1ª PARTE: RESOLUCION DE ECUACIONES NUMERICAS.

TEMA 1º: RESOLUCION APROXIMADA DE ECUACIONES NUMERICAS.

0. Introducción

Trataremos de dar aproximaciones sucesivas a las soluciones de ecuaciones del tipo $f(x)=0$ donde f es una función real de variable real. Para ello aprenderemos a resolver ecuaciones de la forma $g(x)=x$, para lo cual necesitamos el teorema del punto fijo

0.1. TEOREMA: (del punto fijo)

Sea (X,d) un espacio métrico completo y $T: X\to X$ una aplicación contractiva (Lipschitziana de constante perteneciente a $[0,1[$). Entonces T tiene un único punto fijo, es decir, $\exists! x\in X / T(x)=x$.

Demostr.: Siendo T contractiva, $\exists K\in[0,1[/ d(T(x),T(y))\leq K\, d(x,y)$, $\forall x,y\in X$.
Si $K=0$ el teorema es trivial pues en este caso $d(T(x),T(y))=0, \forall x,y\in X$, es decir, $T(x)=T(y), \forall x,y\in X$. Luego dado $x\in X$, como $T(x)\in X$ se tiene que $T(T(x))=T(x)$, es decir, $T(x)$ es un punto fijo de T.
Además es único, pues si existe $a\in X$ tal que $a=T(a)$ se tiene que $a=T(x)$ ya que $T(a)=T(x)$.
Supongamos entonces que $K\in]0,1[$.
Sea x_0 un punto cualquiera de X. Consideremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida por $x_n=T(x_{n-1})$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
Veamos que esta sucesión es de Cauchy, es decir que
$\forall\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / p,q\geq n_0 \Rightarrow d(x_p,x_{p+q})\leq\varepsilon$

$$d(x_p,x_{p+q})\leq\sum_{j=p}^{p+q-1} d(x_j,x_{j+1}).$$

Como $d(x_j,x_{j+1})=d(T(x_{j-1}),T(x_j))\leq K\,d(x_{j-1},x_j)=$
$=K\,d(T(x_{j-2}),T(x_{j-1}))\leq K^2 d(x_{j-2},x_{j-1})\leq\ldots\leq K^j d(x_0,x_1)$

Se tiene que $d(x_p,x_{p+q})\leq\sum_{j=p}^{p+q-1} K^j d(x_0,x_1)\leq d(x_0,x_1)\sum_{j=p}^{\infty}K^j=$
$=d(x_0,x_1)\dfrac{K^p}{1-K}$.

Siendo $K\in]0,1[$, $\dfrac{d(x_0,x_1)}{1-K}K^p$ se hace tan pequeño como se quiera con sólo tomar p suficientemente grande.
Luego $(x_n)_n$ es de Cauchy, y siendo X completo converge

hacia un punto $x \in X$. Veamos que x es un punto fijo de T.
Puesto que $\lim_n d(x_n, x) = 0$ y $d(T(x_n), T(x)) \leq K d(x_n, x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
se tiene que $\lim_n d(T(x_n), T(x)) = 0$ lo cual equivale a que
$\lim_n T(x_n) = T(x)$.
Por otra parte siendo $T(x_n) = x_{n+1}$ se tiene que $\lim_n T(x_n) = \lim_n x_n = x$.
Y siendo único el límite en un espacio métrico, debe ser $T(x) = x$.
Además x es el único punto fijo de T pues si existiese $\bar{x} \in X$ tal que $T(\bar{x}) = \bar{x}$ se tendría que
$d(x, \bar{x}) = d(T(x), T(\bar{x})) \leq K d(x, \bar{x}) < d(x, \bar{x})$ pues $K \in]0,1[$,
lo cual es absurdo. csqd.

Otra versión del teorema del punto fijo, referida a intervalos de $\mathbb{R}$ y que se deduce trivialmente del anterior es la siguiente:

<u>0.2. TEOREMA:</u> Sea g una función real de variable real definida en un intervalo $[a,b]$ verificando

1) $g(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$.
2) $\exists L \in [0,1[\; / \; |g(x) - g(y)| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in [a,b]$

En estas condiciones existe un único punto fijo en $[a,b]$ y se obtiene como límite de la sucesión (x_n) donde x_0 es un punto arbitrario de $[a,b]$ y $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

<u>OBSERVACIONES</u> 1) Si en este teorema sustituimos la condición 2) por la condición 2'), más fuerte, la tesis sigue siendo cierta:

2') g es continua en $[a,b]$, diferenciable en $]a,b[$ y verifica que $|g'(x)| \leq L < 1$, $\forall x \in]a,b[$.

<u>2') ⇒ 2)</u> Dados $x, y \in [a,b]$, en virtud del teorema del valor medio generalizado para funciones reales de variable real se tiene que
$\exists \xi \in]x,y[$ tal que $g(x) - g(y) = g'(\xi)(x-y)$
Luego $|g(x) - g(y)| = |g'(\xi)| \cdot |x-y| \leq L|x-y|$, $\forall x, y \in]a,b[$.

2) "Si g es una función real de variable real definida en el intervalo $[\alpha - r, \alpha + r]$ y verifica las condiciones

j) g es Lipschitziana en $[\alpha - r, \alpha + r]$ de constante $L < 1$
jj) $|\alpha - g(\alpha)| \leq (1-L)r$.

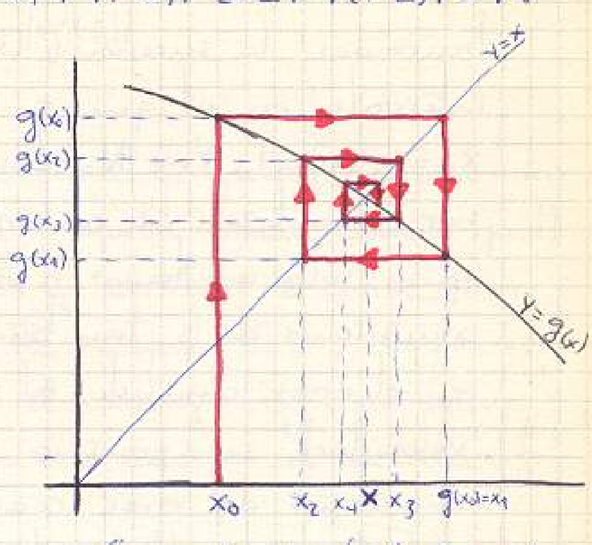
Entonces g tiene un único punto fijo."
Veamos que $[j) \wedge jj)] \Rightarrow [1) \wedge 2)]$, para $a = \alpha - r$, $b = \alpha + r$

$g(x) \in [\alpha - r, \alpha + r]$, $\forall x \in [\alpha - r, \alpha + r]$.

Dado $x \in [\alpha - r, \alpha + r]$, $|x - \alpha| \le r$. Veamos que $|g(x) - \alpha| \le r$, $\forall x \in [\alpha - r, \alpha + r]$

$$|g(x) - \alpha| \le |g(x) - g(\alpha)| + |g(\alpha) - \alpha| \le L|x - \alpha| + (1-L)r \le Lr + (1-L)r = r.$$

③ INTERPRETACION GEOMETRICA: Si g verifica las hipótesis del teorema en un cierto intervalo I, para hallar $x \in I$ tal que $g(x) = x$, tomamos un punto x_0 arbitrario y construimos la sucesión $(x_n)_n$ donde $x_n = g(x_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$. En la figura se ve la convergencia de (x_n) al punto x.



Convergencia de (x_n) a x

0.3. TEOREMA: Si existe una raiz s de la ecuación $x = g(x)$ en el intervalo $[a,b]$ y g es de clase 1 en $[a,b]$ y $|g'(s)| < 1$ entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si tomamos $x_0 \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$ y hacemos $g(x_n) = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ se tiene que $|x_n - s| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ y $\lim_n x_n = s$.

Demostr.: Siendo g' continua en $[a,b]$ y $|g'(s)| < 1$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|g'(x)| \le L < 1$, $\forall x \in [s-\varepsilon, s+\varepsilon]$.

Sea $x_0 \in]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, y $x_n = g(x_{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces, en virtud del teorema del valor medio de Cauchy

$|x_1 - s| = |g(x_0) - g(s)| = |g'(\xi_0)|\,|x_0 - s|$ con ξ_0 comprendido entre x_0 y s.

