4ª PARTE: INTERPOLACION DE FUNCIONES.

TEMA 10º: INTERPOLACION DE FUNCIONES

1. INTRODUCCION.

A) Un problema clásico de la matemática es el siguiente: supongamos que se conocen unos determinados valores de una función para unos valores dados de la variable; se trata de calcular, aproximadamente, el valor de la función en un punto intermedio entre los valores dados de la variable. El problema consiste en encontrar una función fácil de construir y de evaluar y que coincide con la función objeto en los datos que tenemos sobre ésta.
Se dice que la función construida interpola a la función objeto.
Es evidente que en un problema de este tipo hay que concretar, principalmente dos cosas: los datos que son comunes a la función dada y a la que la va a interpolar, y qué tipo de función vamos a usar como interpoladora.
El ejemplo más típico es el siguiente: Sea f una función de una variable cuyo valor se conoce en $n+1$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$
Llamaremos $f(x_k)=f_k$, $k=0,1,\dots,n$.
Se desea encontrar un valor aproximado de f para un valor cualquiera de x. Para ello intentaremos encontrar un polinomio de grado menor o igual que n que tome los valores f_k en los puntos x_k. Podemos preguntarnos si existe tal polinomio, y en este caso, si es único. Veamoslo.
Sea $$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$
el polinomio que se busca. Las condiciones impuestas determinan que los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ deben satisfacer el sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas

$$a_0x_k^n + a_1x_k^{n-1} + \dots + a_{n-1}x_k + a_n = f_k \quad , k=0,1,\dots,n$$

La existencia y unicidad de soluciones de este sistema dependen del determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & & & & \end{vmatrix}$$

Este determinante, llamado de Vandermonde, vale

$$\Delta_n = (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_0)(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-3}) \cdots (x_{n-1} - x_0) \cdots (x_1 - x_0) =$$
$$= \prod_{\substack{i=1 \\ j<i}}^{n} (x_i - x_j)$$

Por tanto, $\Delta_n \neq 0$ si, y sólo si, $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$.

Otro ejemplo es el siguiente: Supongamos que de una función f se conoce su valor f_0 en x_0 y los valores $f'_1, f'_2, \ldots, f'_n$ de su derivada en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Queremos construir un polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que n tal que

$$\begin{cases} P(x_0) = f_0 \\ P'(x_k) = f'_k, \ k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Obtenemos imponiendo estas condiciones un sistema lineal

$$a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x_0 + a_n = f_0$$
$$n a_0 x_k^{n-1} + (n-1) a_1 x_k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} = f'_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} & \cdots & x_0 & 1 \\ n x_1^{n-1} & (n-1) x_1^{n-2} & (n-2) x_1^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ n x_2^{n-1} & (n-1) x_2^{n-2} & (n-2) x_2^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n x_n^{n-1} & (n-1) x_n^{n-2} & (n-2) x_n^{n-3} & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante por los elementos de la última columna se prueba que el problema tiene solución única si $x_1, \ldots, x_n$ son distintos dos a dos, aunque uno de ellos coincida con x_0.

B) GENERALIZACION DEL PROBLEMA: Si en vez de pedir que la función de interpolación sea un polinomio pedimos que sea una función del tipo $P(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \cdots + c_n \varphi_n(x)$, combinación lineal de unas funciones dadas $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ que verifique

$$P(x_k) = f_k \quad , k = 0, 1, \ldots, n \qquad (I)$$

se planteará un sistema lineal con determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_0(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

El problema de interpolación tendrá solución única si, y solo si, $\Delta \neq 0$.
El caso de interpolación polinomial es un caso particular de esto para $\varphi_k(x) = x^k$, $k=0,1,\ldots,n$.

Pedir que P sea de la forma $c_0\varphi_0(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)$ equivale a pedir que P pertenezca al espacio vectorial de dimensión menor o igual que $n+1$ engendrado por $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Por otra parte las condiciones del tipo (I), al imponer que las verifique P, dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales. Esto sucede porque la aplicación que a cada P del espacio vectorial V engendrado por $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ le hace corresponder el valor $P(x_k)$, para un x_k dado, es una aplicación lineal de V en $\mathbb{R}$, es decir, una forma lineal definida sobre V.

En resumen, en los ejemplos del apartado A) se nos ha dado un espacio vectorial de dimensión $n+1$ al que ha de pertenecer la función de interpolación, y se nos han dado $n+1$ formas lineales $L_0, L_1, \ldots, L_n$ que en un caso vienen dadas por

$$L_k(P) = P(x_k) \quad , \; k=0,1,\ldots,n$$

y en otro por

$$L_0(P) = P(x_0)$$
$$L_k(P) = P'(x_k) \quad k=1,\ldots,n.$$

Y queríamos hallar P de forma que $L_0(P), L_1(P), \ldots, L_n(P)$ tomaran unos valores dados, que en el primer caso eran los f_k y en el segundo f_0 y f'_k.

2. PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACION.

Entenderemos por problema general de interpolación el siguiente:
"Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita n, y $L_1, L_2, \ldots, L_n$ n formas lineales sobre V y $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n números reales dados. Se pide hallar un elemento $P \in V$ tal que

$$L_i(P) = z_i \quad , \; i=1,2,\ldots,n." \qquad (\mathrm{II})$$

2.1. TEOREMA: Sea $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ una base de V. Una condición necesaria y suficiente para que el problema de interpolación (II) admita solución única para valores cualesquiera z_i es que

$$D = \det(L_i(P_j))_{i,j=1,\ldots,n} \neq 0$$

Demostr.: Buscar la solución P del problema equivale a buscar unos números reales $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que

$$L_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j P_j\right) = z_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

o bien, por la linealidad de L_i

$$\sum_{j=1}^{n} a_j L_i(P_j) = z_i \quad , \quad i=1,\dots,n$$

sistema que tendrá solución única para valores cualesquiera $z_1, \dots, z_n$ cuando, y solo cuando, $D \neq 0$. c.q.d.

Veamos algunos casos particulares del problema anterior.

A) PROBLEMA DE INTERPOLACION POLINOMIAL CLASICA:

Es el primero que hemos visto en la introducción. Tomamos $V = \mathcal{P}_n$ y $L_k(P) = P(x_k)$, $k=0,1,\dots,n$, donde $x_0, x_1, \dots, x_n$ son $n+1$ puntos distintos.

Los z_k son aquí los valores que toma una función dada en los puntos x_k: $z_k = f(x_k)$, $k=0,1,\dots,n$.

Como P_k puede tomarse $P_k(x) = x^k$, $k=0,1,\dots,n$.

Ya comprobamos que se verificaba el teorema 2.1 en la introducción.

B) PROBLEMA DE INTERPOLACION DE TAYLOR:

Consideremos el espacio vectorial $V = \mathcal{P}_n$ y tomemos

$$L_k(P) = P^{(k)}(x_0) \quad , \quad k=0,1,\dots,n$$

donde $P^{(k)}$ indica la derivada k-ésima de P y x_0 es un punto dado. Naturalmente, se entiende que $P^{(0)} = P$.

Usualmente las z_k son aquí las derivadas sucesivas de una determinada función f en el punto x_0:

$$z_k = f^{(k)}(x_0) \quad , \quad k=0,1,\dots,n.$$

Como P_k se puede tomar las mismas que en A); resulta así que

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & 1 & 2x_0 & \cdots & n x_0^{n-1} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & n(n-1)x_0^{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{vmatrix} = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot n! \neq 0.$$

Por tanto, el problema de interpolación de Taylor admite siempre solución única.

La interpretación del problema es evidente: se busca un polinomio de grado $\leq n$ tal que su valor y el de sus n primeras derivadas coincidan en un punto x_0 dado con el valor de la función y sus derivadas en dicho punto. Dicho polinomio es, evidentemente, el polinomio de Taylor de grado n relativo a f en el punto x_0, es decir

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

C) PROBLEMA DE INTERPOLACION DE HERMITE:

V será, en este caso, el espacio vectorial de los polinomios de grado $\leq 2m-1$, que es de dimensión $2m$.

Las formas lineales L_k serán de la forma

$$\begin{cases} L_k(P) = P(x_r) & \text{si } k = 2r-1, \quad r = 1, 2, \ldots, m \\ L_k(P) = P'(x_r) & \text{si } k = 2r, \quad r = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Los números z_k serán

$$z_k = f(x_r) \quad \text{si } k = 2r-1, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$
$$z_k = f'(x_r) \quad \text{si } k = 2r, \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

Como P_k tomaremos

$$P_k = x^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2m.$$

Los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$ son m puntos distintos.

La interpretación del problema en este caso es la búsqueda de un polinomio de grado $\leq 2m-1$ que coincida él y su primera derivada con los valores de una función dada y su primera derivada en unos puntos $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

El determinante del sistema de ecuaciones que se obtiene en este caso es

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^{2m-1} \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 & \cdots & (2m-1)x_1^{2m-2} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^{2m-1} \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & \cdots & (2m-1)x_2^{2m-2} \\ - & - & - & - & - & - \\ 1 & x_m^1 & x_m^2 & x_m^3 & \cdots & x_m^{2m-1} \\ 0 & 1 & 2x_m & 3x_m^2 & & (2m-1)x_m^{2m-2} \end{vmatrix}$$

Para probar que $D \neq 0$ probaremos que el sistema homogeneo cuyo determinante es D, es decir, tomando $z_k = 0$, $\forall k$, tiene sol[illegible]

En efecto, el polinomio de grado menor o igual que $2m-1$ que [illegible] y su primera derivada en $x_1, \ldots, x_m$ debe tener raíces dobles en todos esos puntos, es decir, debe contener a todos los factores $(x-x_k)^2, k=1,\dots,m$. Pero esto no es posible pues entonces sería de grado $\geq 2m$. La única posibilidad es que el polinomio sea idénticamente nulo.

