TEMA 11º: ESPACIOS DE FRÉCHET

Recordamos que un espacio de Fréchet es un espacio localmente convexo metrizable y completo.

Recogeremos en este tema algunos resultados ya conocidos para espacios de Fréchet, juntos con otros que probaremos ahora.

TEOREMA 1: Si un espacio localmente convexo F es imagen de un espacio de Fréchet E por una aplicación lineal suprayectiva continua y abierta, entonces F es de Fréchet.

Demostr.: Sea $t: E \to F$ una aplicación que satisface las condiciones del enunciado. Probemos que F es de Fréchet.

Siendo E metrizable, podemos seleccionar una base de entornos de cero numerable y decreciente $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que

$$U_{n+1} \subset \frac{1}{2} U_n, \ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Consideremos la familia $\{t(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ en F. Los elementos de dicha familia son entornos de cero, por ser t abierta, y constituyen una base de 0-entornos en F, por ser t continua.

Por tanto, F es metrizable.

Probemos ahora que F es completo, para lo cual, por ser ya metrizable, es suficiente probar que F es secuencialmente completo.

Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en F.

Entonces, $\{y_n\}_n$ admite una subsucesión $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de forma que

$$y_{n_{i+1}} - y_{n_i} \in t(U_i), \ \forall i\in\mathbb{N} \qquad (I)$$

Puesto que t es sobre, para cada $i\in\mathbb{N}$ podemos elegir un $x_{n_i}\in E$ tal que $t(x_{n_i}) = y_{n_i}$, y de forma que (por (I)):

$$x_{n_{i+1}} - x_{n_i} \in U_i, \ \forall i\in\mathbb{N}$$

Consideremos la sucesión $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ en E.

Veamos que es de Cauchy:

Dados $i<j\in\mathbb{N}$, $x_{n_j} - x_{n_i} = (x_{n_j} - x_{n_{j-1}}) + (x_{n_{j-1}} - x_{n_{j-2}}) + \dots + (x_{n_{i+1}} - x_{n_i})$

Luego

$$x_{n_j} - x_{n_i} \in U_{n_j-1} + U_{n_j-2} + \dots + U_{n_i} \qquad (*)$$

Por tanto

$$x_{n_j} - x_{n_i} \in \left(\frac{1}{2^{n_j-n_i}} + \frac{1}{2^{n_j-n_i-1}} + \dots + \frac{1}{2}\right) U_{n_i-1} \subset U_{n_i-1}$$

Luego $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Puesto que E es completo, $\{x_{n_i}\}_i$ converge a un punto $x \in E$. Siendo t continua se verifica que

$$\{y_{n_i}\}_i \xrightarrow[F]{} t(x)$$

Luego toda sucesión de Cauchy en F posee una subsucesión convergente. Se concluirá de aquí que toda sucesión de Cauchy en F es convergente y, por tanto, F es completo. c.s.q.d.

COROLARIO 2: Sea E un espacio de Fréchet y M un subespacio cerrado de E. Entonces E/M provisto de la topología cociente es de Fréchet.

Demostr.: Basta observar que la supraproyección canónica $K: E \to E/M$ es lineal, supraproyectiva, continua y abierta, y aplicar el teorema anterior. ∎

OBSERVACION: Se prueba que existen espacios completos no metrizables que admiten cocientes separados no completos.

Enunciemos ahora el siguiente teorema ya conocido

TEOREMA 3: (del grafo cerrado y de la aplicación abierta)

Sean E y F espacios de Fréchet y $f: E \to F$ una aplicación lineal.

a) Si f tiene grafo cerrado, entonces f es continua.

b) Si f es supraproyectiva y continua, entonces f es abierta.

En particular, si f es biyectiva y continua, es un isomorfismo topológico.

COROLARIO 4: Si E es un espacio vectorial y τ_1 y τ_2 son dos topologías de Fréchet comparables, entonces dichas topologías coinciden.

Demostr.: Supongamos que $\tau_1 \geq \tau_2$. Entonces la identidad $I: E_{\tau_1} \longrightarrow E_{\tau_2}$ es una biyección lineal continua y, por el teorema anterior, es un isomorfismo topológico. csqd.