Luego $|g'(\xi_0)| \le L$ y como $|x_0 - s| < \varepsilon$ se tiene que

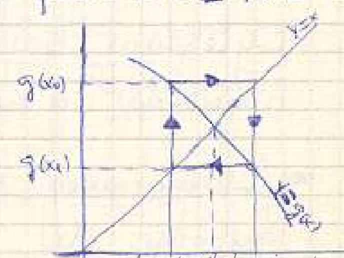
$$|x_1 - s| \le L\varepsilon < \varepsilon.$$

Por recurrencia, supuesto que $|x_{n-1} - s| \le L^{n-1}\varepsilon$ se tiene que

$$|x_n - s| = |g(x_{n-1}) - g(s)| = |g'(\xi_{n-1})|\,|x_{n-1} - s| \le L^n \varepsilon < \varepsilon, \text{ pues } L < 1.$$

Además $\lim_n x_n = s$, pues $(L^n)_n \to 0$ ya que $L \in [0,1[$. c.s.q.d.

NOTA: Si ocurriese, por ejemplo, que $x_0 = x_2$, la sucesión $(x_n)_n$ no convergería al punto fijo x (ver fig. al margen), lo cual significa que falla alguna de las hipótesis del teorema 0.2.; en este caso, g no sería contractiva en el intervalo considerado, pues $|g(x_0) - g(x_1)| = |x_1 - x_0|$ que no es menor o igual que $L|x_1 - x_0|$ para ningún $L \in [0,1[$.



1. ESTUDIO DEL ERROR Y ORDEN DE CONVERGENCIA.

A la hora de encontrar las raíces de la ecuación $x=g(x)$ construiremos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, tomando x_0 en un determinado intervalo en el que g verifique ciertas condiciones y haciendo $x_n = g(x_{n-1})$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Los teoremas enunciados en el apartado anterior garantizan la convergencia de $(x_n)_n$ a una raíz s, de modo que, solo con tomar n suficientemente grande, podemos lograr aproximaciones de s tan "buenas" como deseemos. Interesa conocer cual es el error cometido al sustituir s por un determinado x_n y con qué "velocidad" se aproxima x_n a s. En este apartado daremos estimaciones del error cometido.

Seguiremos llamando L al número de $[0,1[$ de los teoremas 0.2 y 0.3.

1.1. TEOREMA: Bajo cualquiera de las hipótesis de los teoremas del apartado anterior y utilizando las mismas notaciones que en ellos se tiene

$$|x_n - s| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$$

Demostr.: Sea $u_k = x_k - x_{k-1}$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Veamos que $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = s - x_0$.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$

Luego $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty}(x_n - x_0) = (\lim_n x_n) - x_0 = s - x_0$.

Por otra parte, $|u_k| = |x_k - x_{k-1}| = |g(x_{k-1}) - g(x_{k-2})| \leq L|x_{k-1} - x_{k-2}| = L|u_{k-1}| \leq$
$\leq \dots \leq L^{k-1}|u_1|$

Entonces, $|x_n - s| = |\sum_{k=1}^{n} u_k + x_0 - s| = |\sum_{k=1}^{n} u_k + x_0 - (\sum_{k=1}^{\infty} u_k + x_0)| =$
$= |\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} L^{k-1}|u_1| = |u_1|\frac{L^n}{1-L} = \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$ c.s.q.d.

Para tomar una aproximación de s con un error del orden de las milésimas basta hacer $\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| \leq 10^{-3}$ tomando n suficientemente avanzado, lo cual es posible, pues $(L^n)_n \to 0$ ya que $L\in[0,1[$.

- Llamaremos $e_n = x_n - s$. Supongamos que trabajamos en las hipótesis del teorema 0.3. Entonces

$|e_{n+1}| = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = |g'(\xi_n)|\cdot|x_n - s| = |g'(\xi_n)||e_n|$
donde ξ_n es un número comprendido entre x_n y s, y cuya existencia

garantiza el teorema del valor medio. Trivialmente se verifica que $(\xi_n)_n \to s$, puesto que $(x_n)_n \to s$.

Entonces $$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lim_n |g'(\xi_n)| = |g'(s)|$$

pues g' es continua (g es de clase 1).

Supuesto que $g'(s) \neq 0$, para n suficientemente grande, podemos hacer
$$|e_{n+1}| \cong |g'(s)| \cdot |e_n| \qquad (\cong \text{ significa aproximadamente igual}).$$

Puesto que $|g'(s)| < 1$, el error cometido al sustituir s por x_{n+1} es menor que $|e_n|$, error cometido al tomar x_n en lugar de s. Como vemos, de un término al siguiente el error disminuye de una forma "lineal" ($g'(s)$ es constante). Se dice en este caso que el método utilizado es lineal o de 1er orden.

Supongamos que $g'(s)=0$ y que $g \in C^2[a,b]$.

En virtud del teorema de Taylor existe η_n comprendido entre x_n y s tal que $$g(x_n) = g(s) + g'(s)(x_n - s) + \frac{g''(\eta_n)}{2!}(x_n - s)^2$$

Luego $$|e_{n+1}| = |x_{n+1} - s| = |g(x_n) - g(s)| = \left| g'(s)(x_n - s) + \frac{g''(\eta_n)}{2!}(x_n - s)^2 \right| =$$
$$= \frac{1}{2} |g''(\eta_n)| \cdot |e_n|^2 \quad , \text{ pues } g'(s) = 0.$$

Como $\lim_n \eta_n = s$ se tiene que
$$\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^2} = \frac{1}{2} |g''(s)|$$

y, por tanto, $|e_{n+1}| \cong \frac{1}{2} |g''(s)| \cdot |e_n|^2$.

Se dice, en este caso, que el método es de segundo orden o cuadrático.

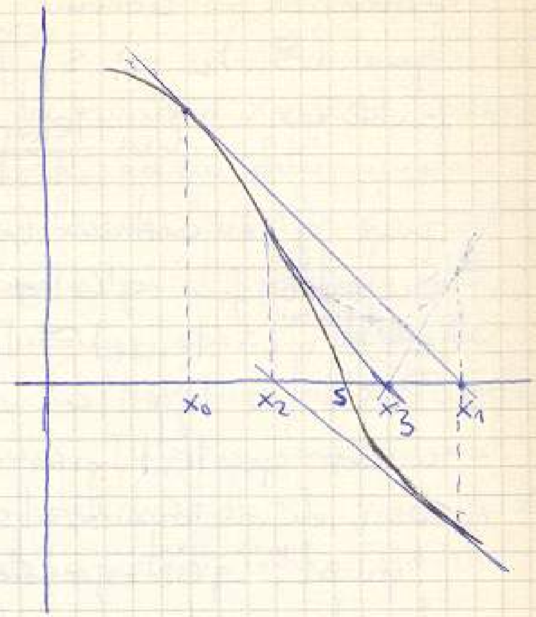
En general, si se verifica que $\lim_n \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \text{ (cte)} \neq 0$ se dice que el método utilizado es de orden p.

2. Método de Newton-Raphson.

Se trata de resolver la ecuación $f(x)=0$. Para ello la ponemos en la forma $x = g(x)$ donde $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Evidentemente $f(x) = 0$ si y sólo si $g(x) = x$.

A partir de esta función g construimos la sucesión de iterantes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ donde x_0 es un punto, en principio arbitrario, y $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

INTERPRETACION GEOMETRICA:



Por definición $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

La ecuación de la tangente a la curva en $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

El punto en que esta recta corta al eje OX es x tal que

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_1$$

Así, $\forall n \in \mathbb{N}$, x_n es el punto de corte de la tangente a la curva en $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ y el eje OX.

2.1. TEOREMA: Sea f es una función de clase C^2 en un intervalo que contenga a una raiz s de la ecuación $f(x) = 0$ y tal que $f'(s) \neq 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x_0 - s| < \varepsilon$ la sucesión de iterantes construida por el método de Newton converge a s.
Si además f es de clase C^3, entonces el método es cuadrático.

Demostr.: Siendo $f'(s) \neq 0$ y f' continua existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in]s-\varepsilon_1, s+\varepsilon_1[$

Luego la función $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ está bien definida en $]s-\varepsilon_1, s+\varepsilon_1[$

Siendo f de clase 2, g es de clase 1 y $g'(x) = 1 - \dfrac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} =$

$$= \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

Entonces $|g'(s)| = \left| \dfrac{f(s)\, f''(s)}{[f'(s)]^2} \right| = 0 < 1$, pues $f(s) = 0$

El teorema 0.3 garantiza la existencia de $\varepsilon_2 > 0$ tal que si $x_0 \in]s-\varepsilon_2, s+\varepsilon_2[$ entonces $|x_n - s| < \varepsilon_2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_n x_n = s$

Tomando $\varepsilon = \inf(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ queda probada la primera parte del enunciado.

Si f es de clase C^3, entonces g es de clase C^2. Como $g'(s) = 0$, en virtud del apartado 1, queda visto que el método es cuadrático. csqd.

Este teorema pide que x_0 esté muy próximo a la solución s. El teorema siguiente, sin pedir esta condición, exige hipótesis muy fuertes para que la sucesión de iteraciones converja a la solución.