D) PROBLEMA DE INTERPOLACION TRIGONOMETRICA:

Sea V el espacio vectorial engendrado por las funciones

$$1, \cos x, \operatorname{sen} x, \cos 2x, \operatorname{sen} 2x, \dots, \cos nx, \operatorname{sen} nx.$$

La formas lineales L_k serán

$$L_k(P) = P(x_k) \quad k=0,1,\dots,2n$$

donde se supondrá que los x_k son puntos distintos del intervalo $[-\pi,\pi[$.

Como P_k tomaremos, evidentemente, los $1, \cos x, \operatorname{sen} x, \dots, \cos nx, \operatorname{sen} nx$.

Para estudiar este problema procederemos igual que en C): ver si el problema homogéneo admite solución única; esto demostrará que el determinante del sistema $\det[L_i(P_j)]$ es no nulo.

Escribamos la solución del problema homogéneo en la forma

$$P(x) = +a_{-n}\operatorname{sen} nx + a_{-n+1}\operatorname{sen}(n-1)x + \dots + a_{-1}\operatorname{sen} x + a_0 + a_1\cos x + \dots + a_{n-1}\cos(n-1)x + a_n\cos nx$$

Se supone que $P(x_k)=0$, $k=0,1,\dots,2n$.

Teniendo en cuenta las formulas de Euler

$$\cos kx = \frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2} \qquad \operatorname{sen} kx = \frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}$$

Llegaríamos a que

$$P(x) = b_{-n}e^{-inx} + \dots + b_{-1}e^{-ix} + b_0 + b_1 e^{ix} + \dots + b_n e^{inx} \qquad (\mathrm{I})$$

donde

$$\left\{\begin{array}{ll} b_k = \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{a_{-k}}{2i} & k>0 \\ b_0 = a_0 & \\ b_{-k} = \dfrac{a_k}{2} - \dfrac{a_{-k}}{2i} & k>0 \end{array}\right. \qquad (\mathrm{II})$$

Como $e^{inx} = \cos nx + i\operatorname{sen} nx$ es no nulo por ser de módulo 1, de (I) y de la anulación de P en los x_k se implica que

$$P(x)e^{inx} = b_{-n} + b_{-n+1}e^{ix} + \dots + b_0 e^{inx} + \dots + b_n e^{i2nx}$$

se anula en los x_k, $k=0,1,\dots,2n$. Haciendo el cambio $y=e^{ix}$ obtendríamos

$$b_{-n} + b_{-n+1}y + \dots + b_0 y^n + \dots + b_n y^{2n}$$

polinomio de grado $2n$ con coeficientes complejos que se ha de anular para los valores $y_k = e^{ix_k}$, $k=0,1,\dots,2n$.

Como los x_k pertenecen al intervalo $[-\pi,\pi[$ y son distintos, todos los y_k serán distintos, con lo cual tenemos un polinomio con coeficientes complejos de grado $2n$ que se anula en $2n+1$ puntos $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ distintos dos a dos. Esto no es posible, a menos que el polinomio sea identicamente nulo, es decir que

$$b_k = b_{-k} = 0 \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n . \qquad (\mathrm{III})$$

Segun (II) y (III) los a_k, a_{-k} y a_0 tendrán que ser todos nulos, es decir, que el problema homogéneo tiene solución única (la trivial) y, por tanto, $\det[L_i(P_j)] \neq 0$.
Esto significa que tambien el problema de interpolación trigonométrica tiene solución única para valores cualesquiera de los z_k.

3. CONSTRUCCION DEL POLINOMIO DE INTERPOLACION: FORMULA DE LAGRANGE

A) Hemos visto que el problema de interpolación clásica tiene solución única. Veamos como se puede construir el polinomio de interpolación de una forma distinta a como lo hemos hecho anteriormente
Veamos primero que es fácil construir un polinomio de grado n que sea nulo en todos los puntos x_i salvo en uno x_k, en el cual valga 1. Dicho polinomio será de la forma

$$a \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x - x_i)$$

con $a \in \mathbb{R}$. Pero para $x = x_k$ debe valer 1, luego

$$a = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} (x_k - x_i)}$$

Por tanto, el polinomio que buscamos puede expresarse como

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

Entonces, si se desea un polinomio de grado n que tome los valores $z_0, z_1, \ldots, z_n$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ basta tomar

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} z_k l_k(x) = z_0 l_0(x) + \cdots + z_n l_n(x) . \qquad (\mathrm{I})$$

En particular, si los valores z_k son los valores que toma la función f en los puntos x_k se tiene que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_k(x) \qquad (\mathrm{II})$$

Por ejemplo, dada una función f cuyos valores se conocen en x_0, x_1, el polinomio de grado 1 que interpola a f en estos puntos es

$$P(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Este tipo de interpolación suele llamarse lineal.

La expresión (I) ó la (II) recibe el nombre de Fórmula de Lagrange del polinomio de interpolación. Los l_k suelen llamarse polinomios de Lagrange.

B) FORMULA DE LAGRANGE PARA EL PROBLEMA GENERAL DE INTERPOLACION:

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n, $L_1, L_2, \ldots, L_n$ n formas lineales sobre V y $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ una base de V.

