subset E'$.
Sea $z'\in M'$. Para ver que $z'\in E'$ basta ver que z' es una forma lineal acotada en E, por ser E bornológico.
Sea B un conjunto acotado en E. Si $z'(B)$ no fuese acotado se verificaría que
$$\forall n\in\mathbb{N},\ \exists x_n\in B \,/\, |\langle x_n, z'\rangle| > n^2.$$
Consideremos la sucesión $\{x_n\}_n$ de puntos de B. Puesto que B es acotado, $\{x_n\}_n$ es acotada y por tanto $\{n^{-1}x_n\}_n \longrightarrow 0$.

Entonces $\{n^{-1}x_n\}_n \cup \{0\}$ es un compacto en E
Por hipótesis, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $\{n^{-1}x_n\}_n \cup \{0\} \subset A$.
Puesto que A es $\sigma(E,E')$ - acotado es $\sigma(E,M')$ - acotado (LEMA 1.1)
y portanto, $\{n^{-1}x_n\}_n$ debería ser $\sigma(E,M')$ - acotado, lo cual contradice que $|\langle n^{-1}x_n, z'\rangle| > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, $E' = M'$. csqd.

Como corolario obtenemos algunos ejemplos de duales topológicos completos.

1.13. COROLARIO: a) Si E es un espacio bornológico, su dual fuerte $E'_{\beta(E',E)}$ es completo.

b) El dual fuerte de un espacio metrizable es completo.

c) Si E es un espacio bornológico completo, entonces E' provisto de la topología de Mackey $\tau(E',E)$ es completo.

Demostr.: a) $\beta(E',E)$ es la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia donde $\mathcal{A}$ es la familia de los conjuntos acotados y cerrados de E. Basta, para probar a), demostrar que $\mathcal{A}$ satisface la condición de la proposición anterior, lo cual es trivial puesto todo compacto de E es un conjunto cerrado y acotado.

b) Es trivial consecuencia de a), pues todo espacio metrizable es bornológico.

c) $\tau(E',E)$ es la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, donde $\mathcal{A}$ es la familia de los discos $\sigma(E,E')$ - compactos de E.

Basta para probar c) comprobar que todo compacto de E está contenido en un elemento de $\mathcal{A}$ y aplicar la proposición anterior.

Sea K un compacto de E. Entonces su envolvente absolutamente convexa y cerrada $\overline{\Gamma(K)}$ es precompacto en E. Además es completo pues E es completo. Luego $\overline{\Gamma(K)}$ es un disco compacto (y, por tanto, débilmente compacto) que contiene a K. csqd.

Nos proponemos a continuación dar otra caracterización de la compleción M' de E'. El siguiente teorema resuelve esta cuestión.

1.14. TEOREMA: Sea (E,E') un par dual y $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos $\sigma(E,E')$-acotados de E satisfaciendo B.1) – B.4). Sea M' la compleción de $E'_{\mathcal{A}}$ (E' provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia). Entonces $z' \in M'$ si, y sólo si, se satisface la siguiente condición:
$$\forall A \in \mathcal{A},\ z'^{-1}(0) \cap A \text{ es } \sigma(E,E')\text{-cerrado en } E.$$

Demostr.: $\Rightarrow$] Sea $z' \in M'$. Entonces dado $A \in \mathcal{A}$, $z'|_A$ es $\sigma(E,E')$-continua. Por tanto, el hiperplano asociado a z' (que es $\mathrm{Ker}(z') = z'^{-1}(0)$) en A es $\sigma(E,E')$-cerrado, es decir, $z'^{-1}(0) \cap A$ es $\sigma(E,E')$-cerrado en el subespacio topológico A.

Puesto que A es $\sigma(E,E')$-cerrado en E (pues $\mathcal{A}$ satisface B.4), se verifica que $z'^{-1}(0) \cap A$ es $\sigma(E,E')$-cerrado en E.

$\Leftarrow$] Supongamos que z' es una forma lineal en E que satisface que
$$\forall A \in \mathcal{A},\ z'^{-1}(0) \cap A \text{ es } \sigma(E,E')\text{-cerrado en } E.$$
Para ver que $z' \in M'$, probaremos que para cada $A \in \mathcal{A}$, $z'|_A$ es $\sigma(E,E')$-continua, para lo cual es suficiente probar que $z'|_A$ es $\sigma(E,E')$-continua en el punto 0 (ver LEMA 1.5. y observar que $\mathcal{A}$ satisface B.4.)).

Si $z'|_A = 0$, la tesis es trivial.

Supongamos que $z'|_A \neq 0$. Queremos probar que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \text{ entorno débil de cero en } E \,/\, x \in U \cap A \Rightarrow |\langle x, z' \rangle| \leq \varepsilon.$$
Dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que
$$0 < \langle x, z' \rangle \leq \varepsilon \qquad (*)$$
pues $z'|_A \neq 0$. Sea $\alpha = \langle x, z' \rangle$.

Entonces $x \notin z'^{-1}(0)$ y a fortiori $x \notin z'^{-1}(0) \cap (2A)$. (I)

Puesto que $\mathcal{A}$ satisface B.2) se tiene que $2A \in \mathcal{A}$ y por tanto, por la hipótesis, $z'^{-1}(0) \cap (2A)$ es $\sigma(E,E')$-cerrado en E.

Se deduce entonces de (I) que existe U entorno absolutamente convexo y débil de cero en E tal que
$$(x+U) \cap \left[z'^{-1}(0) \cap (2A) \right] = \emptyset. \quad (\mathrm{II})$$
Probemos que este U es el que buscamos, es decir, que
$$\forall y \in U \cap A,\ |\langle y, z' \rangle| \leq \varepsilon.$$
Supongamos que existiese $x_0 \in U \cap A$ tal que $|\langle x_0, z' \rangle| > \varepsilon$. Multiplicando x_0 por una constante de módulo menor que 1 podemos conseguir que $|\langle \lambda x_0, z' \rangle| = \alpha$, pues $\alpha \leq \varepsilon$.

(*) Si $z'|_A \neq 0$, $\exists\, y \in A$ tal que $|\langle y, z' \rangle| > 0$. Multiplicando y por una constante suficientemente pequeña ($\lambda \leq 1$) podemos conseguir que $|\langle \lambda y, z' \rangle| \leq \varepsilon$. El módulo lo podemos quitar multiplicando λy por el adecuado.

Multiplicando λx_0 por $e^{i\theta}$ adecuado podemos escribir que

$$\langle \lambda e^{i\theta} x_0 , z' \rangle = -\alpha$$

Se verifica que $x + \lambda e^{i\theta} x_0 \in (x+U) \cap [z'^{-1}(0) \cap 2A]$.

En efecto:

- $\lambda e^{i\theta} x_0 \in U$ pues U es un disco, $x_0 \in U$ y $|\lambda e^{i\theta}| \leq 1$, y por tanto $x + \lambda e^{i\theta} x_0 \in x + U$.
- $x + \lambda e^{i\theta} x_0 \in z'^{-1}(0)$, pues $\langle x + \lambda e^{i\theta} x_0 , z' \rangle =$
  $= \langle x, z' \rangle + \langle \lambda e^{i\theta} x_0, z' \rangle = \alpha + (-\alpha) = 0$
- $x + \lambda e^{i\theta} x_0 \in A + A = 2A$, pues A es un disco, $x, x_0 \in A$ y $|\lambda e^{i\theta}| \leq 1$.

Luego $x + \lambda e^{i\theta} x_0 \in (x+U) \cap [z'^{-1}(0) \cap (2A)]$, lo cual contradice (II).

Por tanto, $\forall y \in U \cap A$, $|\langle y, z' \rangle| \leq \varepsilon$. csqd.

Distintas familias de acotados en E dan lugar a distintas compleciones de E'. Veamos algunas relaciones entre ellas.

1.15. TEOREMA: Sea (E, E') un par dual y $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos familias de acotados en E satisfaciendo las condiciones B.1) – B.4). Dotemos a E' de las topologías de la $\mathcal{A}$-convergencia y de la $\mathcal{B}$-convergencia. Denotemos por M' y N' las compleciones respectivas de $E'_{\mathcal{A}}$ y $E'_{\mathcal{B}}$. Entonces si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se verifica que $M' \supset N'$. En particular, si E' es completo para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, también lo es para la $\mathcal{B}$-topología.

Demostr.: Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ se tiene que

$$M' = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (E' + A^\circ) \supset \bigcap_{B \in \mathcal{B}} (E' + B^\circ) = N'.$$

Si $E'_{\mathcal{A}}$ es completo, entonces $M' = E'$ y por tanto $N' = E'$, pues $M' \supset N' \supset E'$. Luego $E'_{\mathcal{B}}$ será completo. csqd.

1.16. TEOREMA: Sea (E, E') un par dual y $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos familias de acotados en E satisfaciendo B.1) – B.4), tales que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Entonces, si K' es un conjunto completo en $E'_{\mathcal{A}}$ también es completo para la topología de la $\mathcal{B}$-convergencia.

Demostr.: Sean M' y N' las compleciones de $E'_{\mathcal{A}}$ y $E'_{\mathcal{B}}$. Entonces $M' \supset N' \supset E'$. Veamos en primer lugar que K' es completo en $M'_{\mathcal{A}}$ (M' provisto de la $\mathcal{A}$-topología):

Sea $\mathcal{F}'$ un filtro de Cauchy en $M'_{\mathcal{A}}$ tal que $K' \in \mathcal{F}'$.
Sea $\mathcal{F}'_0 = \mathcal{F}' \cap E'$ (filtro que induce $\mathcal{F}'$ en E') (*). Es trivial que $\mathcal{F}'_0$ es un filtro en E'. Veamos que $\mathcal{F}'_0$ es un filtro de Cauchy en $E'_{\mathcal{A}}$ tal que $K' \in \mathcal{F}'_0$:

- $\mathcal{F}'_0$ es de Cauchy en $E'_{\mathcal{A}}$: Dado $A \in \mathcal{A}$, sea A° entorno de cero en $E'_{\mathcal{A}}$. Sea $A^\bullet$ la polar de A en $M'_{\mathcal{A}}$. Como $\mathcal{F}'$ es de Cauchy en M', existe $F' \in \mathcal{F}'$ tal que $F' - F' \subset A^\bullet$.
  Entonces $(F' \cap E') - (F' \cap E') \subset A^\bullet \cap E' = A^\circ$. Como $F' \cap E' \in \mathcal{F}'_0$ queda visto que $\mathcal{F}'_0$ es de Cauchy en $E'_{\mathcal{A}}$.
- $K' \in \mathcal{F}'_0$: pues $K' = K' \cap E'$ y $K' \in \mathcal{F}'$.

Puesto que K' es completo en $E'_{\mathcal{A}}$, existe $x \in K'$ tal que $\mathcal{F}'_0 \longrightarrow x$ en $E'_{\mathcal{A}}$.

Veamos que $\mathcal{F}' \longrightarrow x$ en $M'_{\mathcal{A}}$.

Basta ver que x es adherente a $\mathcal{F}'$, pues $\mathcal{F}'$ es de Cauchy en $M'_{\mathcal{A}}$. Sea $F' \in \mathcal{F}'$ y $\overline{F'}$ su adherencia en $M'_{\mathcal{A}}$. Veamos que $x \in \overline{F'}$.

Dado $A \in \mathcal{A}$, $(x + A^\bullet) \cap E' = x + A^\circ$.
Como $\mathcal{F}'_0 \to x$, $\exists F'' \in \mathcal{F}'$ tal que $F'' \cap E' \subset x + A^\circ$.
Se verifica que $F' \cap F'' \cap E' \neq \emptyset$. Sea $y \in F' \cap F'' \cap E'$.
Luego $y \in F'$ e $y \in F'' \cap E' \subset (x + A^\bullet)$ y por tanto $y \in F' \cap (x + A^\bullet)$, que prueba que $x \in \overline{F'}$.