TEOREMA 2.2: Sea f una función de clase C^2 en un intervalo $[a,b]$ y que verifica las hipótesis siguientes:

i) $f(a)\cdot f(b)<0$

ii) $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$

iii) f'' no cambia de signo en $[a,b]$.

iv) $\max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|,\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\}\leq b-a$

En estas condiciones existe una única solución s de la ecuación $f(x)=0$ en $[a,b]$ y la sucesión de iterantes que define el método de Newton-Raphson converge a s con sólo tomar $x_0\in[a,b]$. Si además f es de clase C^3 en $[a,b]$ el método es cuadrático.

Demostr.: Pueden darse los siguientes casos para f' y f'':

a) $f'(x)<0$ y $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

b) $f'(x)>0$ y $f''(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

c) $f'(x)<0$ y $f''(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

d) $f'(x)>0$ y $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$.

Caso a): Suponemos que $f'(x)<0$ y $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Entonces la función f es estrictamente decreciente y por i) debe ser $f(a)>0$ y $f(b)<0$. Siendo f continua, monótona y verificando que $f(a)\cdot f(b)<0$ se tiene que

$$\exists s\in]a,b[\ /\ f(s)=0$$

Sea x un punto de $[a,b]$.

Si $x\in[s,b]$ se tiene que $f(x)\leq 0$; además, por hipótesis $f''(x)\geq 0$. Luego

$$g'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\leq 0.$$

Como esto es cierto $\forall x\in[s,b]$ se verifica que g es decreciente en $[s,b]$. Por tanto, el mayor valor que puede tomar g en $[s,b]$ es $g(s)=s$ y el menor valor es $g(b)=b-\frac{f(b)}{f'(b)}\geq a$, pues, por iv), $\frac{f(b)}{f'(b)}\leq b-a$

En resumen, si $x\in[s,b]$, $g(x)\in[a,s]$.

Si $x\in[a,s]$, $f(x)\geq 0$; además $f''(x)\geq 0$. Luego $g'(x)\geq 0$. Por tanto, g es creciente en $[a,s]$ y, en consecuencia, el mayor valor que puede tomar g en $[a,s]$ es $g(s)=s$ y el menor $g(a)=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ que es mayor o igual que a, pues $f(a)>0$ y $f'(a)<0$.

Luego, $\forall x\in[a,s]$, $g(x)\in[a,s]$.

En definitiva, $\forall x\in[a,b]$, $g(x)\in[a,s]$, y, puesto que g es conti-

va en $[a,s]$, se verifica que $\forall x\in[a,b]$, $f(g(x))\geq 0$.
Sea entonces x_0 un punto arbitrario de $[a,b]$. Entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por el método de Newton-Raphson, $x_n=g(x_{n-1})$ $n\geq 1$, está contenida en $[a,s]$. Veamos que es creciente:
$$x_{n+1}-x_n=g(x_n)-x_n=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}-x_n=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ que es positivo pues $f(x_n)>0$ ($x_n\in[a,s]$) y $f'(x_n)<0$, por hipótesis.
Por tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$, sucesión monótona creciente y acotada superiormente, converge a un punto α del compacto $[a,b]$. Trivialmente $\alpha\leq s$, pues $x_n\leq s$, $\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}$. Probemos que $\alpha=s$.
$$\alpha=\lim_n x_{n+1}=\lim_n g(x_n)=\lim_n x_n-\lim_n\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$
Luego $f(\alpha)=0$, es decir, α es una raiz de f en $[a,b]$, y puesto que s era la única raiz de f en $[a,b]$ debe ser $\alpha=s$.
En consecuencia, la sucesión de iterantes definida por el método de Newton-Raphson converge a s.
La demostración de que si $f\in C^3[a,b]$ entonces el método es cuadrático es "idéntica" a la que se hizo en el teorema anterior.
Caso b): Si definimos $f_1(x)=-f(x)$ tenemos que f_1 verifica i), ii), iii) y iv), y además $f_1'(x)<0$, $f_1''(x)\geq 0$, $\forall x\in[a,b]$. f_1 está en las condiciones del caso a) y, por tanto, tomando $x_0\in[a,b]$, la sucesión $(x_n)_n$ converge a la única solución s de $f_1(x)=0$ en $[a,b]$, donde
$$\forall n\in\mathbb{N},\ x_n=g_1(x_{n-1})=x_{n-1}-\frac{f_1(x_{n-1})}{f_1'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}=g(x_{n-1})$$
Luego, $\lim_n g(x_n)=s$, donde s es la única solución de $f(x)=0$ en $[a,b]$.

Caso c): Suponemos $f'(x)<0$ y $f''(x)\leq 0$, $\forall x\in[a,b]$.
Hagamos el cambio de variables $t=-x$.
Entonces $f(x)=f(-t)$, $\forall t\in[-b,-a]$.
Definimos la funcion
$$\varphi:[-b,-a]\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$t\longmapsto f(-t)=f(x)$$
Entonces se verifica lo siguiente:
i') $\varphi(-b)\cdot\varphi(-a)=f(b)\cdot f(a)<0$, en virtud de i).
ii') $\varphi'(t)=-f'(-t)=-f'(x)>0$, $\forall t\in[-b,-a]$.
iii') $\varphi''(t)=f''(x)\leq 0$, $\forall t\in[-b,-a]$
iv') $\max\left\{\left|\frac{\varphi(a)}{\varphi'(a)}\right|,\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi'(b)}\right|\right\}=\max\left\{\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right|,\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right|\right\}\leq b-a=(-a)-(-b)$

Luego la función φ verifica las condiciones del caso b) y, por tanto, existe una única solución $-s$ de la ecuación $\varphi(t)=0$ en $[-b,-a]$. Luego $s\in[a,b]$ es la única solución de $f(x)=0$ en $[a,b]$.
Además, $\lim_n t_n = -s$ donde $t_0\in[-b,-a]$ y

$$t_{n+1} = t_n - \frac{\varphi(t_n)}{\varphi'(t_n)}.$$

Sea $x_0=-t_0\in[a,b]$ y $x_n=-t_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Entonces, $-x_{n+1}=-x_n-\dfrac{f(x_n)}{-f'(x_n)}=-g(x_n) \Rightarrow x_{n+1}=g(x_n)$

Además, $\lim_n x_n = \lim_n(-t_n)=s$.

Caso d) Se obtiene del caso c) análogamente a como obtuvimos caso b) del caso a). ■

* METODO DE NEWTON-RAPHSON PARA RAICES MULTIPLES:

Sea f una función de clase $p>1$ en un intervalo que contiene una raiz s de la ecuación $f(x)=0$.
Supongamos que $f(s)=f'(s)=\ldots=f^{p-1)}(s)=0$ y que $f^{p)}(s)\neq 0$.
Si desarrollamos la función f en un entorno reducido de s tenemos

$$f(x)-f(s)=\sum_{k=1}^{p-1}\frac{f^{k)}(s)(x-s)^k}{k!}+\frac{f^{p)}(\xi(x))(x-s)^p}{p!}$$

donde $\xi(x)$ es un punto del intervalo abierto determinado por x y s.
Entonces $f(x)=\dfrac{f^{p)}(\xi(x))(x-s)^p}{p!}=(x-s)^p\cdot\varphi(x)$, donde $\varphi(x)=\dfrac{f^{p)}(\xi(x))}{p!}$
La función φ es de clase p en un entorno reducido de s, pues $\varphi(x)=f(x)\cdot(x-s)^{-p}$. Si definimos $\varphi(s)=\dfrac{f^{p)}(s)}{p!}$ tenemos que $\varphi(s)\neq 0$.

Vamos a estudiar una variante del método de Newton para una función f definida por $f(x)=(x-s)^p\varphi(x)$, donde φ es de clase C^2.
$f'(x)=p(x-s)^{p-1}\varphi(x)+(x-s)^p\varphi'(x)$.
Entonces

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-s)^p\varphi(x)}{p(x-s)^{p-1}\varphi(x)+(x-s)^p\varphi'(x)}=x-\frac{(x-s)\varphi(x)}{p\varphi(x)+(x-s)\varphi'(x)}$$

si $x\neq s$, y definimos $g(s)=s$, con lo cual g es de clase C^1.
Se tiene que:

$$g'(x)=1-\frac{(\varphi(x)+(x-s)\varphi'(x))(p\varphi(x)+(x-s)\varphi'(x))-(x-s)\varphi(x)(p\varphi'(x)+\varphi'(x)+(x-s)\varphi''(x))}{[p\varphi(x)+(x-s)\varphi'(x)]^2}$$

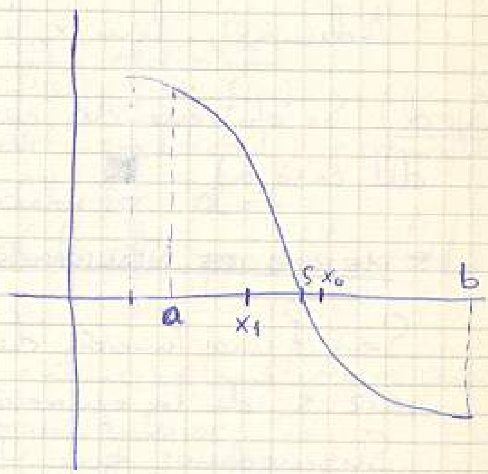
Entonces $g'(s) = 1 - \frac{1}{p} < 1$.