Suponiendo que $D = \det(L_i(P_j)) \neq 0$, el problema de interpolación que consiste en hallar $P \in V$ tal que

$$L_i(P) = z_i \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

tiene solución única para valores cualesquiera de los z_i.

En particular si tomamos $z_k = 1$, $z_i = 0$, si $i \neq k$, existe un único $l_k \in V$ tal que

$$L_i(l_k) = 0 \quad \text{si } i \neq k \quad \text{y} \quad L_k(l_k) = 1$$

o bien, utilizando la delta de Kronecker

$$L_i(l_k) = \delta_{ik}$$

La obtención de l_k no es en general sencilla. En último extremo queda el recurso de resolver el sistema que se plantea.

El proceso anterior puede hacerse para $k = 1, 2, \ldots, n$. Se tiene entonces el siguiente resultado

3.1. TEOREMA (Fórmula de Lagrange)

El elemento $P \in V$ que verifica $L_i(P) = z_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ puede expresarse en la forma

$$P = \sum_{k=1}^{n} z_k l_k \qquad (\mathrm{III})$$

Demostr.: Como $\sum_{k=1}^{n} z_k l_k \in V$, pues $l_k \in V$, $k = 1, \ldots, n$ y

$$L_i\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k l_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} z_k L_i(l_k) = \sum_{k=1}^{n} z_k \delta_{ik} = z_i \;,\; i = 1, \ldots, n$$

se verifica que $P = \sum_{k=1}^{n} z_k l_k$. c.s.q.d.

La ventaja que presenta la fórmula de Lagrange en todo caso es que con unas mismas L_i y un mismo espacio V se pueden resolver varios problemas de interpolación, con z_i distintos en cada caso; conociendo los l_k no tenemos más que ir sustituyendo en (III) los valores z_k para ir obteniendo los distintos P que resultan.

C) CASOS PARTICULARES:

C.1: Escribiremos en primer lugar el polinomio de interpolación de Taylor.

Es evidente que un polinomio l_k de grado menor o igual que n que se anula junto con sus derivadas, excepto la de orden k, en x_0 es de la forma

$$a(x-x_0)^k$$

Si se quiere que la derivada k-esima valga 1 en x_0 ha de ser

$$a=\frac{1}{k!}$$

Se tiene entonces que

$$l_k=\frac{(x-x_0)^k}{k!} \qquad k=0,1,\dots,n.$$

Obsérvese que en este caso la fórmula de Lagrange correspondiente al problema de hallar P tal que

$$P^{(j)}(x_0)=f^{(j)}(x_0), \quad j=0,1,\dots,n$$

se escribe

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

es decir, es el polinomio que aparece al desarrollar en serie de Taylor la función f en x_0 y suprimir el término complementario o resto.

C.2: El caso de la interpolación de Hermite es algo más complicado. Tenemos en este caso

$$P(x)=\sum_{k=1}^{2m} z_k l_k(x)$$

$$P'(x)=\sum_{k=1}^{2m} z_k l'_k(x)$$

Nos interesa que $P(x_i)=f(x_i)$, $i=1,\dots,m$ y $P'(x_i)=f'(x_i)$, $i=1,\dots,m$, y esto se conseguirá si tomamos los z_k y l_k de la forma

$$z_k=f(x_r) \quad \text{si} \quad k=2r-1, \ r=1,\dots,m$$

$$z_k=f'(x_r) \quad \text{si} \quad k=2r, \ r=1,\dots,m$$

$$l_k(x_i)=\delta_{ir}, \quad \text{si} \quad k=2r-1, \ r=1,\dots,m$$

$$l'_k(x_i)=0 \quad \text{si} \quad k=2r-1, \ r=1,\dots,m$$

$l_k(x_i) = 0$ si $k = 2r$, $r = 1, \dots, m$.
$l'_k(x_i) = \delta_{ir}$ si $k = 2r$, $r = 1, \dots, m$.

Por tanto, si $k = 2r-1$ nos interesa encontrar un polinomio de grado $\leq 2m-1$ que en x_r tome el valor 1 y en x_j, $j \neq r$, el valor cero y que su derivada se anule en todo x_i.

El polinomio

$$g_r(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{x - x_i}{x_r - x_i}$$

verifica que $g_r(x_r) = 1$, $g_r(x_i) = 0$ si $i \neq r$. (IV)

Vamos a determinar a y b para que el polinomio

$$l_k(x) = (ax+b)\, g_r^2(x) \qquad \text{(V)}$$

verifique $l_k(x_r) = 1$, $l_k(x_i) = 0$ si $i \neq r$, $l'_k(x_i) = 0$, $\forall i$. (VI)

$$l'_k = a\, g_r^2(x) + 2(ax+b)\, g_r(x)\, g'_r(x) \qquad \text{(VII)}$$

De (IV) y (V) se deduce que

$$a x_r + b = 1 \qquad \text{(VIII)}$$

y de (VI) y (VII)

$$a(1 + 2x_r g'_r(x_r)) + b(2g'_r(x_r)) = 0 \qquad \text{(IX)}$$

pues $g_r(x_r) = 1$. Calculando a y b de (VIII) y (IX) se obtiene al sustituir en (V) que

$$l_k(x) = [1 - 2g'_r(x_r) \cdot x + 2g'_r(x_r)\, x_r]\, g_r^2(x), \quad k = 2r-1, \quad r = 1, \dots, m,$$

polinomio que verifica lo deseado.