Por tanto, K' es completo en $M'_{\mathcal{A}}$ y en consecuencia cerrado en $M'_{\mathcal{A}}$. Si dotamos a N' de la topología inducida por la de $M'_{\mathcal{A}}$ ($M' \supset N'$) se deduce que K' es cerrado en N' para dicha topología y a fortiori, K' es cerrado en N'_β, pues $\mathcal{A} \subset \beta$ y por tanto la β-topología es más fina que la $\mathcal{A}$-topología.

Siendo K' un cerrado en N'_β se deduce que K' es completo en N'_β, pues N'_β es completo. Por tanto, K' es completo en E' para la topología que N'_β induce en E', que es precisamente la topología de la β-convergencia en E'. Luego K' es completo en E'_β. c.s.q.d.

El siguiente teorema mejora el teorema de Alaoglu-Bourbaki

1.17. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Consideremos en E' la topología $\lambda(E',E)$ de la convergencia uniforme sobre los discos precompactos y cerrados de E. Entonces para cada entorno de cero U en E, U° es un conjunto compacto en E' para la topología $\lambda(E',E)$. Además, la topología precompacta $\lambda(E',E)$ es la más fina topología polar en E' para la cual las polares de los entornos de cero en E son conjuntos compactos.

Demostr.: Recordemos que si (E,E') es un par dual y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ son familias de conjuntos acotados de E y E', resp., que satisfacen B.1)-B.3) entonces los elementos de $\mathcal{A}$ son precompactos respecto de la $\mathcal{A}'$-topología si, y solo si, los elementos de $\mathcal{A}'$ son precompactos respecto de la $\mathcal{A}$-topología.

Consideremos la dualidad topológica (E,E') y las topologías $\sigma(E',E)$ y $\lambda(E',E)$ en E'. Se verifica que $\sigma(E',E) \leq \lambda(E',E)$.
Por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, si U es entorno de cero, U° es un disco $\sigma(E',E)$-compacto. En particular, U° es débilmente completo. Por el teorema anterior, U° es $\lambda(E',E)$-completo.

Veamos ahora que U° es $\lambda(E',E)$-precompacto.
Sea $\mathcal{A}$ la familia de los conjuntos precompactos de E. Si $\mathcal{U}$ es base de entornos de cero en E, sea $\mathcal{A}' = \{U^\circ\}_{U\in\mathcal{U}}$.
La topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E' es $\lambda(E',E)$ y la topología de la $\mathcal{A}'$-convergencia en E es la topología original de E.
Entonces, como los elementos de $\mathcal{A}$ son precompactos para la $\mathcal{A}'$ topología en E, se verifica que los elementos de $\mathcal{A}'$ son precompactos para la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia. Luego, si U es entorno de cero, U° es $\lambda(E',E)$-precompacto.
En definitiva, U° es $\lambda(E',E)$-compacto.

Veamos que $\lambda(E',E)$ es la más fina topología polar en E' que verifica lo anterior; aun más, probaremos que $\lambda(E',E)$ es la más fina topología polar en E' que hace precompactas a las polares de los entornos de cero en E: Sea $\mathcal{T}$ la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, donde $\mathcal{A}$ es una familia de acotados en E satisfaciendo B.1)-B.3), de forma que las polares de los entornos de cero de E son $\mathcal{T}$-precompactos;

Entonces, si $\mathcal{A}'=\{U^{\circ}\}_{U\in\mathcal{U}}$ donde $\mathcal{U}$ es base de 0-entornos en E, se verifica que los elementos de $\mathcal{A}'$ son precompactos respecto de la $\mathcal{A}'$-topología en E, que es la topología original de E. Por tanto, $\mathcal{T} \leq \lambda(E',E)$. csqd.

Probemos a continuación el siguiente

1.18. TEOREMA: (fundamental de compleción)

Sea E un espacio localmente convexo separado, $\mathcal{U}$ una base de 0-entornos de E y E' el dual topológico de E. Entonces la compleción de E es el espacio

$$\hat{E} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} (E+U^{\circ\circ}) \subset E'^{*}$$

dotado de la topología cuya base de entornos de cero es

$$\{U^{\circ\circ}\cap\hat{E}\}_{U\in\mathcal{U}}$$

Demostr.: Sea $\mathcal{A}'=\{U^{\circ}\}_{U\in\mathcal{U}}$. Entonces la topología de la $\mathcal{A}'$-convergencia es la topología original de E. Entonces la compleción de E es

$$\hat{E} = \bigcap_{A'\in\mathcal{A}'} (E+A'^{\circ}) = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} (E+U^{\circ\circ})$$

provista de la topología de la $\mathcal{A}'$-convergencia respecto de $(E,\hat{E})$. Una base de 0-entornos para esta topología es

$$\{U^{\circ\circ}\cap\hat{E}\}_{U\in\mathcal{U}}. \quad (*) \quad \text{csqd.}$$

2. TEOREMAS DE GROTHENDIECK.

Los dos teoremas de Grothendieck siguientes caracterizan la compleción de un espacio localmente convexo. Su demostración no es más que una simple traducción, utilizando el teorema fundamental de compleción, de los teoremas 1.7 y 1.14 al caso en que (E,E') es la dualidad topológica formada por un espacio localmente convexo y su dual topológico.

2.1. TEOREMA: (de Grothendieck)

Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Entonces la compleción de E es el conjunto $\hat{E}$ de las formas lineales en E' que son $\sigma(E',E)$-continuas en cada conjunto polar de un entorno de cero en E. En particular, E es completo si, y solo si, cada forma lineal en E', que es $\sigma(E',E)$-continua en la polar de cada entorno de cero, es $\sigma(E',E)$-continua.

(*) U° es la polar de U respecto de la dualidad (E,E') y $U^{\circ\circ}$ es la polar de U° respecto de (E',E'^{*}).

2.2. TEOREMA: (de Grothendieck).

Si E es un espacio localmente convexo, su compleción $\hat{E}$ es el conjunto de formas lineales z' en E' ($z' \in E'^*$) tales que $z'^{-1}(0) \cap U^0$ es $\sigma(E',E)$-cerrado para cada 0-entorno U en E. En particular, E es completo si, y solo si, cada hiperplano en E', que corta a los conjuntos U^0 en un conjunto $\sigma(E',E)$-cerrado, es un hiperplano $\sigma(E',E)$-cerrado.

El siguiente teorema nos dice como es una base de entornos de cero en la compleción $\hat{E}$ de E.

2.3. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados de E. Entonces una base de entornos de cero en la compleción $\hat{E}$ de E está constituida por las clausuras en $\hat{E}$ de los elementos de $\mathcal{U}$, es decir una base en $\hat{E}$ es

$$\overline{\mathcal{U}}^{\hat{E}} = \{\overline{U}^{\hat{E}} / U \in \mathcal{U}\}.$$

Demostr.: En virtud del teorema fundamental de compleción, bastará probar que

$$\overline{U}^{\hat{E}} = U^{00} \cap \hat{E} \quad , \forall U \in \mathcal{U}.$$

U^{00} es la envolvente absolutamente convexa y $\sigma(E'^*,E')$-cerrada de U. Siendo U absolutamente convexo, se deduce que U^{00} es la $\sigma(E'^*,E')$-clausura de U en E'^*. Entonces $U^{00} \cap \hat{E}$ es la $\sigma(E'^*,E')$-clausura de U en $\hat{E}$. Pero $\sigma(E'^*,E')$ induce en $\hat{E}$ la topología $\sigma(\hat{E},E')$. Por tanto, $U^{00} \cap \hat{E}$ es la $\sigma(\hat{E},E')$-clausura de U en $\hat{E}$.

Si probamos que la topología de $\hat{E}$ es compatible con la dualidad $(\hat{E},E')$ quedaría visto que los convexos y cerrados son los mismos para la topología de $\hat{E}$ y la topología $\sigma(\hat{E},E')$ y, en particular, $U^{00} \cap \hat{E}$ será la clausura de U en $\hat{E}$, es decir, $\overline{U}^{\hat{E}}$, como queremos probar.

Basta entonces demostrar que la topología de $\hat{E}$ es compatible con $(\hat{E},E')$:

Sea $z \in \hat{E}'$, es decir, $z : \hat{E} \to \mathbb{K}$ es una forma lineal continua. Entonces $z_0 = z|_E : E \to \mathbb{K}$ es una forma lineal continua en E. Recíprocamente, si $z_0 : E \to \mathbb{K}$ es una forma lineal continua, admite una única extensión lineal continua $\hat{z}_0 : \hat{E} \to \mathbb{K}$, como probaremos en el teorema siguiente. Existe pues una biyección entre $\hat{E}'$ y E' que prueba que la topología de $\hat{E}$ es compatible con la paridad $(\hat{E}, E')$. c.s.q.d.

2.4. TEOREMA: (de extensión)

Sean E y F espacios localmente convexos y $t: E \to F$ una aplicación lineal y continua. Existe entonces una única aplicación lineal y continua $\hat{t}: \hat{E} \to \hat{F}$ que prolonga a t. (*)

Demostr.: EXISTENCIA: Puesto que $t: E \to F$ es lineal y continua es débilmente continua y su traspuesta, por tanto, es

$$t': F' \longrightarrow E'.$$

Consideremos la traspuesta de t' respecto de las paridades canónicas (E', E'^*) y (F', F'^*). Dicha traspuesta es

$$t'^*: E'^* \longrightarrow F'^*$$

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ base de 0-entornos en E y F, resp. Puesto que t es continua se verifica que

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U} / t(U) \subset V. \quad (I)$$

Probemos que si U y V satisfacen que $t(U) \subset V$, entonces $t'^*(U^{\circ\circ}) \subset V^{\circ\circ}$

Puesto que $t(U) \subset V$ se verifica que $t(U)^{\circ\circ} \subset V^{\circ\circ}$.

Veamos que $t'^*(U^{\circ\circ}) \subset t(U)^{\circ\circ}$, es decir, que

$$\forall z \in U^{\circ\circ}, \ t'^*(z) \in t(U)^{\circ\circ},$$

o bien que $\forall z \in U^{\circ\circ}$, $|\langle y, t'^*(z)\rangle| \leq 1$, $\forall y \in t(U)^\circ$.

Sean pues $z \in U^{\circ\circ}$ e $y \in t(U)^\circ$. Entonces

$$|\langle y, t'^*(z)\rangle| = |\langle t'(y), z\rangle|$$

Pero $z \in U^{\circ\circ}$ y $t'(y) \in t'(t(U)^\circ) = t'(t'^{-1}(U^\circ)) \subset U^\circ$ pues $t(U)^\circ = t'^{-1}(U^\circ)$. Luego $|\langle t'(y), z\rangle| \leq 1$ y por tanto $t'^*(U^{\circ\circ}) \subset t(U)^{\circ\circ} \subset V^{\circ\circ}$. (II)

$\hat{E}$ es un subespacio de E'^*. Calculemos $t'^*(\hat{E})$.

$$t'^*(\hat{E}) = t'^*\Big(\bigcap_{U \in \mathcal{U}} (E + U^{\circ\circ})\Big) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \big[t'^*(E) + t'^*(U^{\circ\circ})\big]$$

Pero $t'^*(E) = t(E)$, pues t'^* es una extensión de t a E'^*. Teniendo en cuenta (I) y (II) podemos escribir que

$$t'^*(\hat{E}) \subset \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \big[t(E) + t'^*(U^{\circ\circ})\big] \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \big[t(E) + V^{\circ\circ}\big] \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \big[F + V^{\circ\circ}\big] = \hat{F}$$

Luego $t'^*(\hat{E}) \subset \hat{F}$.