El teorema 0.3 garantiza la existencia de un $\varepsilon > 0$ tal que si x_0 dista de s menos de ε la sucesión $(x_n)_n$ que define el método de Newton converge a s.

El método así obtenido no es cuadrático.

Sin embargo, si tomamos $g(x) = x - \frac{p f(x)}{f'(x)}$ tenemos que $g'(s) = 0$ y, por tanto, el método es convergente y cuadrático.

* METODO DE LA BISECCION



Sea f una función continua en $[a,b]$, y s una única raiz de $f(x)=0$ en $]a,b[$, $s \neq a$, $s \neq b$.

Supongamos que $f'(s) \neq 0$. Entonces $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Hacemos $a_0 = a$, $b_0 = b$ y sea $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$.

Calculamos $f(x_0) \cdot f(a_0)$.

Si $f(x_0) f(a_0) = 0$, entonces $s = x_0$.

Si $f(x_0) \cdot f(a_0) < 0$, definimos $a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$.

Si $f(x_0) \cdot f(a_0) > 0$, definimos $a_1 = x_0$, $b_1 = b_0$.

En cualquiera de los dos últimos casos hacemos $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ y calculamos $f(a_1) \cdot f(x_1)$. Si $f(a_1) \cdot f(x_1) = 0$ entonces $s = x_1$.

Si $f(x_1) \cdot f(a_1) < 0$ definimos $a_2 = a_1$, $b_2 = x_1$. Si $f(x_1) \cdot f(a_1) > 0$ definimos $a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$. Procediendo así sucesivamente obtenemos una sucesión $(x_n)_n$. Veamos que converge a s:

$$|x_n - s| = \left| \frac{a_n + b_n}{2} - s \right| \leq \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

Luego $(x_n) \to s$.

* METODO DE LA SECANTE O "REGULA FALSI".

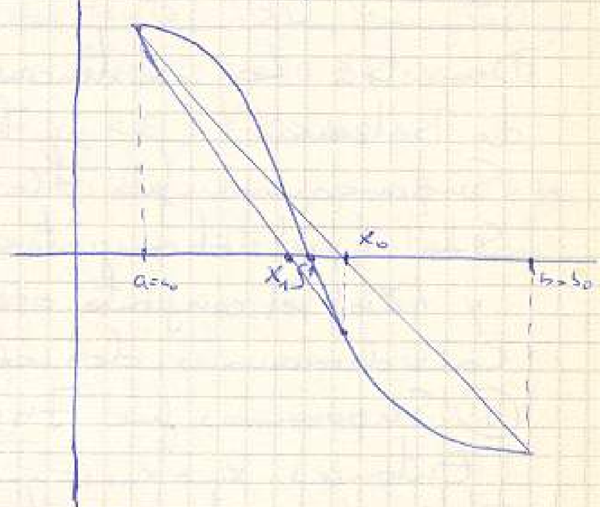
Es un método del tipo $g(x) = x + K f(x)$, donde $K \neq 0$.

Exigimos que g y f tengan las mismas soluciones. Nos interesa que $|g'(s)| < 1$, donde s es una raiz de $f(x) = 0$. Pero $g'(x) = 1 + K f'(x)$. Luego $|1 + K f'(s)|$ debe ser menor que 1, lo cual se verificará si $-2 < K f'(s) \leq 0$. Tomando K verificando las desigualdades anteriores el método será convergente. Mejor aún si $K = \frac{-1}{f'(s)}$ tendríamos $|g'(s)| = 0 < 1$ y el método sería

Veamos en qué consiste la "REGULA FALSI".

Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$ en el que existe una única raiz s de $f(x)=0$ y tal que $f(a)\cdot f(b)<0$.

Definimos $a_0=a$ y $b_0=b$ y determinamos los puntos $(a_0, f(a_0))$ y $(b_0, f(b_0))$



Consideremos la secante

$$\frac{y-f(b_0)}{x-b_0}=\frac{f(a_0)-f(b_0)}{a_0-b_0}$$

y sea x_0 el punto en que dicha recta corta al eje $y=0$; este punto verifica que

$$\frac{-f(b_0)}{x_0-b_0}=\frac{f(a_0)-f(b_0)}{a_0-b_0}$$

de donde $x_0=b_0-\dfrac{(b_0-a_0)f(b_0)}{f(b_0)-f(a_0)}=\dfrac{a_0f(b_0)-b_0f(a_0)}{f(b_0)-f(a_0)}$

Calculamos ahora $f(x_0)\cdot f(a_0)$. Si $f(x_0)\cdot f(a_0)=0$, entonces $x_0=s$.

Si $f(x_0)\cdot f(a_0)<0$ hacemos $a_1=a_0$ y $b_1=x_0$.

Si $f(x_0)\cdot f(a_0)>0$ hacemos $a_1=x_0$ y $b_1=b_0$.

Repetimos el mismo proceso con a_1 y b_1, y calculamos x_1.

En general, $x_n=b_n-\dfrac{(b_n-a_n)f(b_n)}{f(b_n)-f(a_n)}=\dfrac{a_nf(b_n)-b_nf(a_n)}{f(b_n)-f(a_n)}$

Vemos que $-\dfrac{b_n-a_n}{f(b_n)-f(a_n)}$ es una aproximación de $k=-\dfrac{1}{f'(s)}$.

Una variante de este es el "método de la secante":

Las hipótesis para f son las mismas: $f\in\mathcal{C}[a,b]$, $\exists s\in[a,b]/f(s)=0$ y $f(a)\cdot f(b)<0$.

Hacemos $x_0=a$, $x_1=b$, $x_2=x_1-\dfrac{(x_1-x_0)f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}$, ..., $x_{n+1}=x_n-\dfrac{(x_n-x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$.

En este método no tenemos en cuenta el signo de $f(x_n)\cdot f(a_n)$, con lo cual no garantizamos la convergencia de $(x_n)_n$ a s.

Vamos a probar que el método de la regula falsi converge. Para ello tendremos en cuenta que si $x_1=a$ y $x_2=b$ entonces

$$x_{n+1}=\frac{x_{n'}f(x_n)-x_nf(x_{n'})}{f(x_n)-f(x_{n'})}\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$f(x_n) \cdot f(x_{m}) < 0$. Entonces

2.3. TEOREMA: Si f es una función continua en $[a,b]$ y tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces la sucesión $\{x_n\}_n$ definida anteriormente converge a s donde s es la única raíz de $f(x)=0$ en $[a,b]$.

Demostr.: La existencia de s está garantizada por el teorema de Bolzano.

Supongamos que $f(a)<0$ y $f(b)>0$.

Sea $\{y_K\}$ el conjunto ordenado de los x_n tales que $f(x_n)<0$ y $\{z_K\}$ el conjunto ordenado de los x_n tales que $f(x_n)>0$

Consideraremos dos casos

1) Suponemos que $\exists n \in \mathbb{N} / f(x_n)=0$.

Entonces $x_n = x_{n+1} = \dots = s$ y ya estaría probado.

2) Se demuestra que la sucesión $\{y_K\}$ es monotona creciente y acotada superiormente por cualquier z_K, y que $\{z_K\}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por cualquier y_K.

Consideraremos dos subcasos:

2.1) Supongamos que una de esta sucesiones, por ejemplo $\{y_K\}_K$, es finita.

Entonces, $\exists N \in \mathbb{N} / f(x_n) > 0, \forall n \geq N$.

Por definición

$$x_{n+1} f(x_n) - x_{n+1} f(x_m) = x_m f(x_n) - x_n f(x_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_n)(x_{n+1} - x_m) - f(x_m)(x_{n+1} - x_n) = 0 \quad (I)$$

Si consideramos cualquier $n \geq N$, entonces m permanece fijo (igual a $m(N)$) por definición de $m(n)$, y se verifica que $f(x_m) < 0$.

Sea $\beta = \lim_{K\to\infty} z_K$. Tomando límites en I se tiene que

$$f(\beta)(\beta - x_m) - f(x_m)(\beta - \beta) = 0 \Rightarrow f(\beta)(\beta - x_m) = 0$$

Como $f(\beta) \geq 0$, pues $f(z_K) > 0, \forall K$, y $f(x_m) < 0$ se tiene que $\beta \neq x_m$ y, por tanto, $f(\beta) = 0$. Luego $\beta = s$

2.2) Supongamos que las dos sucesiones $\{y_K\}_K$ y $\{z_K\}_K$ tienen infinitos términos.