Si $k = 2r$ nos interesa encontrar un polinomio de grado $\leq 2m-1$ que en x_i se anule para todo i y que su derivada valga 1 en x_r y 0 en x_i si $i \neq r$.

Este polinomio es $l_k(x) = (x - x_r)\, g_r^2(x)$, $k = 2r$, $r = 1, \dots, m$

El caso de la interpolación trigonométrica no lo haremos.

D) Veamos como se simplifica la fórmula de Lagrange del problema de interpolación clásico cuando los puntos x_i son equidistantes. Cuando se verifica que $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \dots, n$ podemos hacer un cambio de variables que simplifica e incluso uniformiza la expresión de los polinomios de Lagrange. En efecto, si hacemos $x = x_0 + sh$ se tiene que

$$l_k(x) = l_k(x_0 + sh) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{s-j}{k-j}$$

ya que $x - x_j = (s-j)h$ y $x_k - x_j = (k-j)h$.

Llamando $u_k(s) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{s-j}{k-j}$ y $P(x) = P(x_0+sh) = q(s)$

la fórmula de Lagrange (III) queda

$$P(x) = q(s) = \sum_{k=0}^{n} z_k u_k(s)$$

Observar que los polinomios $u_k(s)$ no dependen de h, sino sólo del número de puntos que se emplean para la interpolació[n]. Esto ha inducido a la elaboración de tablas que permiten conocer un valor con gran detalle: dado x se encuentra el valor $s = \frac{x-x_0}{h}$ e inmediatamente se puede conocer el valor de las $u_k(s)$ en las tablas y por tanto el de $q(s)$, o sea el de $P(x)$.

4. DIFERENCIAS DIVIDIDAS: FORMULA DE NEWTON PARA EL POLINOMIO DE INTERPOLACION.

A) A partir de ahora nos centraremos en el problema de interpolación polinomial. La fórmula de Lagrange presenta algunos inconvenientes en la práctica. Uno de ellos es que para pasar del polinomio de grado n que interpola a una función en los puntos $x_0, \ldots, x_n$ al polinomio de grado $n+1$ que la interpola en $x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}$ hay que volver a hacer los cálculos desde el principio, puesto que varían todos los l_k. Otro es la dificultad para disponer los cálculos de una manera sencilla desde el punto de vista de su posterior paso a una calculadora. Nuestro objetivo será eliminar estas dificultades.

Vamos a estudiar en primer lugar qué sucede al pasar del polinomio P_{k-1} que interpola a f en $x_0, \ldots, x_{k-1}$ al P_k que la interpola en $x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k$. Supondremos que estos puntos son distintos. La diferencia

$$q_k(x) = P_k(x) - P_{k-1}(x)$$

es un polinomio de grado no mayor que k que se anula en los puntos $x_0, \ldots, x_{k-1}$, pues en dichos puntos $P_k(x_i) = P_{k-1}(x_i) = f(x_i)$.

Entonces q_k será de la forma

$$q_k(x) = A_k (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1}) = A_k \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i).$$

donde $A_k \in \mathbb{R}$.

Entonces se tiene que

$$A_k = \frac{P_k(x) - P_{k-1}(x)}{\prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i)} \qquad (I)$$

y en particular dándole a x el valor x_k, por ser $P_k(x_k) = f(x_k)$

$$A_k = \frac{f(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{i=0}^{k-1}(x_k-x_i)} \qquad (II)$$

Como $P_0(x) = f(x_0)$ podemos llamar $A_0 = f(x_0)$

Segun (I) tenemos la fórmula de recurrencia

$$P_k(x) = A_k \prod_{i=0}^{k-1}(x-x_i) + P_{k-1}(x)$$

donde los A_k los podemos ir calculando utilizando (II).

La expresión del polinomio de interpolación sería pues

$$P_n(x) = A_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + A_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}).$$

Así el paso a $P_{n+1}(x)$ consistiría en añadir el sumando

$$A_{n+1}(x-x_0)\cdots(x-x_n).$$

Por convenio escribiremos

$$A_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

y llamaremos a esta expresión <u>diferencia dividida</u> de f en los puntos $x_0, \ldots, x_i$. Observar que esta notación tiene sentido pues A_i solo depende de $f, x_0, \ldots, x_i$.

B) PROPIEDADES DE LAS DIFENCIAS DIVIDIDAS:

<u>4.1. TEOREMA:</u> La diferencia dividida de f en $x_0, x_1, \ldots, x_k$ $(k \geq 1)$ puede expresarse en la forma

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$$

y por tanto es función simétrica de sus argumentos es decir se verifica que $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = f[x_{j_0}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}]$ para toda permutación $(j_0, j_1, \ldots, j_k)$ del conjunto $\{0, 1, \ldots, k\}$.