TEOREMA 5: Si E es un espacio de Fréchet y M y N son subespacios cerrados de E algebraicamente complementarios ($E = M \oplus_a N$) entonces $E = M \oplus_t N$ (son topológicamente complementarios)

Demostr.: Puesto que M y N son subespacios cerrados de un espacio de Fréchet, se deduce que M y N, con las topologías inducidas, son espacios de Fréchet.

Entonces $M \oplus_t N$ es un espacio de Fréchet (pues $M \oplus_t N$ es isomorfo a $M \times N$ con la topología producto, y el producto de espacios metrizables (completos) es metrizable (completo)).

Por hipótesis, $E = M \oplus_a N$.

Tenemos entonces en E dos topologías de Fréchet que son comparables (la de E es menos fina que la topología producto). Por el COROLARIO 4 ambas topologías coinciden. c.s.q.d.

El siguiente teorema mejora el teorema de la aplicación abierta.

TEOREMA 6: Sean E y F espacios de Fréchet y $t: E \to F$ una aplicación lineal continua. Entonces, $t: E \to t(E)$ es una aplicación abierta si, y sólo si, $t(E)$ es un subespacio cerrado de F.

Demostr.: $\Leftarrow$) Si $t(E)$ es cerrado en F, $t(E)$ provisto de la topología inducida por la de F es un espacio de Fréchet.

Entonces $t: E \to t(E)$ es una aplicación lineal, suprayectiva y continua entre dos espacios de Fréchet. Luego $t: E \to t(E)$ es abierta (Th. aplicación abierta).

$\Rightarrow$) Si $t: E \to t(E)$ es abierta, se verifica que $t: E \to t(E)$ es una aplicación lineal, suprayectiva, continua y abierta. Como E es de Fréchet, $t(E)$ también lo es (Th. 1) y, en particular, $t(E)$ es cerrado. c.s.q.d.

DEFINICION: Sea E un espacio localmente convexo y E' su dual topológico. Se llama topología de la convergencia compacta $K(E', E)$ en E' la topología polar en E' de la convergencia uniforme sobre todos los conjuntos compactos de E.

TEOREMA 7: Sea E un espacio de Fréchet. Entonces su dual topológico E' es completo para cualquier topología polar $\mathcal{T}$ en E' satisfaciendo que

$$K(E', E) \leq \mathcal{T} \leq \beta(E', E).$$

Basta para probarlo recordar la PROPOSICION 1.12 (TEMA 9°).

COROLARIO 8: a) El dual fuerte de un espacio de Fréchet es completo.

b) El dual E' de un espacio de Fréchet E provisto de la topología de la convergencia compacta $K(E', E)$, es completo.

COROLARIO 9: Si E es de Fréchet, la topología de Mackey $\tau(E',E)$ en E' verifica que

$$K(E',E) \leq \tau(E',E) \leq \beta(E',E).$$

En particular, E' provisto de la topología de Mackey es completo.

Demostr. $K(E',E)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de E y $\tau(E',E)$ es la topología de la convergencia uniforme sobre los discos débilmente compactos de E.

Si probásemos que cada compacto de E está contenido en un disco débilmente compacto habríamos probado el teorema.

Sea, pues, K un compacto de E. Como E es completo $\overline{\Gamma(K)}$ es un disco compacto en E y, por tanto, un disco débilmente compacto de E. c.s.q.d.

OBSERVACION: Se puede probar algo más: "Si τ es una topología polar sobre el dual E' de un espacio de Fréchet E de forma que $K(E',E) \leq \tau \leq \tau(E',E)$, entonces τ es una topología supracompleta."

Sabemos que el dual fuerte de un espacio normado es un espacio de Banach, y por tanto, de Fréchet. El siguiente teorema prueba que, dentro de la categoría de los espacios metrizables, sólo los espacios normables tienen dual fuerte metrizable y, en particular, sólo los espacios normables tienen dual fuerte de Fréchet.

TEOREMA 10: Sea E un espacio localmente convexo metrizable de forma que su dual fuerte es metrizable. Entonces, necesariamente, E es normable. En particular, un espacio metrizable E tiene dual fuerte de Fréchet si, y sólo si, E es normable.

Demostr.: Sea E un espacio metrizable de forma que su dual fuerte E'_β es metrizable.

Sea $\{U_n\}_n$ una base numerable decreciente de entornos de cero en E.