Sea $\beta = \lim_{K\to\infty} z_K$ y $\gamma = \lim_{K\to\infty} y_K$.

Sea $\delta = \beta - \gamma$.

Podemos considerar nuevamente dos casos:

2.2.1) Si $\beta=\gamma$ entonces $f(\beta)=f(\gamma)$, y puesto que $f(\beta)\geq 0$ y $f(\gamma)\leq 0$ debe ser $f(\beta)=f(\gamma)=0$ y, por tanto, $s=\beta=\gamma$, y el teorema quedaría probado.

2.2.2) Supongamos que $\beta\neq\gamma$ y vamos a llegar a un absurdo. Si $\beta\neq\gamma$, entonces $\beta>\gamma$ y, por tanto, $\delta>0$, pues $\beta\geq 0$ y $\gamma\leq 0$. Por definición de límite, dado $\varepsilon\in]0,\delta[$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $z_k-\beta<\varepsilon$ y $\gamma-y_k<\varepsilon$, $\forall k\geq n_0$.

Como ambas sucesiones tienen infinitos términos, existe $m\geq n_0$ tal que $f(x_m)<0$ y $f(x_{m+1})>0$ y existe $r\geq 1$ tal que

$$f(x_{m+1})>0,\dots,f(x_{m+r})>0 \quad y \quad f(x_{m+r+1})<0.$$

A la vista de esto tenemos que

$$x_{m+r+1}=\frac{x_m f(x_{m+r})-x_{m+r}f(x_m)}{f(x_{m+r})-f(x_m)}$$

y por tanto, $f(x_{m+r})(x_{m+r+1}-x_m)-f(x_m)(x_{m+r+1}-x_{m+r})=0$

Entonces $$\left|\frac{f(x_{m+r})}{f(x_m)}\right|=\frac{|x_{m+r+1}-x_{m+r}|}{|x_{m+r+1}-x_m|}>\frac{\delta}{\varepsilon}$$

Luego $|f(x_{m+r})|>\frac{\delta}{\varepsilon}|f(x_m)|$

De la misma manera existe $\nu\geq 1$ tal que
$f(x_{m+r+1})<0,\dots,f(x_{m+r+\nu})<0$, $f(x_{m+r+\nu+1})>0$.

Haciendo las mismas consideraciones que antes obtenemos

$$\left|\frac{f(x_{m+r+\nu})}{f(x_{m+r})}\right|>\frac{\delta}{\varepsilon}$$

y por tanto $|f(x_{m+r+\nu})|>\frac{\delta}{\varepsilon}|f(x_{m+r})|>\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2|f(x_m)|$

Procediendo así obtenemos una sucesión

$$\{|f(x_m)|,|f(x_{m+r})|,|f(x_{m+r+\nu})|,\dots\}$$

que converge a infinito, pues $\delta>\varepsilon$, lo cual es absurdo pues $|f|$ es continua en el compacto $[a,b]$, y por tanto debe ser acotada (Teorema de Bolzano-Weierstrass). Queda así demostrado el teorema. ∎

<u>OBSERVACION</u>: En este teorema la condición de que f sea continua en $[a,b]$ y $f(a).f(b)<0$ es necesaria y suficiente.

En el caso de que en el intervalo haya más de una raíz la sucesión converge a una de ellas.

TEMA 2º: ACELERACION DE LA CONVERGENCIA.

El objetivo de este tema es construir sucesiones iterantes a partir de las sucesiones iterantes consideradas en el tema anterior que converjan a la solución más rápidamente que éstas.

1. METODO Δ^2 de Ailtsen

1.1. PROPOSICION: Sea $I=[a,b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, y $g: I \to \mathbb{R}$ una función que verifica

i) $g \in C^1(I)$.

ii) $g(x) \in I, \forall x \in I$.

iii) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$.

iv) g es lipschitziana con constante de Lipschitz $L<1$.

Entonces, si construimos la sucesión $x_n = g(x_{n-1})$ donde $x_0 \in I$ se tiene que

a) g es monótona, estrictamente creciente o decreciente en I.

b) Si $s = \lim_n x_n$ y $x_0 \neq s$ entonces $x_n \neq g(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostr.: a) Trivial por i) y iii).

b) Supongamos que existe n tal que $x_n = g(x_n)$, y que n es el primer natural para el que se verifica esto.

Entonces $0 = x_n - x_n = g(x_n) - g(x_{n-1}) = g'(\xi)(x_n - x_{n-1})$

Pero $g'(\xi) \neq 0$, por iii), y $x_n - x_{n-1} \neq 0$, tal y como hemos tomado n.

Luego llegamos a la contradicción $0 \neq 0$. ∎

Supongamos que g verifica las hipótesis de la proposición anterior.

Si definimos $e_n = x_n - s$ se tiene que $e_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_n \frac{x_{n+1}-s}{e_n} = \lim_n \frac{g(x_n)-g(s)}{e_n} =$

$= \lim_n \frac{g(s+e_n)-g(s)}{e_n} \overset{T.V.M}{=} \lim_n \frac{g'(s+\theta_n e_n)\, e_n}{e_n}$, $\theta_n e_n \in]0, e_n[$

Sea ε_n tal que $g'(s+\theta_n e_n) = g'(s) + \varepsilon_n$.

$\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lim_n g'(s) + \varepsilon_n = g'(s)$

pues $\lim_n \varepsilon_n = \lim_n [g'(s+\theta_n e_n) - g'(s)] = 0$.

Vamos a hacer ahora unas "cuentas" que sólo son ciertas bajo condiciones prácticamente "ideales", pero que nos servirán para definir una sucesión $\{x'_n\}$ que converge a s más rápidamente que $\{x_n\}$.

Supongamos que $\varepsilon_n = 0$ y hagamos $g'(s) = \Delta$. Entonces

$e_{n+1} = \Delta e_n$, $e_{n+2} = \Delta e_{n+1}, \dots$

Es decir

$$\left.\begin{array}{l}(x_{n+1}-s) = \Delta(x_n - s)\\ (x_{n+2}-s) = \Delta(x_{n+1}-s)\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} - s = \Delta x_n - \Delta s \\ s - x_{n+2} = \Delta s - \Delta x_{n+1}\end{array}\right.$$

y sumando miembro a miembro

$$x_{n+1} - x_{n+2} = \Delta x_n - \Delta x_{n+1}, \text{ de donde } \Delta = \frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}$$

Entonces $x_{n+1} - s = \left(\dfrac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right)(x_n - s) \Rightarrow$

$$\Rightarrow s\left(\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n} - 1\right) = \left(\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right)x_n - x_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) = x_{n+2}x_n - x_{n+1}x_n + x_{n+1}x_n - x_{n+1}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \frac{x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} = x_n - \frac{x_n(x_{n+2}-2x_{n+1}-x_n) + x_{n+2}x_n - x_{n+1}^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} =$$

$$= x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$$

Veremos a continuación que si definimos

$$x'_n = x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n} \qquad (I)$$

la sucesión $\{x'_n\}_n$ converge a s más rápidamente que $\{x_n\}$.

Si definimos $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ y $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$

tenemos $\Delta^2 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) =$

$= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$

Luego $\qquad x'_n = x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$

Entonces

1.2. TEOREMA: (Método Δ^2 de Aitken).

Sea $\{x_n\}_n$ una sucesión convergente hacia s tal que $e_n = x_n - s \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Sea A una constante de módulo menor que 1 y $(\varepsilon_n)_n$ una sucesión convergente a cero tal que $e_{n+1} = (A + \varepsilon_n)e_n$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$, x'_n está bien definido como en (I) y la sucesión $\{x'_n\}$ converge a s más rápidamente que $\{x_n\}$ en el sentido de que $\lim_n \frac{x'_n - s}{x_n - s} = 0$.

Demostr.: $e_{n+2} = (A+\varepsilon_{n+1})\, e_{n+1} = (A+\varepsilon_{n+1})(A+\varepsilon_n)\, e_n$

Por otra parte, $\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n =$

$= (x_{n+2}-s) - (2x_{n+1} - 2s) + (x_n - s) = e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n =$

$= \left[(A+\varepsilon_{n+1})(A+\varepsilon_n) - 2(A+\varepsilon_n) + 1\right] e_n =$

$= (A^2 + A\varepsilon_n + A\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n\varepsilon_{n+1} - 2A - 2\varepsilon_{n}+1)\, e_n =$

$= \left[(A-1)^2 + \varepsilon'_n\right] e_n$ donde $\varepsilon'_n = A(\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}) + \varepsilon_n\varepsilon_{n+1} - 2\varepsilon_{n+1}$.

Entonces $(\varepsilon'_n)_n \to 0$.

Es decir, $\Delta^2 x_n = \left[(A-1)^2 + \varepsilon'_n\right] e_n \neq 0$, $\forall n > n_0$.