Demostr.: El polinomio de interpolación de f en $x_0, x_1, \ldots, x_k$ se puede escribir en la forma

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f[x_0, x_1, \ldots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \qquad (\text{III})$$

conviniendo que si $i=0$, $\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) = 1$.

Tambien podemos expresar el polinomio $P_k(x)$ en la forma de Lagrange

$$P_k(x) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad (\text{IV})$$

El coeficiente de x^k en (III) es $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ y en (IV) es $\sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)}$. Por tanto se verifica el teorema. csqd.

En particular se tiene que $f[x_0] = f(x_0)$, y

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = f[x_1, x_0].$$

Otra propiedad interesante viene dada por

4.2. TEOREMA: Para todo $k \geq 1$ se verifica

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_0, \ldots, x_{k-1}] - f[x_1, \ldots, x_k]}{x_0 - x_k}$$

Demostr.: Escribamos el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_0$. Se tiene

$$P_k(x) = B_0 + B_1(x - x_k) + B_2(x - x_k)(x - x_{k-1}) + \ldots + B_k(x - x_k)(x - x_{k-1}) \cdots (x - x_1) \quad (\text{V})$$

Evidentemente este es el mismo polinomio que teníamos antes pues es el polinomio que interpola a f en los mismos puntos que antes. (*)

Por otra parte

$$P_k(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \ldots + A_k(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}). \qquad (\text{VI})$$

Como $A_k = f[x_0, \ldots, x_k]$ y $B_k = f[x_k, \ldots, x_0]$ se tiene que $A_k = B_k$. Entonces restando (V) de (VI) resulta

$$(A_{k-1} - B_{k-1})\, x^{k-1} + P_{k-2}(x)$$

donde P_{k-2} es un polinomio de grado $k-2$ cuya expresión no nos interesa. Por otra parte al restar

$$A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1}) \quad y \quad B_k(x-x_k)(x-x_{k-1})\cdots(x-x_1)$$

y teniendo en cuenta que $A_k = B_k$ resulta

$$A_k(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})[(x-x_0)-(x-x_k)] = A_k(x_k-x_0)\prod_{i=1}^{k-1}(x-x_i)$$

Luego en definitiva, al restar (V) de (VI) resulta

$$0 \equiv P_{k-2}(x) + (A_{k-1}-B_{k-1})x^{k-1} + A_k(x_k-x_0)\prod_{i=1}^{k-1}(x-x_i)$$

Como el segundo miembro ha de ser idénticamente nulo, el coeficiente de x^{k-1} ha de ser nulo. Luego

$$A_{k-1} - B_{k-1} + A_k(x_k-x_0) = 0$$

es decir
$$A_k = \frac{A_{k-1}-B_{k-1}}{x_0-x_k} \qquad \text{(VII)}$$

Como $B_{k-1} = f[x_k, \ldots, x_1]$, por ser el coeficiente en (V) de $(x-x_k)\cdots(x-x_2)$ y por la simetría de las diferencias divididas se tiene

$$B_{k-1} = f[x_1, \ldots, x_k]$$

con lo cual sustituyendo en (VII) los valores de A_k, A_{k-1} y B_{k-1} queda probada la tesis del teorema. ■

C) FORMULA DE NEWTON DEL POLINOMIO DE INTERPOLACION:

La expresión

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \ldots, x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \qquad \text{(VIII)}$$

recibe el nombre de fórmula de Newton del polinomio de interpolación. Para pasar a $P_{n+1}(x)$ no hay más que añadir un término en (VIII).

Una manera cómoda para disponer los cálculos del valor de un polinomio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ es la siguiente

$$a_n + x(a_{n-1} + x(a_{n-2}(a_{n-3} + \cdots + x(a_1 + xa_0))\cdots))$$

ya que se calcula $a_1 + a_0x$, se multiplica por x, se le suma a_2, se multiplica por x, se le suma a_3 y así sucesivamente. Esto se puede representar esquemáticamente así:

$$\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_k = a_k + xb_{k-1}, \; k \geq 1 \end{cases}$$

Análogamente, si el polinomio se presenta en forma similar a la de la fórmula de Newton, es decir

$$P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

se puede escribir

$$P(x) = a_0 + (x-x_0)\Big(a_1 + (x-x_1)\big(a_2 + \dots + (x-x_{n-2})(a_{n-1} + (x-x_{n-1})a_n)\big)\dots\Big)$$

que se puede esquematizar así

$$\begin{cases} b_0 = a_n \\ b_k = a_{n-k} + (x-x_{n-k})\,b_{k-1}, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

De esta forma, b_n es el valor en x de $P(x)$.

5. ESTUDIO DEL ERROR DE INTERPOLACION.

Definimos el error de interpolación como

$$E(x) = f(x) - P(x)$$

donde $P(x)$ es el polinomio interpolador de f en $x_0, x_1, \dots, x_n$; puesto que $P(x)$ es único se puede utilizar para estudiar $E(x)$ cualquiera de las formas dadas para $P(x)$. La que utilizaremos es la forma de Newton.