Probemos ahora que

$$\forall V \in \mathcal{V},\ \exists U \in \mathcal{U} \ / \ t'^*(\hat{E} \cap U^{\circ\circ}) \subset \hat{F} \cap V^{\circ\circ}. \qquad \text{(III)}$$

Por (I), dado $V \in \mathcal{V}$, $\exists U \in \mathcal{U} \ / \ t(U) \subset V$.

Si $x \in \hat{E} \cap U^{\circ\circ}$ entonces $t'^*(x) \in t'^*(\hat{E}) \subset \hat{F}$ y $t'^*(x) \in t'^*(U^{\circ\circ}) \subset$ $\subset V^{\circ\circ}$. Luego, $t'^*(x) \in \hat{F} \cap V^{\circ\circ}$ y por tanto se verifica (III).

Sea entonces $\hat{t} = t'^*|_{\hat{E}}$. Veamos que $\hat{t}$ es la extensión buscada.

- $\hat{t}(\hat{E}) \subset \hat{F}$: pues $t'^*(\hat{E}) \subset \hat{F}$.
- $\hat{t}$ es continua: Por (III) se verifica que

$$\forall V \in \mathcal{V}, \exists U \in \mathcal{U} \ / \ \hat{t}(\hat{E} \cap U^{\circ\circ}) = t'^*(\hat{E} \cap U^{\circ\circ}) \subset \hat{F} \cap V^{\circ\circ}$$

- $\hat{t}$ prolonga a t: en efecto, pues $\hat{t}|_E = t'^*|_E = t$.

UNICIDAD: Supongamos que t, además de $\hat{t}$, admite otra extensión $u : \hat{E} \longrightarrow \hat{F}$ lineal y continua. Veamos que $\hat{t} = u$.

Sea $v = \hat{t} - u$. Es obvio que $v(E) = \{0\}$, pues $\hat{t}|_E = u|_E = t$.

Siendo v continua se verifica que

$$v(\hat{E}) = v\left(\overline{E}^{\hat{E}}\right) \subset \overline{v(E)}^{\hat{F}} = \overline{\{0\}}^{\hat{F}} = \{0\},$$ pues $\hat{F}$ es separado.

Luego $v = 0$ y por tanto $\hat{t} = u$. c.s.q.d.

2.5. PROPOSICION: Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero discos de E y sea $\overline{\mathcal{U}}^{\hat{E}}$ la base de 0-entornos en la compleción $\hat{E}$ del TEOREMA 2.3. Entonces para cada $U \in \mathcal{U}$, la gauge $p_{\overline{U}^{\hat{E}}}$ de $\overline{U}^{\hat{E}}$ en $\hat{E}$ es la extensión de la gauge p_U de U en E.

Demostr.: Sea $z \in E$. Entonces

$$p_U(z) = \sup_{x' \in U^\circ} |\langle x', z \rangle|.$$

Por otra parte, como $z \in E$

$$p_{\overline{U}^{\hat{E}}}(z) = p_{U^{\circ\circ} \cap \hat{E}}(z) = \sup_{x' \in U^\circ} |\langle x', z \rangle|$$

Luego $p_{\overline{U}^{\hat{E}}}$ extiende a p_U. c.s.q.d.

2.6. TEOREMA: a) La compleción de un espacio separado es separado.

b) La compleción de un espacio metrizable es un espacio de Fréchet.

c) La compleción de un espacio tonelado es un espacio tonelado.

Demostr.: a) La topología de $\hat{E}$ es la inducida en $\hat{E}$ por la topología de la $\mathcal{U}^\circ$-convergencia en E'^* ($\mathcal{U}$ base de cero-entornos);

pero dicha topología es separada. Por tanto, la de $\hat{E}$ también lo es.

b) Sea E un espacio metrizable y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de 0-entornos en E. Por a), $\hat{E}$ es separado. Además $\hat{E}$ es metrizable pues $\{\overline{U_n}^{\hat{E}}\}_n$ es una base numerable de entornos de cero en $\hat{E}$.

Puesto que $\hat{E}$ es completo se verifica que $\hat{E}$ es de Fréchet.

c) Sea E un espacio tonelado. Veamos que $\hat{E}$ también lo es.

Sea T un tonel en $\hat{E}$; probemos que es entorno de cero en E. Sea $T_0 = T\cap E$. T_0 es un disco pues T y E lo son. T_0 es absorbente en E pues T lo era en $\hat{E}$. Además T_0 es cerrado en E pues T es cerrado en $\hat{E}$ y $\hat{E}$ induce en E su propia topología. Luego T_0 es un tonel en E y, por tanto, un entorno de cero en E, por ser E tonelado.

Entonces $\overline{T_0}^{\hat{E}}$ es entorno de cero en $\hat{E}$.

Pero $\overline{T_0}^{\hat{E}} = \overline{T\cap E}^{\hat{E}} \subset \overline{T}^{\hat{E}} \cap \overline{E}^{\hat{E}} = T\cap\hat{E} = T$.

Luego T es entorno de cero en $\hat{E}$ y, por tanto, $\hat{E}$ es tonelado. c.s.q.d.

3. TEOREMA DE EBERLEIN: CONSECUENCIA.

DEFINICION: (Valor de adherencia de una sucesión)

Sea X un espacio topológico. Una sucesión $\{x_n\}_n$ de puntos de X se dice que tiene un valor de adherencia a si se verifica que

$\forall U$ entorno de a, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists m\geq n \,/\, x_m\in U$.

Se sabe que en espacios metrizables, a es valor de adherencia de $\{x_n\}_n$ si, y solo si, $\{x_n\}_n$ posee una subsucesión convergente hacia a. Esto no ocurre en espacios no metrizables.

Se verifica el siguiente

3.1. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo y A un subconjunto de E. Si cada sucesión de puntos de A posee un valor de adherencia, entonces A es precompacto. (*)

Demostr.: Si A no fuese precompacto, existiría un entorno de cero U, que podemos elegir equilibrado y convexo, de forma que para cada conjunto finito D de A se verifica que

$$A \not\subset D+U. \qquad (\mathrm{I})$$

Sea entonces $x_1 \in A$. Se verifica que

$$A \not\subset x_1 + U$$

Luego $\exists\, x_2 \in A \setminus (x_1 + U)$.

Se verifica también que $A \not\subset \{x_1, x_2\} + U$.

Sea pues $x_3 \in A$ tal que $x_3 \notin \{x_1, x_2\} + U$.

Aplicando otra vez (I) se tiene que

$$A \not\subset \{x_1, x_2, x_3\} + U$$

Existe entonces $x_4 \in A$ tal que $x_4 \notin \{x_1, x_2, x_3\} + U$.

Procediendo de esta forma obtenemos una sucesión $\{x_n\}_n$ de puntos de A que verifica que

$$\begin{array}{llllll}
x_1 - x_2 \notin U & x_1 - x_3 \notin U & x_1 - x_4 \notin U & \cdots & x_1 - x_n \notin U & \cdots \\
 & x_2 - x_3 \notin U & x_2 - x_4 \notin U & \cdots & x_2 - x_n \notin U & \cdots \\
 & & x_3 - x_4 \notin U & \cdots & x_3 - x_n \notin U & \cdots \\
 & & - - - - & - - - & - - - & - -
\end{array}$$

Es decir, $x_n - x_m \notin U$ si $n \neq m$. (II)

Entonces $\{x_n\}_n$ no posee ningun valor de adherencia, pues si a fuese valor de adherencia dado el entorno de cero $\frac{1}{2}U$ y el natural 1, existiría $n \geq 1$ tal que $x_n \in a + \frac{1}{2}U$ y dado este n existiría $m \geq n+1$ tal que $x_m \in a + \frac{1}{2}U$. Por tanto se tendría que $x_n - x_m \in \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U \subset U$, en contra de (II).

Luego $\{x_n\}_n$ no posee ningún valor de adherencia, lo cual contradice la hipótesis. Luego A es precompacto. csqd.

3.2. COROLARIO: Si E es un espacio localmente convexo completo y cada sucesión en $A \subset E$ posee un valor de adherencia, entonces A es relativamente compacto.

La demostración es trivial.

El siguiente teorema nos permitirá estudiar la compacidad débil por sucesiones.

3.3. TEOREMA: (de Eberlein)

Sea E un espacio localmente convexo completo y E' su dual topológico. Sea A un subconjunto de E de forma que toda sucesión de puntos de A tiene un valor de adherencia para la topología débil $\sigma(E,E')$. Entonces A es relativamente $\sigma(E,E')$-compacto, i.e., $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ es compacto (débilmente).

Demostr.: Consideremos las dualidades (E,E') y (E',E'^*).
Por el TEOREMA 3.1, A es $\sigma(E,E')$-precompacto y por tanto $\sigma(E'^*,E')$-precompacto, pues $\sigma(E'^*,E')$ induce en E la topología $\sigma(E,E')$.

Pero E'^*-$\sigma(E'^*,E')$ es completo, y por tanto, A es relativamente $\sigma(E'^*,E')$-compacto.

Entonces, si $B=\overline{A}^{\sigma(E'^*,E')}$, se verifica que B es $\sigma(E'^*,E')$-compacto. Si probamos que $B\subset E$ se verificará que $B=B\cap E$ es $\sigma(E,E')$-compacto, pues si $B\subset E$, $B=\overline{A}^{\sigma(E'^*,E')}=\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ ya que $\sigma(E'^*,E')$ induce en E la topología $\sigma(E,E')$. Y por tanto se verificará que $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ es $\sigma(E,E')$-compacto como queremos probar.

Para ver que $B\subset E$ basta ver que $B\subset\hat{E}$, por ser E completo. Sea entonces $z\in B$. Para ver que $z\in\hat{E}$, en virtud del teorema de Grothendieck, basta ver que para cada U entorno de cero en E, $z|U^\circ$ es $\sigma(E',E)$-continua; y para probar esto, puesto que U° es un disco, basta comprobar que $z|U^\circ$ es $\sigma(E',E)$-continua en 0.

Procederemos por reducción al absurdo suponiendo que $z|U^\circ$ no es $\sigma(E',E)$-continua en cero. Se verificaría entonces que

$$\exists\,\varepsilon>0\,/\,\forall\, V_{x_1,\dots,x_n,\alpha} \text{ entorno débil de cero},\ z\notin\varepsilon\,(V_{x_1,\dots,x_n,\alpha}\cap U^\circ)^\circ \quad (*)\ (\mathrm{I})$$

donde $V_{x_1,\dots,x_n,\alpha}=\{x'\in E'\,/\,\sup_{1\le i\le n}|\langle x_i,x'\rangle|\le\alpha\}$. Entonces:

Dado $V=E'$ (que es entorno débil de cero), $\exists\, x'_1\in U^\circ\cap E'=U^\circ\,/\,|\langle z,x'_1\rangle|>\varepsilon$.
Como $z\in B=\overline{A}^{\sigma(E'^*,E')}$, $A\cap\left[z+V_{x'_1,\frac{\varepsilon}{3}}\right]\neq\emptyset$.