Por otro lado

$$x'_n - s = (x_n - s) - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} \overset{(*)}{=} e_n - \frac{(A+\varepsilon_n - 1)^2 e_n^2}{\left[(A-1)^2 + \varepsilon'_n\right] e_n} = e_n - \frac{(A+\varepsilon_n-1)^2 e_n}{(A-1)^2 + \varepsilon'_n}$$

Entonces $x'_n - s = e_n \left[\dfrac{(A-1)^2 + \varepsilon'_n - (A-1)^2 + 2(A-1)\varepsilon_n - \varepsilon_n^2}{(A-1)^2 + \varepsilon'_n}\right] =$

$$= \frac{e_n(\varepsilon'_n + 2(A-1)\varepsilon_n - \varepsilon_n^2)}{(A-1)^2 + \varepsilon'_n}$$

Luego $\dfrac{x'_n - s}{x_n - s} = \dfrac{\varepsilon'_n + 2(A-1)\varepsilon_n - \varepsilon_n^2}{(A-1)^2 + \varepsilon'_n}$

Por tanto, $\lim_n \dfrac{x'_n - s}{x_n - s} = 0$. csqd.

1.3. COROLARIO: Si g es una función que verifica las hipótesis de la proposición 1.1 y hacemos $x_n = g(x_{n-1})$ se tiene que la sucesión $\{x'_n\}$, donde $x'_n = x_n - \dfrac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$ está bien definida a partir de un cierto natural n_0 y converge a s más rápidamente que $\{x_n\}_n$.

Demostr.: Veamos que se verifican las hipótesis del teorema 1.2.

Por supuesto $e_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_n x_n = s$. En el folio anterior poníamos $e_{n+1} = (g'(s) + \varepsilon_n)\, e_n$, $\forall n$ donde $\lim_n \varepsilon_n = 0$. Si probamos que $|g'(s)| < 1$ quedará probado el corolario.

Pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \xi_n \in I\,]x_n, s[\ / \ |g(x_n) - g(s)| = |g'(\xi_n)| \cdot |x_n - s|$ $(**)$

y por hipótesis $|g(x_n) - g(s)| \leq L\,|x_n - s|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Luego $\forall n \in \mathbb{N}$, $|g'(\xi_n)| \leq L < 1$.

Luego $\lim_n |g'(\xi_n)| = |g'(s)| \leq L < 1$, pues $\lim_n \xi_n = s$ y g' es continua. csqd.

Tema 3º: Ecuaciones polinómicas: Localización de raices.

1. Acotación de raices.

1.1. Teorema: a) Un número positivo m es una cota inferior de las raices positivas de $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ si, y solo si, $\frac{1}{m}$ es una cota superior de las raices positivas de $P^*(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$.

b) $M<0$ es una cota inferior de las raices negativas de $P(x)$ si, y solo si, $-M$ es una cota superior de las raices positivas de $P^{**}(x)=(-1)^na_nx^n+(-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+\dots+(-1)a_1x+a_0$.

c) $H<0$ es una cota superior de las raices negativas de $P(x)$, si y solo si $-H$ es una cota inferior de las raices positivas de $P^{**}(x)$.

Demostr.: a) Sean $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ las raices positivas de $P(x)$. Supongamos que $0<m\leq\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_r$.

Entonces $\frac{1}{m}\geq\frac{1}{\alpha_1}>\frac{1}{\alpha_2}>\dots>\frac{1}{\alpha_r}$.

Trivialmente $\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\dots,\frac{1}{\alpha_r}$ son raices positivas de $h(x)=P(\frac{1}{x})$, y son las únicas raices positivas de $h(x)$, pues de lo contrario $P(x)$ tendría otra raiz positiva distinta de α_i, $1\leq i\leq r$.

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=a_n\left(\frac{1}{x}\right)^n+\dots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0=\frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\dots+\frac{a_1}{x}+a_0$$

$$x^nP\left(\frac{1}{x}\right)=a_n+a_{n-1}x+\dots+a_1x^{n-1}+a_0x^n=P^*(x)$$

Como $\frac{1}{\alpha_1},\dots,\frac{1}{\alpha_r}$ son raices de $P(\frac{1}{x})$ se tiene que también son raices de $P^*(x)$.

El recíproco es totalmente análogo.

b) Sea $\alpha<0$ una raiz de $P(x)$. Entonces $M\leq\alpha<0$ y por tanto, $-M\geq-\alpha>0$.
Como $-\alpha$ es raiz de $P^{**}(x)=P(-x)$, se tiene que si α es una raiz negativa de $P(x)$ y M es una cota inferior de ella, entonces $-\alpha$ es una raiz positiva de $P^{**}(x)$ y $-M$ es una cota superior de ella, y recíprocamente.

c) Si $\alpha<0$ es una raiz de $P(x)$ y $\alpha<H<0$ entonces $-\alpha>-H>0$ y $-H$ es una cota inferior de las raices positivas de $P^{**}(x)$, y recíprocamente. csqd.

Observación: Teniendo en cuenta este teorema solo será necesario calcular cotas superiores de las raices positivas, pues las cotas inferiores de las raices positivas y las cotas de las raices negativas se pueden obtener a partir de ellas.

1.2. TEOREMA: (Regla de acotación de Laguerre-Tribault).

Una condición suficiente para que $n>0$ sea una cota superior de las raices positivas de $P(x)$ es que los coeficientes del cociente y el resto de dividir $P(x)$ por $x-n$ sean no negativos.

Demostr.: Supongamos $n>0$ y que

$$P(x)=(x-n)\,Q(x)+R$$

donde $Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0$ con $b_i\geq 0$, $i=0,1,\dots,n-1$ y $R\geq 0$.

Veamos que si $\alpha>n$ entonces α no es raiz de $P(x)$.

$\alpha>n \Rightarrow \alpha-n>0$. Luego $Q(\alpha)>0$, $\alpha-n>0$ y $R\geq 0$ y por tanto $P(\alpha)>0$ y no igual a cero como debiera. c.s.q.d.

Nota: Suponemos que $P(x)$ no es el polinomio nulo.

1.3. TEOREMA: (Regla de acotación de Newton)

Una condición suficiente para que $M>0$ sea una cota superior de las raices positivas de $P(x)$ es que los números $P(M), P'(M),\dots,P^{n)}(M)$ sean no negativos

Demostr.: Desarrollando $P(x)$ en serie de Taylor en el punto M tenemos

$$P(x)=P(M)+(x-M)P'(M)+\frac{(x-M)^2}{2!}P''(M)+\dots+\frac{(x-M)^n}{n!}P^{n)}(M)$$

Si $x>M$, $x-M>0$. Entonces $P(x)=0$ si y solo si $P(M)=P'(M)=\dots=P^{n)}(M)=0$, lo que significaría que $P(x)$ es el polinomio nulo. ∎

1.4. TEOREMA: Si el polinomio $P(x)$ toma valores de signo opuesto en los extremos del intervalo $[a,b]$, tiene en $[a,b]$ un número impar de raices, si contamos cada una de ellas tantas veces como indique su orden de multiplicidad.

Demostr.: Supongamos que $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ son las raices de $P(x)$ en $]a,b[$ contadas cada una tantas veces como indica su orden de multiplicidad.

Entonces $P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)\,\varphi(x)$

Luego $P(a)=(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)\dots(a-\alpha_r)\,\varphi(a)$

$P(b)=(b-\alpha_1)(b-\alpha_2)\dots(b-\alpha_r)\,\varphi(b)$

Por hipotesis, $\operatorname{sgn}P(a)=-\operatorname{sgn}P(b)$.

Se tiene que $b-\alpha_i>0$, $a-\alpha_i<0$, $i=1,\dots,r$

Además $\operatorname{sgn}\varphi(a)=\operatorname{sgn}\varphi(b)$, pues de lo contrario, por el teorema de Bolzano, $\varphi(x)$ tendría una raíz en $]a,b[$ contra lo supuesto. Por tanto, $sgn((a-\alpha_1)\cdot(a-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(a-\alpha_r)) = -sgn((b-\alpha_1)\cdot\ldots(b-\alpha_r))$ y, en consecuencia, r debe ser impar. csqd.

1.5. COROLARIO: Si $sgn\,P(a) = sgn\,P(b)$, entonces en $]a,b[$ hay un número par de raíces, que puede ser nulo.

1.6. TEOREMA: (de Rolle)

Entre cada dos raíces consecutivas α_i, α_{i+1} de $P(x)$ hay un número impar de raíces de $P'(x)$, si contamos cada una tantas veces como indique su orden de multiplicidad.

Demostr.: Sean α_i, $i=1,\ldots,r$, las raíces de $P(x)$, y sea n_i el orden de multiplicidad de α_i. Entonces

$$P(x) = a_n(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$$

Entonces $P'(x) = a_n \sum_{i=1}^{r} n_i (x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_i)^{n_i-1}\cdots(x-\alpha_r)^{n_r}$.