5.1. TEOREMA: Si f es una función definida en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ distintos dos a dos y P_n es el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $x_0, x_1, \dots, x_n$ entonces el error de interpolación en x puede escribirse en la forma

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Demostr.: Sabemos que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f(x_k) - P_{k-1}(x_k)}{\prod_{i=0}^{k-1} (x_k - x_i)}$$

Si hacemos $x_{n+1} = x$ se tendrá

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1})}{\prod_{i=0}^{n} (x_{n+1} - x_i)}$$

Luego, volviendo a escribir x, tenemos que

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \dots, x_{n+1}, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \quad \text{csqd.}$$

Bajo ciertas hipótesis podremos expresar $E(x)$ de forma más cómoda.

5.2. TEOREMA: Si f es una función de clase C^n en un intervalo $[a,b]$ al que pertenecen $n+1$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$, entonces existe $\xi \in]a,b[$ tal que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Demostr.: La función $E(x) = f(x) - P_n(x)$ es de clase C^n en $[a,b]$ y se anula para $x_0, x_1, \dots, x_n$. Por el teorema de Rolle, resulta que $E'(x)$ se anulará al menos en n puntos intermedios entre aquellos. Como $E' \in \mathcal{C}^{n-1}([a,b])$ y se anula en n puntos de $[a,b]$, su derivada E'' se anulará en $n-1$ puntos intermedios entre estos.

Así sucesivamente, la función $E^{(n-1)}(x) \in \mathcal{C}^1([a,b])$ se anula en 2 puntos de $]a,b[$, luego $E^n(x)$ se anula en un punto ξ intermedio entre ellos

$$0 = E^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - P_n^{(n)}(\xi)$$

Pero $P_n^{(n)}(\xi) = f[x_0, \dots, x_n]\, n!$ $\quad (*)$

Entonces $f^{(n)}(\xi) = f[x_0, \dots, x_n]\, n!$. csqd.

OBS.: ① Se puede decir algo más, el punto ξ se encuentra entre los $x_0, x_1, \dots, x_n$.

② Ahora podemos emplear este resultado para escribir el error de interpolación de otra forma, como indica el siguiente

5.3. TEOREMA: Sea $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$ y $x_0, x_1, \dots, x_n, x$ son puntos distintos en $[a,b]$. Sea P_n el polinomio de interpolación de f en $x_0, x_1, \dots, x_n$. Se tiene entonces que

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

donde ξ es un punto intermedio entre $x_0, x_1, \dots, x_n$.

Demostr.: Se verifica por el teorema anterior que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Entonces, según teorema 5.1

$$E[x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad \text{csqd.}$$

5.4. COROLARIO: Si hacemos $M = \max_{a \le t \le b} |f^{(n+1)}(t)|$

se tiene que $|E(x)| \le \frac{M}{(n+1)!} \max_{t \in [a,b]} \left| \prod_{i=0}^{n} (t - x_i) \right|$, $\forall x \in [a,b]$.

Calculemos como aplicación de este resultado una cota para el error de interpolación lineal. Sea $f \in \mathcal{C}^2[x_0, x_1]$ y $M = \sup_{t \in [x_0, x_1]} |f''(t)|$.

Entonces $|E(x)| \le \frac{M}{2} \max_{t \in [x_0, x_1]} |(t - x_0)(t - x_1)|$

El polinomio $(t-x_0)(t-x_1)$ se anula en x_0 y x_1, y cuando t esta entre x_0 y x_1 el valor absoluto de este polinomio es

$$|(t-x_0)(t-x_1)| = (t-x_0)(x_1-t)$$

polinomio que presenta un máximo en el punto $t = \frac{x_0 + x_1}{2}$

cuyo valor es $\frac{(x_1-x_0)^2}{4}$. Así se tiene $|E(x)| \le \frac{M}{8}(x_1 - x_0)^2$, $\forall x \in [x_0, x_1]$

OBSERVACION: Es engañoso pensar que al aumentar el número de puntos de interpolación vamos a disminuir el error de interpolación. Consideremos, por ejemplo, puntos de interpolación igualmente separados en el intervalo $[-5,5]$. Si se construye la sucesión de polinomios P_n de interpolación de la funcion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ha sido demostrado que, entre otras, la sucesión $P_1(4), P_2(4), \ldots$ no tiende a $f(4)$. Es un ejemplo debido a Runge. Otro ejemplo típico en que ocurre algo parecido es la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1,1]$. En este caso la sucesión no converge excepto para $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.

TEMA 11°: DIFERENCIAS FINITAS.

1. DIFERENCIAS PROGRESIVAS Y REGRESIVAS.

Consideremos una función f definida en una sucesión de puntos equidistantes, con distancia $h>0$ entre dos puntos consecutivos:

$$x_j = x_0 + jh \quad , \quad j \in \mathbb{Z}$$

Se llama diferencia progresiva de f en x_k a

$$\Delta f(x_k) = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$$

Llamando $f(x_j) = f_j$ se tiene

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

Como esta diferencia progresiva se puede calcular para todo k, también podemos calcular

$$\Delta(\Delta f_k) = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$$

Denotaremos por $\Delta^2 f_k$ la expresión $\Delta(\Delta f_k)$

En general, por inducción, se puede definir

$$\Delta^{n+1} f_k = \Delta(\Delta^n f_k) = \Delta^n f_{k+1} - \Delta^n f_k, \quad \forall n \geq 1 \qquad (I)$$

Con el convenio $\Delta^0 f_k = f_k$ (I) también es valida para $n=0$.