Por tanto, $\exists\, x_1\in A\subset E\,/\,|\langle x_1-z,x'_1\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$.
Por (I), $z\notin\varepsilon\,(V_{x_1,\frac{\varepsilon}{3}}\cap U^\circ)^\circ$
Luego $\exists\, x'_2\in V_{x_1,\frac{\varepsilon}{3}}\cap U^\circ\,/\,|\langle z,x'_2\rangle|>\varepsilon$,
y como $x'_2\in V_{x_1,\varepsilon/3}\cap U^\circ$ se verifica que $x'_2\in U^\circ\subset E'$ y $|\langle x'_2,x_1\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$.
Como $z\in B=\overline{A}^{\sigma(E'^*,E')}$, $A\cap\left[z+V_{x'_1,x'_2,\frac{\varepsilon}{3}}\right]\neq\emptyset$.
Por tanto, $\exists\, x_2\in A\subset E\,/\,|\langle x_2-z,x'_1\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$ y $|\langle x_2-z,x'_2\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$.
Pero $z\notin\varepsilon\,(V_{x_1,x_2,\frac{\varepsilon}{3}}\cap U^\circ)^\circ$.
Luego $\exists\, x'_3\in V_{x_1,x_2,\varepsilon/3}\cap U^\circ\,/\,|\langle z,x'_3\rangle|>\varepsilon$
y como $x'_3\in V_{x_1,x_2,\varepsilon/3}\cap U^\circ$ se verifica que $x'_3\in U^\circ\subset E'$ y $|\langle x'_3,x_1\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$ y $|\langle x'_3,x_2\rangle|\le\frac{\varepsilon}{3}$.

Procediendo de esta forma obtenemos dos sucesiones $\{x_n\}_n\subset A$ y $\{x'_n\}_n\subset U^\circ$ satisfaciendo las condiciones siguientes:

① $|\langle z, x'_n\rangle| > \varepsilon, \ \forall n\in\mathbb{N}$

② $|\langle x_i, x'_n\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall i<n$

③ $|\langle x_n - z, x'_i\rangle| \leq \varepsilon/3, \ \forall i\leq n$

Por hipótesis, toda sucesión en A tiene un valor de adherencia para la topología débil $\sigma(E,E')$. Además, por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, U° es $\sigma(E',E)$-compacto y, por tanto, toda sucesión de puntos de U° tiene un valor de adherencia para la topología débil $\sigma(E',E)$.

Sean, pues, a y a' los valores de adherencia de las sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{x'_n\}_n$ para las topologías débiles $\sigma(E,E')$ y $\sigma(E',E)$, resp. Es trivial comprobar que las funciones continuas transforman valores de adherencia en valores de adherencia.

Por tanto, como $x'_i\in E'$, $\forall i\in\mathbb{N}$, se verifica que para cada $i\in\mathbb{N}$ la sucesión en $\mathbb{K}$ $\{\langle x_n, x'_i\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por valor de adherencia $\langle a, x'_i\rangle$.

Puesto que $\mathbb{K}$ es metrizable, existe una subsucesión $\{n(j)\}_j$ de $\{n\}_n$ tal que

$$|\langle a, x'_i\rangle| = \lim_{j\to\infty} |\langle x_{n(j)}, x'_i\rangle| , \ \forall i\in\mathbb{N}.$$

Entonces, por linealidad y continuidad se verifica que

$$|\langle a-z, x'_i\rangle| = \lim_{j\to\infty} |\langle x_{n(j)} - z, x'_i\rangle|$$

En virtud de ③ y puesto que i lo hemos fijado se tiene que

$$\lim_{j\to\infty} |\langle x_{n(j)} - z, x'_i\rangle| \leq \varepsilon/3$$

y por tanto $|\langle a-z, x'_i\rangle| \leq \varepsilon/3$.

Por ① $|\langle z, x'_i\rangle| > \varepsilon$. Entonces

$$\forall i\in\mathbb{N}, \ |\langle a, x'_i\rangle| \geq |\langle z, x'_i\rangle| - |\langle a-z, x'_i\rangle| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon \qquad (\text{II})$$

Puesto que a' es valor de adherencia de $\{x'_n\}_n$ se verifica que la sucesión $\{\langle a, x'_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por valor de adherencia $\langle a, a'\rangle$ en $\mathbb{K}$.

De (II) se deduce que

$$|\langle a, a'\rangle| \geq \frac{2}{3}\varepsilon \qquad (\text{III})$$

Por otra parte, fijado $i\in\mathbb{N}$, la sucesión $\{\langle x_i, x'_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{K}$ tiene como valor de adherencia $\langle x_i, a'\rangle$.

Existe entonces una subsucesión $\{n(j)\}_j$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} \langle x_i, x'_{n(j)}\rangle = \langle x_i, a'\rangle$$

pues $\mathbb{K}$ es metrizable.

Puesto que i es fijo y $n(j) \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$ se verifica por ② que

$$\lim_{j\to\infty} |\langle x_i, x'_{n(j)}\rangle| \leq \varepsilon/3$$

y por tanto $|\langle x_i, a'\rangle| \leq \varepsilon/3$, $\forall i \in \mathbb{N}$. (IV)

Como $\{x_n\}_n$ tiene valor de adherencia a, la sucesión $\{\langle x_n, a'\rangle\}_n$ en $\mathbb{K}$ tiene valor de adherencia $\langle a, a'\rangle$.

Existe entonces una subsucesión $\{n(j)\}_j$ tal que

$$|\langle a, a'\rangle| = \lim_{j\to\infty} |\langle x_{n(j)}, a'\rangle|.$$

Por (IV) debe ser $\lim_{j\to\infty} |\langle x_{n(j)}, a'\rangle| \leq \varepsilon/3$ y por tanto

$$|\langle a, a'\rangle| \leq \varepsilon/3 . \quad (V)$$

Las proposiciones (III) y (V) son obviamente contradictorias. Por tanto, se ha de verificar que $z|_{U^\circ}$ es $\sigma(E',E)$-continua, para cada entorno de cero U en E, y en consecuencia $z \in \hat{E}$. De aquí se deduce ya la tesis del teorema como se indicó en un principio. ∎

3.4. COROLARIO: Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Sea A un subconjunto de E de forma que toda sucesión en A tiene un valor de adherencia. Supongamos además que E con la topología de Mackey $\tau(E,E')$ es completo. Entonces la clausura de A en E es compacta.

Demostr.: Denotemos por E_τ el espacio E provisto de la topología de Mackey $\tau(E,E')$. Puesto que $\sigma(E,E')$ es menos fina que la topología original de E, se verifica que toda sucesión de puntos de A tiene un $\sigma(E,E')$-valor de adherencia. Luego por el teorema de Eberlein, $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ es $\sigma(E,E')$-compacta en E_τ, pues suponemos que E_τ es completo.

Sabemos que si $\overline{A}$ es la clausura de A en E (por la topología original) entonces $\overline{A} \subset \overline{A}^{\sigma(E,E')}$.

Siendo $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ débilmente compacto es débilmente completo, y por tanto $\overline{A}^{\sigma}$ es completo respecto de la topología original de E, pues $\overline{A}$ un conjunto es completo para una topología sigue siéndolo para cualquier otra topología más fina.

Como $\bar{A}$ es un cerrado contenido en el conjunto completo $\bar{A}^{\sigma(E,E')}$, se verifica que $\bar{A}$ es completo en E.

Además, por hipótesis, toda sucesión de puntos de A tiene un valor de adherencia. Por tanto, A es precompacto y, en consecuencia, $\bar{A}$ es precompacto.

En definitiva, $\bar{A}$ es compacto. csqd.

<u>OBSERVACION</u>: Para espacios provistos de la topología de Mackey (como los tonelados, reflexivos, ...) el corolario anterior no aporta nada nuevo, pues afirmamos que la clausura de un precompacto en un completo es compacto. Sin embargo, para otra categoría de espacios localmente convexos, el resultado anterior sí es interesante.

TEMA 10: TEOREMAS DE LA APLICACION ABIERTA Y DEL GRAFO CERRADO.

Nos proponemos en este tema obtener dos resultados centrales del Análisis funcional: el teorema de la aplicación abierta y el del grafo cerrado.

El problema que se nos plantea es el siguiente: Sean E y F dos espacios localmente convexos y $t: E \to F$ una aplicación lineal, continua y biyectiva. ¿Bajo qué condiciones t tiene inversa continua? Banach probó que si E y F son espacios de Banach (luego se probó suponiendo que E y F son espacios de Fréchet) entonces t^{-1} es continua. Estas hipótesis son muy fuertes, y los teoremas no tienen el alcance deseado.

Posteriormente Pták elaboró una teoría (llamada teoría de Pták) para rebajar las hipótesis que dió Banach, y se puede asegurar que son las hipótesis mínimas. Aquí nos dedicaremos al estudio de la teoría de Pták.

1. DEFINICIONES: Aplicaciones casi-abiertas. Conjuntos casi-cerrados. Espacios supracompletos.

DEFINICION: (Aplicación casi-abierta)

Una aplicación lineal $t: E \to F$ entre dos espacios vectoriales topológicos se dice casi-abierta si para cada entorno de cero U en E, $\overline{t(U)}$ es entorno de cero en $t(E) \subset F$.

DEFINICION: (Conjunto casi-cerrado)

Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Un subconjunto A' de E' se dice que es casi-cerrado si para todo entorno de cero U en E, $A' \cap U^{\circ}$ es $\sigma(E', E)$-cerrado.

DEFINICION: (Espacio supracompleto)

Un espacio localmente convexo E se dice que es supracompleto (fully complete) si cada subespacio casi-cerrado de su dual E' es $\sigma(E', E)$-cerrado.

Con esta nueva terminología, el segundo teorema de Grothendieck se puede enunciar como sigue: "Un espacio localmente convexo E es completo sii todo hiperplano casi-cerrado en E' es $\sigma(E', E)$-cerrado"

Por tanto, de acuerdo con la última definición, TODO ESPACIO SUPRACOMPLETO ES COMPLETO.

No siempre es cierto el recíproco de la proposición anterior.
Si E es un espacio supracompleto, para cada subespacio A' de E' que verifique que $A' \cap U^\circ$ es $\sigma(E',E)$-cerrado se satisface que A' es $\sigma(E',E)$-cerrado. Entonces si $\mathcal{T}$ es otra topología en E más fina que la original y compatible con la dualidad (E,E'), es decir, tal que $E'_{\mathcal{T}} = E'$, se sigue verificando que cada subespacio casi-cerrado de E' es $\sigma(E',E)$-cerrado y por tanto $E_{\mathcal{T}}$ es tambien supracompleto.

Probaremos despues que todo espacio de Fréchet es supracompleto, de lo que podemos concluir que la noción de supracompletitud solo será útil fuera de la categoría de los espacios de Fréchet.
Necesitamos para probarlo el siguiente

1.1. LEMA: Sea E un espacio localmente convexo y U un entorno de cero absolutamente convexo y cerrado. Si A' es un disco $\sigma(E',E)$-cerrado en E', entonces
$$(A' \cap U^\circ)^\circ \subset A'^\circ + 2U$$

Demostr.: En virtud del COROLARIO 5.6 (TEMA 3º), puesto que A' y U° son discos $\sigma(E',E)$-cerrados, se verifica que
$$(A' \cap U^\circ)^\circ = \overline{\Gamma(A'^\circ \cup U^{\circ\circ})} = \overline{\Gamma(A'^\circ \cup U)}$$
pues $U = U^{\circ\circ}$ por ser U un disco cerrado.
Puesto que A'° y U contienen a cero se verifica que
$$A'^\circ \cup U \subset A'^\circ + U$$
y por tanto $\quad A'^\circ \cup U \subset \overline{A'^\circ + U}$.
$\overline{A'^\circ + U}$ es un disco $\sigma(E,E')$-cerrado que contiene a $A'^\circ \cup U$.
Por tanto, $\overline{\Gamma(A'^\circ \cup U)} \subset \overline{A'^\circ + U}$.