Luego $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{r} \dfrac{n_i}{x-\alpha_i}$.

Vamos a probar que existe $\delta>0$ tal que $0<\delta<\dfrac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}$, $i=0,1,\ldots,r-1$ de modo que $\forall \varepsilon<\delta$, $\dfrac{P'(\alpha_i+\varepsilon)}{P(\alpha_i+\varepsilon)}>0$ y $\dfrac{P'(\alpha_{i+1}-\varepsilon)}{P(\alpha_{i+1}-\varepsilon)}<0$

$$\frac{P'(\alpha_i+\varepsilon)}{P(\alpha_i+\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{r}\frac{n_j}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_j} = \frac{n_1}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_1}+\cdots+\frac{n_{i-1}}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_{i-1}}+\frac{n_i}{\varepsilon}+\cdots+\frac{n_r}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_r}$$

y $$\frac{P'(\alpha_{i+1}-\varepsilon)}{P(\alpha_{i+1}-\varepsilon)} = \frac{n_1}{\alpha_{i+1}-\varepsilon-\alpha_1}+\cdots+\frac{n_{i+1}}{-\varepsilon}+\cdots+\frac{n_r}{\alpha_{i+1}-\varepsilon-\alpha_r}$$

Como $\alpha_j\neq\alpha_k$, si $j\neq k$, los términos de la forma $\dfrac{n_j}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_j}$, $j\neq i$, permanecen acotados, si tomamos $\varepsilon\in]0,1]$; análogamente, los términos de la forma $\dfrac{n_j}{\alpha_{i+1}-\varepsilon-\alpha_j}$, $j\neq i+1$, permanecen acotados. Sea $M>0$ tal que

$$\frac{n_j}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_j}\leq M, \text{ si } j\neq i, \quad y \quad \frac{n_k}{\alpha_{i+1}-\varepsilon-\alpha_k}\leq M, \text{ si } k\neq i+1$$

Existe trivialmente $\delta>0$ tal que si $0<\varepsilon<\delta$ entonces $\dfrac{n_i}{\varepsilon}$ sea mayor que la suma $-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\dfrac{n_j}{\alpha_i+\varepsilon-\alpha_j}$ y $\dfrac{n_{i+1}}{-\varepsilon}\leq -\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i+1}}^{r}\dfrac{n_k}{\alpha_{i+1}-\varepsilon-\alpha_k}$

Podemos entonces conseguir que $\frac{P'(\alpha_i+\varepsilon)}{P(\alpha_i+\varepsilon)} > 0$ y $\frac{P'(\alpha_{i+1}-\varepsilon)}{P(\alpha_{i+1}-\varepsilon)} < 0$.

Tomamos además $\delta < \frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}$, para no salirnos del intervalo $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$. Como $P(\alpha_i+\varepsilon)$ y $P(\alpha_{i+1}-\varepsilon)$ deben tener el mismo signo, pues de lo contrario existiría una raíz en $]\alpha_i+\varepsilon, \alpha_{i+1}-\varepsilon[$, se tiene que $P'(\alpha_i+\varepsilon)$ y $P'(\alpha_{i+1}-\varepsilon)$ son de distinto signo y por consiguiente en el intervalo $]\alpha_i+\varepsilon, \alpha_{i+1}-\varepsilon[$ tiene que haber un número impar de raíces de P'. Como esto es cierto para cualquier $\varepsilon \in]0,\delta[$ resulta que en $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ hay un número impar de raíces de $P'(x)$. c.s.q.d.

1.7. COROLARIO: Entre dos raíces consecutivas de $P'(x)$ hay a lo sumo una raíz de $P(x)$.

Demostr.: Sean a_i y a_{i+1} dos raíces consecutivas de $P'(x)$. Supongamos que α_i y α_{i+1} son dos raíces consecutivas de $P(x)$ en $]a_i, a_{i+1}[$. Entonces, por el teorema anterior, entre α_i y α_{i+1} existe un número impar de raíces de $P'(x)$ y, por tanto, al menos una; lo cual contradice que a_i y a_{i+1} son consecutivas. c.s.q.d.

2. TEOREMA DE STURM

DEFINICION: Sea $P(x)$ una función polinómica. Consideremos los polinomios $H_0(x), H_1(x), \dots, H_n(x)$ definidos por

$H_0(x) = P(x)$

$H_1(x) = P'(x)$

$H_2(x)$ es tal que $H_0(x) = Q_0(x)H_1(x) - H_2(x)$, $grd(H_2(x)) < grd(H_1(x))$

$H_3(x)$ es tal que $H_1(x) = Q_1(x)H_2(x) - H_3(x)$, $grd(H_3(x)) < grd(H_2(x))$.

. . . .

$H_n(x)$ es tal que $H_{n-2}(x) = Q_{n-2}(x)H_{n-1}(x) - H_n(x)$, $grd(H_n(x)) < grd(H_{n-1}(x))$

y de manera que $H_{n-1}(x) = Q_{n-1}(x)\cdot H_n(x)$, es decir $H_{n+1}(x) = 0$

Veamos que $H_n(x) = m.c.d.(P(x), P'(x))$.

Como $H_n(x)$ divide a $H_{n-1}(x)$, divide también a $H_{n-2}(x)$, y así sucesivamente divide a $H_1(x) = P'(x)$ y a $H_0(x) = P(x)$.

Además si $T(x)$ divide a $P(x)$ y $P'(x)$, es decir, a $H_0(x)$ y a $H_1(x)$ entonces divide a $H_2(x) = Q_0(x)H_1(x) - H_0(x)$, y así sucesivamente divide a $H_n(x)$, como queríamos ver.

21 TEOREMA: Es condición necesaria y suficiente para que $P(x)$ y $P'(x)$ no tengan raíces comunes que $H_n(x)$ sea constante.

Demostracion: $\Rightarrow$] Si $H_n(x)$ no es constante, $H_n(x)$ tiene una raiz α. Entonces $x-\alpha$ divide a $P(x)$ y a $P'(x)$ y α sería una raiz común de $P(x)$ y $P'(x)$.

$\Leftarrow$] Si α es una raiz comun de $P(x)$ y $P'(x)$ entonces $x-\alpha$ divide a $P(x)$ y a $P'(x)$ y por tanto $x-\alpha$ divide a $H_n(x)$, en contra de que $H_n(x)$ es constante. csqd.

DEFINICION: Sea $P(x)$ un polinomio y $[a,b]$ un intervalo tal que $P(a)\cdot P(b)\neq 0$, definiremos la sucesión de Sturm de polinomios de $P(x)$ sobre $[a,b]$ como $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ donde

1) Si $P(x)$ no posee raices múltiples en $[a,b]$ entonces $P_0(x)=H_0(x)$, $P_1(x)=H_1(x)$, ..., $P_n(x)=H_n(x)$

2) Si $P(x)$ posee alguna raiz múltiple en $[a,b]$ entonces $P_0(x)=\dfrac{H_0(x)}{H_n(x)}$, $P_1(x)=\dfrac{H_1(x)}{H_n(x)}$, ..., $P_{n-1}(x)=\dfrac{H_{n-1}(x)}{H_n(x)}$, $P_n(x)=1$.

Se verifica en cualquier caso que $P_n(x)=\text{mcd}\,(P_0(x), P_1(x))$

22. PROPOSICION: La sucesión de Sturm de polinomios relativa a $P(x)$ y el intervalo $[a,b]$ tiene las siguientes propiedades:

1) $P_n(x)$ no se anula en ningun punto de $[a,b]$.

2) Si $P_i(\alpha)=0$, $\alpha\in[a,b]$, entonces $P_{i-1}(\alpha)\cdot P_{i+1}(\alpha)<0$.

Demostr.: 1) a) Supongamos que $P(x)$ no tiene raices múltiples en $[a,b]$. Si α es una raiz de $P_n(x)=H_n(x)$ en $[a,b]$, entonces α es raiz de $P(x)$ y de $P'(x)$ y, por tanto, α sería una raiz múltiple de $P(x)$ en $[a,b]$, contra lo supuesto.

b) Supongamos que $P(x)$ posee alguna raiz múltiple en $[a,b]$. Entonces $P_n(x)=1$, y por tanto, $P_n(x)$ no tiene raices en $[a,b]$.

2) a) Supongamos que $P(x)$ no tiene raíces múltiples en $[a,b]$. Si $\alpha\in[a,b]$ y $P_i(\alpha)=0$, entonces $H_i(\alpha)=0$. Como $H_{i-1}(x)=Q_{i-1}(x)H_i(x)-H_{i+1}(x)$ tenemos que $H_{i-1}(\alpha)=-H_{i+1}(\alpha)=-P_{i+1}(\alpha)$. Luego $P_{i-1}(\alpha)=-P_{i+1}(\alpha)$. Si probamos que $P_{i-1}(\alpha)\neq 0$ tendremos que $P_{i-1}(\alpha)\cdot P_{i+1}(\alpha)<0$.