Como E'_β es metrizable, existe en E'_β una base numerable decreciente de entornos de cero y, por tanto, existe en E una base de acotados numerable y creciente. Sea $\{A_n\}_n$ dicha base de acotados en E.

Probemos que existe un índice $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset A_n$.

Si ocurriese que $U_n \not\subset A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ se verificaría

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in U_n$ / $x_n \notin A_n$.

La sucesión $\{x_n\}_n$ converge a cero por ser $\{U_n\}_n$ base de entornos de cero y, en particular, es acotada. Como $\{A_n\}_n$ es base de acotados, deberá existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x_n\}_n \subset A_{n_0}$ lo cual contradice que $x_{n_0} \notin A_{n_0}$.

Luego debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_n \subset A_n$.
Por tanto, U_n es acotado y, en consecuencia, E es un espacio normable, pues admite un entorno de cero acotado (Th. de Kolmogorov). c.q.d.

COROLARIO 11: Si el dual fuerte de un espacio de Fréchet E es de Fréchet, entonces E es un espacio de Banach.

No siempre ocurre que el dual fuerte de un espacio de Fréchet sea de Fréchet (como hemos visto esto sólo ocurre cuando el espacio de Fréchet es normable, i.e., cuando es de Banach). Sin embargo

COROLARIO 12: El bidual fuerte $E'' - \beta(E'', E')$ de un espacio de Fréchet E es un espacio metrizable y completo (i.e., E''_β es de Fréchet)

Demostr.: a) E''_β es metrizable:
Puesto que E es de Fréchet es tonelado y, en particular, casi-tonelado (i.e., en E' coinciden los equicontinuos y los fuertemente acotados).

Sea $\{U_n\}_n$ una base numerable de entornos de cero en E.
Sabemos que $\{U_n^\circ\}_n$ es una base de equicontinuos en E' y, por ser E casi-tonelado, $\{U_n^\circ\}_n$ es una base de conjuntos fuertemente acotados en E', es decir, una base de acotados en E'_β.

Si consideramos ahora las polares $U_n^{\circ\circ}$ de los conjuntos U_n° respecto de la paridad (E', E'') obtenemos que $\{U_n^{\circ\circ}\}_n$ es una base de entornos de cero en E''_β y, por tanto, E''_β es metrizable.

b) E''_β es completo: Puesto que E''_β es metrizable basta probar que es secuencialmente completo.

Sea $\{U_n\}_n$ una base numerable de entornos de cero absolutamente convexos en E verificando que
$$U_{n+1} \subset \frac{1}{2} U_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Entonces $\{U_n^{\circ\circ}\}_n$ es una base de entornos de cero en E''_β.

Sea entonces $\{x''_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en E''_β.
Existe entonces una subsucesión de $\{x''_n\}_n$, que seguiremos denotando por $\{x''_n\}_n$ para no cargar la notación, satisfaciendo que

$$x''_{n+1} - x''_n \in \frac{1}{2} U_n^{\circ\circ} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fijo $n\in\mathbb{N}$, $x''_{n+1}-x''_n$ es una forma lineal continua sobre E'_β y portanto el conjunto unitario $\{x''_{n+1}-x''_n\}$ es equicontinuo en $(E'_\beta)'$. Por tanto, $\{x''_{n+1}-x''_n\}$ esta contenido en la polar de un entorno de cero en E'_β V_n que podemos tomar de la forma $V_n=(\frac{1}{2}A_n)^\circ$ donde A_n es acotado en E. Es decir

$$\{x''_{n+1}-x''_n\} \subset V_n^\circ = \frac{1}{2} A_n^{\circ\circ}.$$

Por tanto

$$x''_{n+1}-x''_n \in \frac{1}{2}(U_n^{\circ\circ}\cap A_n^{\circ\circ}) \subset (U_n^\circ + A_n^\circ)^\circ \quad (*)$$