Es obvio que $\overline{A'^\circ + U} \subset A'^\circ + U + U \quad (*)$
En definitiva, $(A' \cap U^\circ)^\circ \subset A'^\circ + 2U$. csqd.

1.2. TEOREMA: Todo espacio de Fréchet es supracompleto.

Demostr.: Sea E un espacio de Fréchet y M' un subespacio casi-cerrado de E'. Veamos que M' es $\sigma(E',E)$-cerrado.
Probaremos en primer lugar la siguiente proposición
$\forall U$ entorno de cero absolutamente convexo y cerrado, $\exists V$ entorno de cero $/ (M' \cap V^\circ)^\circ \subseteq M'^\circ + U$.

Sea U entorno de cero absolutamente convexo y cerrado de E. Siendo E de Fréchet, podemos elegir una base numerable $\{U_n\}_n$ de entornos de cero satisfaciendo lo siguiente

$$U_1 = U \ ; \ \forall n \geq 1, \ U_{n+1} \subset \frac{1}{2} U_n \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}, \ U_n \text{ es un disco cerrado.}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$A'_n = M' \cap U_n^\circ .$$

Puesto que M' es un subespacio casi-cerrado, se verifica que A'_n es $\sigma(E',E)$-cerrado, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Además se verifica que

$$A'_n = A'_{n+1} \cap U_n^\circ \quad , \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\mathrm{I})$$

pues $A'_{n+1} \cap U_n^\circ = M' \cap U_{n+1}^\circ \cap U_n^\circ = M' \cap U_n^\circ = A'_n$

pues $U_{n+1}^\circ \cap U_n^\circ = U_n^\circ$ ya que $U_{n+1} \subset U_n$ y por tanto $U_n^\circ \subset U_{n+1}^\circ$.

En virtud del lema anterior se verifica que

$$A_n'^{\circ} = (A'_{n+1} \cap U_n^\circ)^\circ \subset A_{n+1}'^{\circ} + 2U_n \quad , \forall n \in \mathbb{N} \qquad (\mathrm{II})$$

Sea $a \in A_1'^{\circ}$. Por (II) se verifica que $a \in A_2'^{\circ} + 2U_1$.

Por tanto, $\exists x_1 \in 2U_1 \ / \ a - x_1 \in A_2'^{\circ}$.

Por (II) se tiene otra vez que $a - x_1 \in A_3'^{\circ} + 2U_2$.

Luego $\exists x_2 \in 2U_2 \ / \ a - x_1 - x_2 \in A_3'^{\circ}$.

En general, dado $n \in \mathbb{N}$

$$\exists x_n \in 2U_n \ / \ a - \sum_{i=1}^{n} x_i \in A'_{n+1} . \qquad (\mathrm{III})$$

Veamos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ es convergente.

Puesto que E es completo, basta probar que la serie verifica la condición de Cauchy siguiente:

"Para n suficientemente avanzado y para todo $p \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=n}^{n+p} x_i$ permanece dentro de un entorno de cero fijado de antemano".

$$\sum_{i=n}^{n+p} x_i = x_n + x_{n+1} + \dots + x_{n+p} \in 2(U_n + U_{n+1} + \dots + U_{n+p}) \subset$$

$$\subset 2\left(U_n + \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^2}U_n + \dots + \frac{1}{2^p}U_n\right) \subset$$

$$\subset 2\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}\right) U_n = 4U_n$$

Luego $\forall n, p \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=n}^{n+p} x_i \in 4U_n . \qquad (\mathrm{IV})$

$\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ satisface la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.

Sea pues $x_0 \in E$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_0$.

Veamos que $a - x_0 \in M'^{o}$, es decir, que $\forall x \in M'$, $|\langle a-x_0, x'\rangle| \leq 1$.
Dado $x' \in M'$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $x' \in M' \cap U_{n_0}^{o}$, pues $\{U_n\}_n$ es base de 0-entornos y por tanto $\{U_n^{o}\}_n$ va recubriendo todo E'.
Puesto que $\{U_n\}_n$ es decreciente, si $n \geq n_0$, entonces $x' \in M' \cap U_n^{o}$.
Luego $x' \in A'_n$ si $n \geq n_0$, y también $x' \in A'_{n+1}$ si $n \geq n_0$.
Como $a - \sum_{i=1}^{n} x_i \in A'^{o}_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$$|\langle a - \sum_{i=1}^{n} x_i, x'\rangle| \leq 1 \quad \text{si } n \geq n_0.$$

Como $|\langle a - x_0, x'\rangle| = \lim_{n\to\infty} |\langle a - \sum_{i=1}^{n} x_i, x'\rangle|$ se verifica que

$$|\langle a - x_0, x'\rangle| \leq 1, \quad \forall x' \in M'.$$

Luego $a - x_0 \in M'^{o}$ y por tanto $a \in x_0 + M'^{o}$.
De (IV), para $n=1$ se deduce que

$$\sum_{i=1}^{p+1} x_i \in 4U_1, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

Luego $x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \in \overline{4U_1} = 4U$ pues $U_1 = U$ y U es cerrado.

Por tanto, $a \in 4U + M'^{o}$

Como $a \in A_1'^{o}$ es arbitrario, se deduce que

$$A_1'^{o} \subset 4U + M'^{o}$$

Pero $A'_1 = M' \cap U_1^{o} = M' \cap U^{o}$.

Luego $(M' \cap U^{o})^{o} \subset 4U + M'^{o}$

y dividiendo por 4

$$(M' \cap (\tfrac{1}{4}U)^{o})^{o} \subset U + M'^{o}$$

pues M' y M'^{o} son subespacios.

Tomando $V = \frac{1}{4}U$ queda probado que

$\forall U$ entorno de cero disco cerrado, $\exists V$ entorno de cero / $(M' \cap V^{o})^{o} \subset M'^{o} + U$. (V)

Probemos ya que M' es $\sigma(E', E)$-cerrado.

Dado U entorno de cero disco cerrado, $\exists V$ entorno de cero tal que

$$(M' \cap V^{o})^{o} \subset M'^{o} + U$$

y por tanto

$$(M'^{\circ}+U)^{\circ} \subset (M'\cap V^{\circ})^{\circ\circ} = M'\cap V^{\circ} \qquad \text{(VI)}$$

pues siendo M' casi cerrado $M'\cap V^{\circ}$ es $\sigma(E',E)$-cerrado y disco y por el teorema de las bipolares $M'\cap V^{\circ} = (M'\cap V^{\circ})^{\circ\circ}$.

Por otro lado, siendo M' subespacio se tiene que $M'^{\circ} = M'^{\perp}$ y es trivial que $(M'^{\perp} \cup U)^{\circ} = (M'^{\perp} + U)^{\circ}$ y por tanto

$$(M'^{\circ}+U)^{\circ} = (M'^{\perp}+U)^{\circ} = (M'^{\perp}\cup U)^{\circ} = (M'^{\circ}\cup U)^{\circ} =$$
$$= M'^{\circ\circ}\cap U^{\circ}. \qquad \text{(VII)}$$

En definitiva de (VI) y (VII) concluimos que

$\forall U$ 0-entorno disco cerrado, $\exists V$ entorno de cero / $M'^{\circ\circ}\cap U^{\circ} \subset M'\cap V^{\circ}$. (VIII)

Veamos que entonces $M'^{\circ\circ}\subset M'$.

Si $x'\in M'^{\circ\circ}\subset E'$, $\exists U$ entorno de cero en E / $x'\in U^{\circ}$.

Luego $x'\in M'^{\circ\circ}\cap U^{\circ}$.

Por (VIII), existe V entorno de cero tal que $M'^{\circ\circ}\cap U^{\circ}\subset M'\cap V^{\circ}$ y por tanto $x'\in M'\cap V^{\circ}$. Luego $x'\in M'$.

En consecuencia, $M'^{\circ\circ}\subset M'$ y, por tanto, $M' = M'^{\circ\circ}$, que prueba que M' es $\sigma(E',E)$-cerrado, pues $M'^{\circ\circ}$ lo es. c.s.q.d.

<u>DEFINICION</u>: (Aplicación abierta)

Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación $f: X\to Y$ se dice abierta si para cada abierto $A\subset X$, $f(A)$ es abierto en Y.

Si f además de abierta es biyectiva, entonces $f^{-1}: Y\to X$ es continua.

Luego las aplicaciones biyectivas, continuas y abiertas son los isomorfismos topológicos

<u>OBSERVACION</u>: Sean E y F espacios localmente convexos y $t: E\to F$ una aplicación lineal. Para garantizar que t es abierta basta probar que t transforma entornos de cero en entornos de cero.

Si $t: E\to F$ es lineal y abierta entonces t es suprayectiva, pues siendo E entorno de cero, $t(E)$ es entorno de cero en F y, en particular, absorbente; luego dado $y\in F$, $\exists \lambda>0 / \lambda y\in t(E)$. Como $t(E)$ es subespacio se deduce que $y\in t(E)$. Luego $t(E)=F$ y t es suprayectiva.

Esto nos da idea de que exigir que una aplicación lineal sea abierta es una condición muy fuerte.

El concepto de aplicación casi-abierta (pg. 13) es bastante más débil que el de aplicación abierta; se puede comprobar esto en el hecho de que "toda aplicación lineal, suprayectiva valorada en un espacio tonelado es casi-abierta". Compobemoslo. Sea U un entorno de cero disco en un espacio localmente convexo E, $t: E \to F$ lineal suprayectiva, donde F es tonelado. Veamos que $\overline{t(U)}$ es entorno de cero en F. Siendo U disco, $\overline{t(U)}$ es un disco cerrado en F. Veamos que también es absorbente. Dado $x \in F$, $\exists x_0 \in E \ / \ x = t(x_0)$, pues t es sobre. Como U es absorbente, $\exists \lambda > 0 \ / \ x_0 \in \lambda U$ y por tanto $t(x_0) \in \lambda t(U)$, es decir, $x \in \lambda t(U) \subset \lambda \overline{t(U)}$. Luego $\overline{t(U)}$ es absorbente. Por tanto, $\overline{t(U)}$ es un tonel en F y en consecuencia un entorno de cero, por ser F tonelado.

Seguiremos a continuación preparando el camino de demostración de los teoremas de grafo cerrado y de la aplicación abierta.

1.3. LEMA: Sean E y F espacios localmente convexos con duales topológicos E' y F'. Supongamos que $t: E \to F$ es una aplicación lineal casi-abierta. Sea $t': F' \to E^*$ su traspuesta. Entonces, si N' es un subespacio casi-cerrado de F', $t'(N') \cap E'$ es un subespacio casi-cerrado en E'.

Demostr.: Dotemos a F' de la topología débil $\sigma(F', F)$ y a E^* de la topología débil $\sigma(E^*, E)$. Veamos que $t': F'_\sigma \to E^*_\sigma$ es continua. La traspuesta de t' es

$$t'': E^{**} \longrightarrow F'^*$$

Si probamos que $t''(E) \subset F$ quedará probado que t' es débilmente continua (i.e., $t': F'_\sigma \to E^*_\sigma$ es continua).
Pero esto es cierto pues $t''(E) = t(E) \subset F$ pues t'' es una extensión de t. Luego $t': F'_\sigma \to E^*_\sigma$ es continua
Queremos probar que para todo U entorno de cero, que podemos tomar disco sin pérdida de generalidad, se verifica que $t'(N') \cap E' \cap U^\circ$ es débilmente cerrado en E'.
Puesto que $U^\circ \subset E'$ se tiene que $t'(N') \cap E' \cap U^\circ = t'(N') \cap U^\circ$.
Es obvio que

$$t'(N') \cap U^\circ = t'(N' \cap t'^{-1}(U^\circ))$$

Sabemos que $t'^{-1}(U^\circ) = [t(U)]^\circ$.