Si fuese $P_{i-1}(\alpha)=0$ tendriamos $P_{i+1}(\alpha)=0$.

Es decir, α es raiz de $H_{i-1}(x)$, $H_i(x)$ y $H_{i+1}(x)$. Por tanto, como

$H_{i-2}(x) = Q_{i-2}(x)\,H_{i-1}(x) - H_i(x)$, α será raiz de $H_{i-2}(x)$.
Así sucesivamente, probaríamos que α es raiz de $H_0(x)$ y $H_1(x)$.
Entonces α es raiz de $P(x)$ y $P'(x)$ y, por tanto, α sería una raiz múltiple de $P(x)$ en $[a,b]$, contra lo supuesto.

b) Supongamos que $P(x)$ posee raices múltiples en $[a,b]$.
Si $P_i(\alpha)=0$, entonces $\dfrac{H_i(\alpha)}{H_n(\alpha)}=0$

Como $\dfrac{H_{i-1}(x)}{H_n(x)} = Q_{i-1}(x)\dfrac{H_i(x)}{H_n(x)} - \dfrac{H_{i+1}(x)}{H_n(x)}$ se tendría $\dfrac{H_{i-1}(\alpha)}{H_n(\alpha)} = -\dfrac{H_{i+1}(\alpha)}{H_n(\alpha)}$
es decir, $P_{i-1}(\alpha) = -P_{i+1}(\alpha)$.
Si probamos que $\dfrac{H_{i-1}(\alpha)}{H_n(\alpha)} \neq 0$ tendríamos que $P_{i-1}(\alpha)\cdot P_{i+1}(\alpha)<0$.

Si fuese $\dfrac{H_{i-1}(\alpha)}{H_n(\alpha)}=0$ tendríamos que $\dfrac{P(\alpha)}{H_n(\alpha)}=0$ y $\dfrac{P'(\alpha)}{H_n(\alpha)}=0$
lo cual es absurdo pues siendo $H_n(x) = \text{mcd}(P(x),P'(x))$, $\dfrac{P(x)}{H_n(x)}$ y $\dfrac{P'(x)}{H_n(x)}$ no tienen raices comunes. csqd.

DEFINICION: Se dice que la $n+1$-upla de números reales $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ tiene una variación de signo cuando dos elementos consecutivos tienen signos opuestos (los ceros se ignoran).
Por ejemplo $(1,3,-2,0,7,0,3,-6,4)$ tiene 4 variaciones de signo.
Al número de variaciones de signo de $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ lo denotaremos por $V(a_0,a_1,\dots,a_n)$.
Es trivial que $V(a_0,a_1,\dots,a_n) = V(a_0,\dots,a_i)+V(a_i,\dots,a_n)$, $i=1,\dots,n-1$.

2.3. TEOREMA: (de Sturn).
Dado el polinomio $P(x)$ y el intervalo $[a,b]$, si $P(a)\cdot P(b)\neq 0$ entonces el número de raices reales distintas de $P(x)$ en el intervalo $]a,b[$ es $v(a)-v(b)$ siendo $v: x\in[a,b] \mapsto v(x)=V(P_0(x),P_1(x),\dots,P_n(x))$ donde $P_0(x),\dots,P_n(x)$ es la sucesión de Sturn relativa a $P(x)$ y a $[a,b]$.

Demostr.: Estudiemos cómo varía $V(P_0(x),\dots,P_n(x))$ cuando x recorre $[a,b]$.
Consideraremos tres casos:
i) Sea $\alpha\in[a,b]$ tal que $P_i(\alpha)\neq 0$, $i=0,1,\dots,n$.
Como las funciones P_i son continuas
$\exists\, \varepsilon>0 \;/\; |x-\alpha|<\varepsilon \Rightarrow P_i(x)\neq 0$, $i=0,1,\dots,n$
y, por tanto, $P_i(x)$ no cambia de signo en $]\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon[$.

Por tanto, $V(P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x))$ es constante en $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$

ii) Sea $\alpha \in [a,b]$. Supongamos que $\exists i \in \{1, \dots, n-1\} / P_i(\alpha) = 0$, es decir, suponemos que α no es raiz de $P_0(x)$. Además α ~~no~~ es raiz de $P_n(x)$, pues $P_n(x)$ no tiene raices en $[a,b]$.

Entonces, según PROPOSICION 2.2., existe $\varepsilon > 0$ tal que $P_{i-1}(x) \cdot P_{i+1}(x) < 0$, $\forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$.

Se pueden dar entonces los siguientes casos, para $x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$

sgn $P_{i-1}(x)$	sgn $P_i(x)$	sgn $P_{i+1}(x)$
+	+	−
+	−	−
−	+	+
−	+	+

En cualquier caso $V(P_{i-1}(x), P_i(x), P_{i+1}(x)) = 1$.

Puede suceder que $\exists j \in \{1, \dots, n-1\}, j \neq i / P_j(\alpha) = 0$. En este caso existiría $\varepsilon' > 0$ tal que $V(P_{j-1}(x), P_j(x), P_{j+1}(x)) = 1$.

En total, aplicando que $V(a_0, \dots, a_i) + V(a_i, \dots, a_n) = V(a_0, a_1, \dots, a_n)$ y tomando el menor de los ε tendríamos que

$V(P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x))$ es constante en $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$.

iii) Sea $\alpha \in]a,b[$ una raiz de $P(x)$. Entonces $P_0(\alpha) = 0$.

Probemos que $\exists \varepsilon > 0 / P_0(x) P_1(x) < 0, \forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha[$ y $P_0(x) P_1(x) > 0, \forall x \in]\alpha, \alpha+\varepsilon[$.

Como consecuencia inmediata de la definición, $P_0(x)$ y $P_1(x)$ no tienen raices comunes. Siendo α raiz de $P_0(x)$, no será raiz de $P_1(x)$ y por tanto, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $P_1(x) \neq 0, \forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$.

Siendo $P_1(x)$ continua, no cambia de signo en $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$.

Supongamos que $P_1(x) < 0, \forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$. Entonces P_0 es decreciente (*)

Luego si $\alpha-\varepsilon < x < \alpha$, $P_0(x) > P_0(\alpha) = 0$ y $P_1(x) < 0$

y si $\alpha+\varepsilon > x > \alpha$, $P_0(x) < 0$ y $P_1(x) < 0$

Luego $P_0(x) P_1(x) < 0$ si $x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha[$ y $P_0(x) \cdot P_1(x) > 0$ si $x \in]\alpha, \alpha+\varepsilon[$

Análogamente se prueba esto si $P_1(x) > 0, \forall x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$.

Por tanto, si α es "la primera raiz" de $P(x)$ en $]a,b[$, $V(P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x))$ permanece constante en $[a, \alpha[$ e igual a $V(a)$, pues los puntos de $[a, \alpha[$ están en uno de los casos i) o ii), y para cada uno de estos puntos existe un entorno en el que la variación de signo de $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ permanece constante.

Veamos qué ocurre en "los alrededores" de α. Hemos probado que

$\exists \varepsilon > 0 \,/\,$ $P_0(x)P_1(x) < 0$ si $x \in]\alpha-\varepsilon, \alpha[$ y $P_0(x)P_1(x) > 0$ si $x \in]\alpha, \alpha+\varepsilon[$.
Además podemos tomar ε suficientemente pequeño para que en $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$ no haya otra raíz de $P(x)$.
Entonces en $]\alpha-\varepsilon, \alpha[$ P_0 y P_1 tienen distinto signo y en $]\alpha, \alpha+\varepsilon[$ el mismo signo. Luego como

$$V(P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)) = V(P_0(x), P_1(x)) + V(P_1(x), \ldots, P_n(x))$$

tenemos que la $n+1$-upla $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ tiene una variación menos en $]\alpha, \alpha+\varepsilon[$ que en $]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[$.
De la misma forma si α' es la segunda raíz de $P(x)$ en $]a,b[$, $V(P_0(x), \ldots, P_n(x))$ es constante en $]\alpha, \alpha'[$, y en α' la función $v(x) = V(P_0(x), \ldots, P_n(x))$ tiene un salto unidad.
Luego por cada raíz de $P(x)$ en $]a,b[$ hay una disminución en una unidad de la variación de signo de $P_0(x), \ldots, P_n(x)$.
Si α^p es "la última" raíz de $P(x)$ en $]a,b[$, en $]\alpha^p, b]$, v es constante e igual a $v(b)$.
Luego el número de raíces de $P(x)$ en $]a,b[$ coincide con el número de "saltos unidad" de la función v, y este número es $v(a) - v(b)$. ■