Se verifica que $U_n^\circ \cup A_n^\circ \subset (U_n^\circ + A_n^\circ)$ pues $0\in U^\circ \cap A_n^\circ$.
Pero $U_n^\circ + A_n^\circ$ es un disco $\sigma(E',E)$-cerrado en E', pues A_n° es $\sigma(E',E)$-cerrado y U_n° es $\sigma(E',E)$-compacto (Th Alaoglu-Bourbaki).
Luego $U_n^\circ + A_n^\circ \supset \overline{\Gamma(U_n^\circ \cup A_n^\circ)}$.
Pero $\overline{\Gamma(U_n^\circ \cup A_n^\circ)} = (U_n\cap A_n)^\circ$ (COROLARIO 5.6, pg. 34)
Luego

$$(U_n^\circ + A_n^\circ)^\circ \subset (U_n\cap A_n)^{\circ\circ}$$

Por tanto

$$x''_{n+1}-x''_n \in (U_n\cap A_n)^{\circ\circ}, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Entonces $x''_{n+1}-x''_1 = \sum_{r=1}^n (x''_{r+1}-x''_r) \in \sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)^{\circ\circ}$

Pero $\sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)^{\circ\circ} \subset \left[\sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)\right]^{\circ\circ}$ pues siendo $(U_r\cap A_r)^{\circ\circ}$ la clausura débil de $U_r\cap A_r$ en E'' se tiene que si $x_1+\dots+x_n \in (U_1\cap A_1)^{\circ\circ}+\dots+(U_n\cap A_n)^{\circ\circ} = \overline{U_1\cap A_1}^\sigma + \dots + \overline{U_n\cap A_n}^\sigma \subset$ $\subset \overline{(U_1\cap A_1)+\dots+(U_n\cap A_n)}^\sigma = \left(\sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)\right)^{\circ\circ}$. Luego $x''_{n+1}-x''_1 \in \left[\sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)\right]^{\circ\circ}$

Sea $A = \bigcup_{n=1}^\infty \sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)$.

Entonces, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left[\sum_{r=1}^n (U_r\cap A_r)\right]^{\circ\circ} \subset A^{\circ\circ}$

Luego $x''_{n+1}-x''_1 \in A^{\circ\circ}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Si probasemos que A es acotado en E, A° sería entorno de cero en E'_β y, portanto, $A^{\circ\circ}$ será $\sigma(E'',E')$-compacto en E'' y, en particular, $A^{\circ\circ}$ será $\sigma(E'',E')$-completo y, por tanto, será $\beta(E'',E')$-completo, pues si un conjunto es completo

topología, lo sigue siendo para cualquier topología polar más fina.
Y, entonces, como $\{x''_{n+1}\}_n \subset x''_1 + A^{\circ\circ}$ se tendría que $\{x''_{n+1}\}_n$ es una sucesión de Cauchy en el completo $x''_1 + A^{\circ\circ}$ ($\beta(E'',E')$-completo) dentro del cual será convergente. Por tanto, $\{x''_n\}_n$ será una sucesión convergente como queremos probar.

Solo falta probar que A es acotado. Sea U un entorno equilibrado de cero en E. Existe entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que $U_m \subset U$.

Para cada $n > m$ se tiene que

$$\sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \subset \sum_{r=1}^{m} A_r + \sum_{r=m+1}^{n} U_r \subset \sum_{r=1}^{m} A_r + U_{m+1} + \dots + U_n \subset$$

$$\subset \sum_{r=1}^{m} A_r + U_m \quad \text{pues} \quad U_{m+1} + \dots + U_n \subset \frac{1}{2} U_m + \frac{1}{2^2} U_m + \dots + \frac{1}{2^{n-m}} U_m \subset U_m$$

Como m es fijo, y los A_n son acotados se verifica que $\sum_{r=1}^{m} A_r$ es acotado en E. Existe pues $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{r=1}^{m} A_r \subset \lambda U_m .$$

Luego $\sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \subset (\lambda + 1) U_m$, $\forall n > m$.

Por tanto, $\bigcup_{n>m} \sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \subset (\lambda+1) U_m$.

Si $n \leq m$, $\sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \subset \sum_{r=1}^{n} A_r$ que es acotado como suma finita de acotados, y por tanto

$$\bigcup_{n=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \quad \text{es acotado.}$$

Existe pues $\beta > 0$ / $\bigcup_{n=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \subset \beta U_m$.

Luego $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} (U_r \cap A_r) \subset [\max(\lambda+1, \beta)] U_m \subset [\max(\lambda+1, \beta)] U$,
que prueba que A es acotado. csqd.