Por hipótesis, t es casi-abierta. Luego $\overline{t(U)}$ es entorno de cero en F. Entonces por el teorema de Alaoglu-Bourbaki $[\overline{t(U)}]^\circ$ es un disco $\sigma(F',F)$-compacto en F'.

Fácilmente se comprueba que la polar de un conjunto coincide con la polar de su adherencia. Por tanto

$$[t(U)]^\circ = [\overline{t(U)}]^\circ$$

En consecuencia

$$t'^{-1}(U^\circ) = [t(U)]^\circ \text{ es } \sigma(F',F)\text{-compacto en } F'.$$

~~Como $t' : F'_\sigma \to E^*_\sigma$ es débilmente continua se verifica que~~

~~$t'(t'^{-1}(U^\circ))$ es $\sigma(E^*,E)$-compacto en E^*.~~

Como N' es casi-cerrado en F' se verifica que $N' \cap t'^{-1}(U^\circ)$ es $\sigma(F',F)$-cerrado y por tanto $\sigma(F',F)$-compacto, pues está contenido en el $\sigma(F',F)$-compacto $t'^{-1}(U^\circ)$.

Como $t' : F'_\sigma \to E^*_\sigma$ es débilmente continua se verifica que

$$t'(N' \cap t'^{-1}(U^\circ)) \text{ es } \sigma(E^*,E)\text{-compacto}.$$

Como $t'(N' \cap t'^{-1}(U^\circ)) \subset E'$ se verifica que $t'(N' \cap t'^{-1}(U^\circ))$ es $\sigma(E',E)$-compacto y, en particular, es $\sigma(E',E)$-cerrado. c.q.d.

1.4. TEOREMA: Sea E un espacio supracompleto. Sea F un espacio localmente convexo. Si existe una aplicación $t : E \to F$ lineal, continua, casi-abierta y suprayectiva, entonces F es supracompleto.

Demostr.: Sea N' un subespacio casi-cerrado de F'. Se trata de probar que N' es $\sigma(F',F)$-cerrado.

Puesto que t es continua, su traspuesta es

$$t' : F' \to E'.$$

Por el lema anterior, siendo t lineal y casi-abierta, se verifica que $t'(N')$ es $\sigma(E',E)$-cerrado en E' (pues E es supracompleto).

Como t' es débilmente continua se tiene que

$$t'^{-1}(t'(N')) \text{ es } \sigma(F',F)\text{-cerrado en } F'.$$

Veamos que $t'^{-1}(t'(N')) = N'$, con lo cual quedará terminada la demostración. Basta ver que t' es inyectiva y para ello basta probar la implicación $t'(y') = 0 \Rightarrow y' = 0$.

Sea $y' \in F'$ tal que $t'(y') = 0$.

$\forall y \in F$, $\langle y, y' \rangle \overset{t \text{ sobre}}{=} \langle t(x), y' \rangle = \langle x, t'(y') \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$.

1.5 COROLARIO: Si E es un espacio supracompleto y M es un subespacio cerrado de E entonces E/M provisto de la topología cociente es supracompleto.

Demostr.: La aplicación canónica $K: E \to E/M$ es lineal, continua y suprayectiva. Además es abierta, pues si $\mathcal{U}$ es base de 0-entornos de E, $\{K(U)\}_{U\in\mathcal{U}}$ es base de 0-entornos en E/M. En particular, K es casi-abierta. Basta entonces aplicar el teorema anterior para concluir que E/M es supracompleto. csqd.

2. TEOREMAS DEL GRAFO CERRADO Y DE LA APLICACION ABIERTA.

DEFINICION: (Grafo de una aplicación)

Sean X e Y conjuntos arbitrarios y $f: X \to Y$ una aplicación. Se llama grafo de la aplicación f al conjunto

$$G = \{(x, f(x)) \in X \times Y \,/\, x \in X\}.$$

2.1. PROPOSICION: Sean X e Y espacios topológicos. Si Y es separado y $f: X \to Y$ es una aplicación continua, entonces el grafo de f es un conjunto cerrado en $X \times Y$.

Demostr.: Probaremos que $\overline{G} \subset G$, para lo cual basta probar que si $(x,y) \notin G$ entonces $(x,y) \notin \overline{G}$.

Si $(x,y) \notin G$, se verifica que $y \neq f(x)$ y puesto que Y es separado, existen entornos U de $f(x)$ y V de y disjuntos. Como f es continua $f^{-1}(U)$ es entorno de x en X. Entonces $f^{-1}(U) \times V$ es un entorno de (x,y) en $X \times Y$. Probemos que dicho entorno no corta a G, con lo cual $(x,y) \notin \overline{G}$. Si cortase a G, existiría $z \in X$ tal que

$$(z, f(z)) \in f^{-1}(U) \times V.$$

Se verificaría entonces que $f(z) \in V$ y $z \in f^{-1}(U)$ con lo cual se tendría que $f(z) \in U \cap V$, en contra de que $U \cap V = \emptyset$. Luego $(x,y) \notin \overline{G}$. csqd.

2.2. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos y $t: E \to F$ una aplicación lineal continua. Entonces el grafo de t es un subespacio vectorial cerrado de $E \times F$.

La demostración es trivial, pues G es cerrado por la proposición anterior y es subespacio vectorial por ser t lineal. ■

A la vista de este resultado se nos plantea el siguiente problema: ¿bajo qué condiciones el hecho de que el grafo de una aplicación lineal t sea cerrado implica que t sea continua? A este problema responde el teorema del grafo cerrado que veremos más adelante.

2.3. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos y E' y F' sus duales topológicos. Sea $t: E \to F$ una aplicación lineal y $t': F' \to E^*$ su traspuesta. Son equivalentes las proposiciones siguientes:

i) El grafo de t es cerrado en $E \times F$.

ii) $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-denso en F'.

iii) $[t'^{-1}(E')]^\circ = \{0\}$, donde la polar se toma respecto de (F,F').

Demostr:

ii) $\Leftrightarrow$ iii) $t'^{-1}(E')$ es un subespacio de F'. Por tanto, $[t'^{-1}(E')]^\circ = [t'^{-1}(E')]^\perp$.

Recordemos que $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-denso en F' si, y solo si, cada funcional lineal continuo sobre F' que se anula sobre $t'^{-1}(E')$ es idénticamente nulo.

Por tanto, si $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-denso en F' entonces

$$y \in [t'^{-1}(E')]^\perp \Leftrightarrow y = 0$$

y recíprocamente si $[t'^{-1}(E')]^\perp = \{0\}$, entonces $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-denso en F'.

i) $\Leftrightarrow$ iii) Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero absolutamente convexos y cerrados en E.

Entonces $E' = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ$, donde U° es la polar de U respecto de (E,E^*).

Entonces $t'^{-1}(E') = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} t'^{-1}(U^\circ) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} [t(U)]^\circ$

donde $[t(U)]^\circ$ es la polar de $t(U)$ respecto de (F,F').

Por tanto,

$$[t'^{-1}(E')]^\circ = \left[\bigcup_{U \in \mathcal{U}} [t(U)]^\circ\right]^\circ = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [t(U)]^{\circ\circ} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{t(U)}$$

pues $t(U)$ es absolutamente convexo (aplicar th. de las bipolares).

Si $y \in [t'^{-1}(E')]^\circ$, entonces $y \in \overline{t(U)}$, $\forall U \in \mathcal{U}$. Luego, para todo V entorno de cero en F se verifica que

$$(y+V) \cap t(U) \neq \emptyset, \ \forall U \in \mathcal{U}. \quad (I)$$

Veamos ahora que $(0,y) \in \overline{G}$, es decir, que

$\forall U$ entorno de cero en E, $\forall V$ entorno de cero en F, $[U \times (y+V)] \cap G \neq \emptyset$.

Por (I), $\exists\, z \in U \,/\, t(z) \in (y+V) \cap t(U)$.

Por tanto, $(z, t(z)) \in [U \times (y+V)] \cap G$.

Análogamente se prueba que si $(0,y) \in \overline{G}$ entonces para cada $V \in \mathcal{U}$ y cada V entorno de 0 en F, $[y+V] \cap t(U) \neq \emptyset$.

Entonces

i) $\Rightarrow$ iii) Si G es cerrado, $G = \overline{G}$.

Sea $y \in [t'^{-1}(E')]^{\circ}$. Segun lo visto anteriormente se deduce que $(0,y) \in \overline{G} = G$. Por tanto, $y = t(0) = 0$ por ser t lineal.

Luego $[t'^{-1}(E')]^{\circ} = \{0\}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Veamos que $\overline{G} \subset G$. Sea $(x,y) \in \overline{G}$.

Entonces $(0, y - t(x)) \in \overline{G}$ pues $\overline{G}$ es un subespacio (como clausura de un subespacio) y $(x,y) \in \overline{G}$ y $(x, t(x)) \in G \subset \overline{G}$.

Segun lo visto anteriormente se verifica que $y - t(x) \in [t'^{-1}(E')]^{\circ}$.

Por hipótesis, $[t'^{-1}(E')]^{\circ} = \{0\}$. Luego $y - t(x) = 0$ y por tanto, $y = t(x)$. Se deduce pues que $(x,y) \in G$. c.s.q.d.

2.4. COROLARIO: Sean E y F espacios localmente convexos, E' y F' sus duales, $t : E \to F$ una aplicación lineal y $t' : F' \to E^*$ su traspuesta. Si el grafo de t es cerrado, entonces $t^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de E.

Demostr.: Si el grafo G es cerrado, entonces $[t'^{-1}(E')]^{\circ} = \{0\} \subset F$.

Por tanto, $t^{-1}(0) = t^{-1}\left([t'^{-1}(E')]^{\circ}\right)$.

Pero $t^{-1}(A^{\circ}) = t'(A)^{\circ}$ si $A \subset F'$.

Luego $t^{-1}(0) = [t'(t'^{-1}(E'))]^{\circ}$.

Luego $t^{-1}(0)$ es débilmente cerrado, por ser un conjunto polar.

Como $t^{-1}(0)$ es un subespacio, es convexo y, por tanto, cerrado, pues los convexos cerrados son los mismos para todas las topologías compatibles. c.s.q.d.

DEFINICION: (Aplicación casi-continua)

Sean E y F espacios localmente convexos y $t : E \to F$ una aplicación lineal. Diremos que t es casi-continua si para cada V entorno de cero en F, $\overline{t^{-1}(V)}$ es entorno de cero en E.

Se deduce de la definición que toda biyección casi-continua tiene inversa casi-abierta y, toda biyección casi-abierta tiene inversa casi-continua.

De alguna forma, muchas de las propiedades que posee una aplicación lineal continua, las hereda su traspuesta si a la aplicación

2.5. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos y $t: E \to F$ una aplicación lineal casi-continua. Sea $t': F' \to E^*$ su traspuesta. Si M' es un subespacio casi-cerrado de E', entonces $t'^{-1}(M')$ es un subespacio casi-cerrado en F'.

Demostr.: Sea M' un subespacio casi-cerrado de E' y sea $N' = t'^{-1}(M')$. Se trata de probar que N' es casi-cerrado en F', es decir, que para cada entorno de cero V de F, $N' \cap V^\circ$ es $\sigma(F', F)$-cerrado.
Dado V entorno de cero en F, si $W = t^{-1}(V)$ se verifica que $\overline{W}$ es entorno de cero en E, por ser t casi-continua.
Por el teorema de Alaoglu-Bourbaki, $(\overline{W})^\circ$ es $\sigma(E', E)$-compacto en E'. Como M' es casi-cerrado se verifica que

$$M' \cap (\overline{W})^\circ \text{ es } \sigma(E', E)\text{-cerrado en } E'$$

y por tanto, $M' \cap (\overline{W})^\circ$ es $\sigma(E', E)$-compacto, pues es un cerrado contenido en el $\sigma(E', E)$-compacto $(\overline{W})^\circ$.
Por tanto, $M' \cap (\overline{W})^\circ$ es $\sigma(E^*, E)$-cerrado en E^* (aun más es $\sigma(E^*, E)$-compacto), pues $\sigma(E^*, E)$ induce en E' la topología $\sigma(E', E)$.
Pero $t': F' \to E^*$ es débilmente continua, pues su traspuesta $t'': E^{**} \to F'^*$ verifica que $t''(E) = t(E) \subset F$.
Luego $t'^{-1}(M' \cap (\overline{W})^\circ)$ es $\sigma(F', F)$-cerrado en F'.
Como $(\overline{W})^\circ = W^\circ$ se tiene que

$$t'^{-1}(M' \cap W^\circ) \text{ es } \sigma(F', F)\text{-cerrado en } F'.$$

Pero $t'^{-1}(M' \cap W^\circ) = t'^{-1}(M') \cap t'^{-1}(W^\circ) = N' \cap [t(W)]^\circ$
Pero $t(W) = V \cap t(E)$ pues $W = t^{-1}(V)$.
Luego $t'^{-1}(M' \cap W^\circ) = N' \cap [V \cap t(E)]^\circ$.

Como $V \cap t(E) \subset V$ se tiene que $V^\circ \subset [V \cap t(E)]^\circ$.
Luego

$$N' \cap V^\circ = N' \cap V^\circ \cap [V \cap t(E)]^\circ = t'^{-1}(M' \cap W^\circ) \cap V^\circ$$

Luego $N' \cap V^\circ$ es $\sigma(F', F)$-cerrado, pues $t'^{-1}(M' \cap W^\circ)$ es $\sigma(F', F)$-cerrado en F' y V°, como polar, es $\sigma(F', F)$ cerrado en F'. Luego $t'^{-1}(M')$ es casi-cerrado en F'. c.q.d.

El siguiente teorema consigue que los teoremas del grafo cerrado y de la aplicación abierta, resultados profundos del Análisis Funcional, aparezcan como simples corolarios suyos.

2.6. TEOREMA: Sean E y F espacios localmente convexos y $t: E \to F$ una aplicación lineal con grafo cerrado. Entonces

a) Si F es supracompleto y t es casi-continua se verifica que t es continua.

b) Si E es supracompleto y t es casi-abierta y suprayectiva, entonces t es abierta.

Demostr.: a) Veamos en un primer paso que t es débilmente continua. Basta para ello probar que si $t': F' \to E^*$ es su traspuesta, entonces $t'(F') \subset E'$, y para probar esto, es suficiente comprobar que $F' = t'^{-1}(E')$.

Para ver que $F' = t'^{-1}(E')$ es suficiente probar que

1) $t'^{-1}(E')$ es débilmente cerrado en F'.

2) $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-denso en F'.

En virtud de TEOREMA 2.3, puesto que el grafo de t es cerrado, se verifica que $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-denso en F'. Falta pues probar 1).

Es obvio que E' es casi-cerrado en E'. Por el teorema anterior, siendo t casi-continua, se verifica que $t'^{-1}(E')$ es casi-cerrado en F'. Como F es, por hipótesis, supracompleto, se ha de verificar que $t'^{-1}(E')$ es $\sigma(F',F)$-cerrado ($t'^{-1}(E')$ es subespacio).

Por tanto, t es débilmente continua.

Probemos ya que t es continua.

Sea V un entorno de cero absolutamente convexo y cerrado de cero en F. Entonces V es débilmente cerrado y $t^{-1}(V)$ es débilmente cerrado en E, pues t es débilmente continua. Es decir, $\overline{t^{-1}(V)}^{\sigma(E,E')} = t^{-1}(V)$.

Puesto que $t^{-1}(V)$ es convexo, se verifica que $\overline{t^{-1}(V)} = \overline{t^{-1}(V)}^{\sigma(E,E')}$.

Luego $t^{-1}(V) = \overline{t^{-1}(V)}$ y, por tanto, $t^{-1}(V)$ es entorno de cero en E, pues $\overline{t^{-1}(V)}$ lo es, por ser t casi-continua.

En definitiva, t es continua.

b) Puesto que $t: E \to F$ tiene grafo cerrado, por hipótesis, $t^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de E (COROLARIO 2.4).

Consideremos el espacio cociente $E/t^{-1}(0)$, que es separado por ser $t^{-1}(0)$ cerrado.

Puesto que E es supracompleto, $E/t^{-1}(0)$ es supracompleto (COROLARIO 1.5).

Consideremos la factorización de t siguiente: $t = s \circ K$ donde $K: E \to E/t^{-1}(0)$ es la suprayección canónica y

$$s : x + t^{-1}(0) \in E/t^{-1}(0) \longmapsto s[x + t^{-1}(0)] = t(x) \in F.$$

La aplicación s es trivialmente biyectiva, pues t es sobre.
Veamos que s es casi-abierta.
$\{K(U)\}_{U \in \mathcal{U}}$ es base de 0-entornos en $E/t^{-1}(0)$ si $\mathcal{U}$ lo es en E.
Sea pues $U \in \mathcal{U}$ y consideremos $\overline{s(K(U))}$.
Puesto que $t = s \circ K$ se verifica que $\overline{s(K(U))} = \overline{t(U)}$ que es entorno de cero en F por ser t casi-abierta. Luego s es casi-abierta. Como s es biyectiva y casi-abierta, su inversa

$$s^{-1} : F \longrightarrow E/t^{-1}(0)$$

es casi-continua.

Probemos que s^{-1} tiene grafo cerrado.
Puesto que s es biyectiva, s^{-1} tiene grafo cerrado si, y sólo si, s tiene grafo cerrado.

Basta pues probar que s tiene grafo cerrado.
Sean $t' : F' \to E^*$, $s' : F' \to [E/t^{-1}(0)]^*$ y $K' : [E/t^{-1}(0)]^* \to E^*$ las traspuestas de t, s y K. Puesto que $t = s \circ K$ se verifica que $t' = K' \circ s'$

Sabemos que la traspuesta de K es la inmersión canónica de $[E/t^{-1}(0)]^*$ en E^*. (VER TEMA 8: 1. ESPACIOS COCIENTES).
En particular, puesto que K es continua

$$K'([t^{-1}(0)]^\circ) \subset E'$$

donde, como sabemos, $[t^{-1}(0)]^\circ$ es el dual de $E/t^{-1}(0)$.
Como t tiene grafo cerrado, $t'^{-1}(E')$ es débilmente denso en F'.
Siendo $t' = K' \circ s'$ se tiene que

$$t'^{-1}(E') = s'^{-1}\left(K'^{-1}(E')\right) = s'^{-1}\left([t^{-1}(0)]^\circ\right) =$$

$$= s'^{-1}\left([E/t^{-1}(0)]'\right)$$

Por tanto, $s'^{-1}([E/t^{-1}(0)]')$ es $\sigma(F', F)$-denso en F' lo que prueba ya que s tiene grafo cerrado (TEOREMA 2.3), y por tanto, s^{-1} tiene grafo cerrado.
En resumen: s^{-1} es una aplicación lineal, casi-continua con grafo cerrado valorada en el espacio supracompleto $E/t^{-1}(0)$.
Por a) se verifica que s^{-1} es continua y, en consecuencia,

s es abierta. Puesto que K es abierta se concluye que $t = s \circ K$ es abierta. c.s.q.d.

Por fin

2.7. TEOREMA: (DEL GRAFO CERRADO)

> Sea E un espacio tonelado y F un espacio supracompleto. Si $t: E \to F$ es una aplicación lineal con grafo cerrado, entonces t es continua.

Demostr.: Sea V un entorno de cero absolutamente convexo en F. Entonces $\overline{t^{-1}(V)}$ es un disco cerrado en E.

Probemos que es absorbente:

Sea $x \in E$; entonces $t(x) \in F$ y por tanto, $\exists \lambda > 0 \,/\, \lambda t(x) \in V$, pues V es absorbente. Luego $\lambda x \in t^{-1}(V)$, que prueba que $t^{-1}(V)$ es absorbente y, por tanto, $\overline{t^{-1}(V)}$ también lo es.

Luego $\overline{t^{-1}(V)}$ es un tonel en E y, por tanto, entorno de cero, pues E es tonelado.

Luego t es una aplicación lineal casi-continua y con grafo cerrado. En virtud del teorema anterior, siendo F supracompleto, se deduce que t es continua. c.s.q.d.

Puesto que los espacios de Fréchet son tonelados y supracompletos, obtenemos como corolario el siguiente

2.8. TEOREMA: (del grafo cerrado para espacios de Fréchet)

> Si E y F son espacios de Fréchet y $t: E \to F$ es una aplicación lineal con grafo cerrado, entonces t es continua.

2.9. TEOREMA: (DE LA APLICACION ABIERTA).

> Sea E un espacio supracompleto y F un espacio tonelado. Si $t: E \to F$ es una aplicación lineal, suprayectiva y continua, entonces t es abierta.

Demostr.: Sea U un entorno de cero absolutamente convexo en E. Entonces $\overline{t(U)}$ es un disco cerrado en F.

Veamos que es absorbente: Dado $y \in F$, $\exists x \in E \,/\, y = t(x)$, por ser t suprayectiva. Como U es absorbente, $\exists \lambda > 0 \,/\, \lambda x \in U$.

Entonces $\lambda y = \lambda t(x) \in \cancel{\lambda}\, t(U) \subset \cancel{\lambda}\, \overline{t(U)}$.

Luego $\overline{t(U)}$ es un tonel en F y, por tanto, un entorno de cero, por ser F tonelado. Luego t es casi-abierta.

Puesto que t es continua, tiene grafo cerrado.

Luego t es una aplicación lineal suprayectiva con grafo cerrado y casi-abierta. Siendo E supracompleto, t es abierta (TEOREMA 2.6). csqd.

Y para espacios de Fréchet

2.10. TEOREMA: (de la aplicación abierta para espacios de Fréchet).

Si E y F son espacios de Fréchet y $t: E \to F$ es una aplicación lineal, suprayectiva y continua, entonces t es abierta.

2.11. COROLARIO: En las hipótesis del teorema de la aplicación abierta, si t es biyectiva, entonces t^{-1} es continua.

Demostr. Si t es biyectiva y abierta, t^{-1} es continua. ■

2.12. COROLARIO: Si E es un espacio tonelado que es imagen lineal continua de un espacio supracompleto E_0, entonces E es supracompleto.

Demostr.: Sea $\varphi: E_0 \to E$ una aplicación lineal suprayectiva y continua. Puesto que E_0 es supracompleto y E es tonelado, se verifica que φ es abierta, y en particular, casi-abierta.

Por TEOREMA 1.4, E es supracompleto. csqd.

2.13. COROLARIO: Sea E un espacio supracompleto. Entonces E no admite una topología tonelada estrictamente menos fina que su propia topología.

Demostr.: Supongamos que E admite una topología tonelada estrictamente menos fina que la original de E. Denotamos por E_0 el espacio E provisto de dicha topología.

La identidad $I: E \to E_0$ es lineal, suprayectiva y continua. Como es biyectiva, por COROLARIO 2.11, I^{-1} es continua.

Por tanto, I es un isomorfismo topológico, en contra de que la topología de E_0 es estrictamente menos fina que la de E.

Debe, pues, satisfacerse la tesis. ■

Los teoremas siguientes prueban que las hipótesis de los teoremas de gráfica cerrada y de la aplicación abierta son óptimas.

<u>HIPOTESIS DE TONELACION</u>: "Si se satisface un teorema de grafo cerrado, el primer espacio (E) es necesariamente tonelado."

Basta para probar esto demostrar el siguiente

<u>2.14. TEOREMA</u>: Sea E un espacio localmente convexo separado. Supongamos que para cada espacio de Banach F y para cada aplicación lineal $t: E \to F$ con grafo cerrado se verifica que t es continua. Entonces E es necesariamente tonelado.

Demostr.: Sea B un tonel en E y probemos que es entorno de cero.

Es trivial comprobar que

$$N = \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon B$$

es un subespacio cerrado de E.

Consideremos el espacio vectorial cociente E/N.

Sea $K: E \longrightarrow E/N$ la suprayección canónica.

Entonces $K(B)$ es un disco absorbente en E/N.

Sea p la gauge de $K(B)$ en E/N.

Probemos que p es una norma en E/N.

- p es una seminorma en E/N, por ser $K(B)$ un disco absorbente.
- Si $x \in E$ verifica que $p(K(x)) = 0$ entonces $K(x) = 0$:

$p(K(x)) = 0 \Rightarrow K(x) \in \varepsilon K(B), \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow K(x) \in K(\varepsilon B), \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \varepsilon B + N, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow x \in \varepsilon B + \varepsilon B = 2\varepsilon B, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in N \Rightarrow K(x) = 0$.

Dotemos a E/N de la topología deducida de la norma p.

Sea F la compleción de $(E/N, p)$.

Entonces F es un espacio de Banach.

Como $K(B)$ es la bola unidad cerrada en $(E/N, p)$, se verifica que $\overline{K(B)}^F$ es la bola unidad cerrada en F. Sea $V = \overline{K(B)}^F$.

Se verifica que $K(B) = V \cap E/N$ pues

$V = K(B)^{\circ\circ}$, donde $K(B)^{\circ\circ}$ es la polar de $K(B)^\circ$ respecto de $((E/N)'^{*}, (E/N)')$

Luego $V \cap E/N = K(B)^{\circ\circ} = K(B)$ por ser $K(B)$ un disco cerrado.

La aplicación $K: E \to F$ es lineal. Veamos que tiene grafo cerrado.

Supongamos que se verifica esto y probemos la tesis del teorema. Puesto que K es una aplicación lineal con grafo cerrado valorada en un espacio de Banach (F) se verifica por la hipótesis que K es continua, y, por tanto, $K^{-1}(V)$ es entorno de cero en E, pues V es la bola unidad en F.

Pero $K^{-1}(V) = K^{-1}(V \cap E/N)$ pues $K(E) = E/N$.

Por tanto, $K^{-1}(V) = K^{-1}(K(B)) = B$.

Luego B es entorno de cero, como queremos probar.

Veamos ahora que el grafo G de K es cerrado.

Sea $(x,y) \in \overline{G} \subset E \times F$. Probemos que $y = K(x)$, con lo cual $(x,y) \in G$ y, por tanto, G será cerrado.

Para ver que $y = K(x)$ basta probar que $y - K(x) \in \varepsilon V$, $\forall \varepsilon > 0$, pues $\bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon V = \{0\}$ por ser V la bola unidad de F, y F separado.

Sea $\varepsilon > 0$. Como E/N es denso en F, existe $z \in E$ tal que

$$K(z) \in (y - K(x)) + \varepsilon V.$$

Sea U un entorno arbitrario de cero en E y consideremos el entorno de (x,y)

$$(x+U) \times (y + \varepsilon V)$$

Como $(x,y) \in \overline{G}$, dicho entorno corta a G.

Sea $t \in E$ tal que $(t, K(t)) \in (x+U) \times (y + \varepsilon V)$.

Entonces, $K(x+U) \cap (y + \varepsilon V) \neq \emptyset$ y, por tanto, existe $u \in U$ tal que

$$K(x) + K(u) \in y + \varepsilon V.$$

Se deduce de esto que

$$y - K(x) \in K(U) - \varepsilon V = K(U) + \varepsilon V \quad \text{pues } V \text{ es equilibrado.}$$

Por tanto, $K(z) \in y - K(x) + \varepsilon V \subset K(U) + 2\varepsilon V$.

Es decir, $K(z) \in K(U) + 2\varepsilon \overline{K(B)}^F$

Como $K(z) \in E/N$ y $K(U) \subset E/N$ se verifica que existe $w \in \overline{K(B)}^F \cap E/N$ tal que $K(z) \in K(U) + 2\varepsilon w$ y por tanto

$$z \in U + 2\varepsilon B + N \subset U + 2\varepsilon B + \varepsilon B = U + 3\varepsilon B.$$

Como esto es cierto para todo U entorno de cero en E, se tiene que

$$z \in 3\varepsilon \overline{B}^E = 3\varepsilon B$$

por ser B cerrado en E.

Luego $y - K(x) \in K(z) - \varepsilon V = K(z) + \varepsilon V \subset 3\varepsilon K(B) + \varepsilon V \subset 3\varepsilon V + \varepsilon V = 4\varepsilon V$.

Luego $y - K(x) \in 4\varepsilon V$.

Como ε es arbitrario se deduce que $y - K(x) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \varepsilon V = \{0\}$

y, por tanto, $y = K(x)$. c.s.q.d.

NOTA: No es cierto que $K(B) = V \cap E/N$, pues no podemos garantizar que $K(B)$ sea cerrado (como se dijo en la demostración). No obstante, se satisface que $K(B) \subset V \cap E/N$. Puesto que V es la bola unidad cerrada de F es acotada y, por tanto, $V \cap E/N$ es acotado en E/N y, por tanto, $\exists \lambda > 0$ tal que

$$V \cap E/N \subset \lambda K(B)$$

pues $K(B)$ es la bola unidad en E/N.

Puesto que K es continua, $K^{-1}(V)$ es entorno de cero en E. Pero

$$K^{-1}(V) = K^{-1}(V \cap E/N) \subset K^{-1}(K(\lambda B)) = \lambda B + N \subset \lambda B + B = (\lambda+1)B.$$

Luego $(\lambda+1)B$ es entorno de cero y, por tanto, B es entorno de cero en E. $\blacksquare$

HIPOTESIS DE SUPRACOMPLETITUD: Del TEOREMA 2.6, b), deducimos el teorema de la aplicación abierta. Probemos que en dicho resultado es necesaria la hipótesis de supracompletitud. Más concretamente

2.15. TEOREMA: Sea E un espacio localmente convexo con la propiedad de que toda aplicación lineal, suprayectiva, casi-abierta y con grafo cerrado definida en E y valorada en un espacio localmente convexo F es abierta. Entonces E es supracompleto.

Demostr.: Sea M' un subespacio casi-cerrado de E'. Se trata de probar que M' es $\sigma(E',E)$-cerrado.

La polar de M' respecto de (E,E') es un subespacio de E (que es cerrado). Consideremos el espacio vectorial cociente E/M'°, y la suprayección canónica $K: E \to E/M'^{\circ}$.

Consideremos la paridad $(E/M'^{\circ}, M')$ donde

$$\langle x + M'^{\circ}, x' \rangle \longmapsto \langle x, x' \rangle$$

Esta paridad está bien definida, pues $\forall y \in M'^{\circ}$, $\forall x' \in M'$, $\langle y, x'\rangle = 0$ pues $M'^{\circ} = M'^{\perp}$ por ser M' subespacio.

Sea $\mathcal{U}$ una base de entornos de cero de E.

Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de M' siguientes

$$\mathcal{A} = \{M' \cap U^{\circ}\}_{U \in \mathcal{U}}.$$

Denotemos por F el espacio E/M'° provisto de la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia, respecto de la paridad $(E/M'^{\circ}, M')$.

Una base de 0-entornos de F es

$$\{(M' \cap U^{\circ})^{\circ}\}_{U \in \mathcal{U}} \quad (*)$$

(*) Notar que U° es la polar de U respecto de (E,E') y $(M' \cap U^{\circ})^{\circ}$ es la polar de $M' \cap U^{\circ}$ respecto de $(E/M'^{\circ}, M')$.

Veamos que dicha topología es compatible con la paridad $(E/M'^{o}, M')$, es decir, que $F' = M'$.

Para cada $U \in \mathcal{U}$, U^{o} es $\sigma(E', E)$-compacto.
Como M' es casi-cerrado, $M' \cap U^{o}$ es $\sigma(E', E)$-cerrado.
Puesto que $M' \cap U^{o} \subset U^{o}$ se verifica que $M' \cap U^{o}$ es $\sigma(E', E)$-compacto, y por tanto, $M' \cap U^{o}$ es $\sigma(M', E)$-compacto, pues $M' \cap U^{o} \subset M'$ $\sigma(M', E)$ está generada por las seminormas determinadas por los elementos de E. Pero todos los x de E que están en una misma clase de equivalencia de E/M'^{o} dan el mismo valor actuando sobre un $x' \in M'$ fijo. Luego $\sigma(M', E) = \sigma(M', E/M'^{o})$.
Por tanto, $M' \cap U^{o}$ es $\sigma(M', E/M'^{o})$-compacto.

Luego los elementos de $\mathcal{A}$ son discos $\sigma(M', E/M'^{o})$-compacto y, por tanto, por el teorema de Mackey-Arens, la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia es compatible, i.e., $F' = M'$.

Probemos ahora que $K: E \to F$ es continua y casi-abierta.

- K es casi-abierta: dado $U \in \mathcal{U}$, $\overline{K(U)}^{F} = K(U)^{oo}$ por el teorema de las bipolares, donde las polares se toman respecto de $(E/M'^{o}, M')$.
Pero $K(U)^{oo} = [K'^{-1}(U^{o})]^{o}$. Luego $\overline{K(U)}^{F} = [K'^{-1}(U^{o})]^{o}$.
La traspuesta de la suprayección canónica K es la inmersión canónica del dual de F, que es M', en el dual de E, es decir
$$K': M' \hookrightarrow E'$$
Luego $K'^{-1}(U^{o}) = M' \cap U^{o}$.
Por tanto, $\overline{K(U)}^{F} = (M' \cap U^{o})^{o}$, que es entorno de cero para la topología de F. Luego K es casi-abierta.
- K es continua: Sabemos que $K: E \to E/M'^{o}$ es continua si E/M'^{o} está provisto de la topología cociente. Si probamos que la topología de la $\mathcal{A}$-convergencia en E/M'^{o} (topología de F) es menos fina que la topología cociente, quedará probado que $K: E \to F$ es continua. Probémoslo:
$$\forall U \in \mathcal{U}, \quad K(U) \subset \overline{K(U)}^{F} = (M' \cap U^{o})^{o}.$$
Luego cada entorno de cero por la topología de F contiene a un entorno de cero por la topología cociente. Luego K es continua.
En particular, K tiene grafo cerrado.

Luego K es una aplicación lineal, suprayectiva, casi-abierta y con grafo cerrado. Por la hipótesis, K es abierta.

Luego $K: E \to F$ es continua y abierta. La aplicación $K: E \to E/M'^{o}$ es también continua y abierta.

Por tanto, las topologías de F y de E/M'^{o} coinciden.

En consecuencia, $F' = (E/M'^{o})'$.

Pero $F' = M'$ y $(E/M'^{o})' = M'^{oo}$.

Luego $M' = M'^{oo}$ y, por tanto, M' es $\sigma(E', E)$-cerrado.

En definitiva, E es supracompleto. csqd.