A $\Delta^n f_k$ se le llama diferencia progresiva de orden n de f en x_k.

Análogamente podemos definir las diferencias regresivas

$$\nabla f_k = f_k - f_{k-1}$$

$$\nabla^{n+1} f_k = \nabla(\nabla^n f_k) = \nabla^n f_k - \nabla^n f_{k-1} \quad , \forall n \geq 0$$

donde $\nabla^0 f_k = f_k$.

La relación entre ambas diferencias es trivialmente

$$\nabla f_k = \Delta f_{k-1}$$

y, por tanto, $\nabla^n f_k = \Delta^n f_{k-n} \qquad (II)$

Tanto las diferencias progresivas como las regresivas, como las centrales que veremos más adelante se conocen con el nombre genérico de diferencias finitas.

2. Propiedades de las diferencias finitas

Veamos la relación que existe entre las diferencias finitas y las diferencias divididas.

2.1. TEOREMA: Para todo $n \geq 0$ se verifica

$$\boxed{\Delta^n f_k = n!\, h^n f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}]}$$

Demostr.: Lo haremos por inducción en n.
Para $n=0$ es trivial pues lo que queda es

$$f_k = f[x_k] = f(x_k).$$

Supongamos que es cierto para $0, 1, \ldots, r$ y veamos que también es cierto para $r+1$:

$$\Delta^{r+1} f_k = \Delta^r f_{k+1} - \Delta^r f_k = r!\, h^r f[x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_{k+r+1}] -$$

$$- r!\, h^r f[x_k, \ldots, x_{k+r}] =$$

$$= r!\, h^r (x_{k+r+1} - x_k)\, f[x_k, \ldots, x_{k+r+1}] =$$

$$= (r+1)!\, h^{r+1} f[x_k, \ldots, x_{k+r+1}]$$

pues $(x_{k+r+1} - x_k) = (r+1)h$. c.s.q.d.

2.2. TEOREMA: Para todo $n \geq 0$ se verifica

$$\boxed{\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_{k+i}}$$

Demostr.: Lo haremos por inducción sobre n.
Para $n=0$ es trivial pues se reduce a la igualdad $f_k = f_k$.
Supongamos la tesis cierta para $0, 1, \ldots, r$ y probémosla para $r+1$:

$$\Delta^{r+1} f_k = \Delta^r f_{k+1} - \Delta^r f_k = \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{k+1+i} - \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{k+i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{r+1-i} \binom{r}{i-1} f_{k+i} - \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_{k+i} =$$

$$= f_{k+r+1} - \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \left(\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i} \right) f_{k+i} + (-1)^{r+1} f_k$$

Puesto que $\binom{r}{i-1} + \binom{r}{i} = \binom{r+1}{i}$ se tiene que

$$\Delta^{r+1} f_k = \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^{r+1-i} \binom{r+1}{i} f_{k+i} \text{. c.s.q.d.}$$

Análogamente se obtiene para las diferencias regresivas

$$\nabla^n f_k = n!\, h^n f[x_{k-n}, x_{k-n+1}, \dots, x_k]$$
$$\nabla^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f_{k-n+i} \qquad \forall n \geq 0.$$

Esto se puede deducir de los teoremas anteriores y de (II) (aptdo. 1).

3. Expresion del polinomio de interpolacion usando diferencias finitas.

Recordemos que la fórmula de interpolación de Newton de f en los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ es

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Si los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ son equidistantes, es decir

$$x_j = x_0 + jh \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n \qquad \text{(I)}$$

tendremos, por teorema 2.1 que

$$i!\, h^i f[x_0, \dots, x_i] = \Delta^i f_0$$

Por tanto, $P(x)$ puede expresarse en la forma

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i f_0}{i!\, h^i} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Si hacemos el cambio de variables $x = x_0 + th$, $P(x)$ puede escribirse

$$P(x) = P(x_0 + th) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\Delta^i f_0}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (t - j) \qquad \text{(II)}$$

Si convenimos en que

$$\binom{t}{i} = \frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)}{i!}$$

aunque t no sea entero, tendremos

$$P(x_0 + th) = \sum_{i=0}^{n} \binom{t}{i} \Delta^i f_0 \qquad \text{(III)}$$

Las expresiones (II) y (III) reciben el nombre de fórmula de Newton progresiva.

El polinomio $P(x)$ interpola a f en $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0$. Luego también podrá expresarse así

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_{n-j})$$

Supongamos que los puntos x_j siguen verificando (I). Entonces

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\nabla^i f_n}{i!\,h^i}\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_{n-j}) \qquad (IV)$$

Haciendo el cambio $x=x_n+th$, $P(x)$ podrá escribirse en la forma

$$P(x)=P(x_n+th)=\sum_{i=0}^{n}\binom{t+i-1}{i}\nabla^i f_n \qquad (V)$$

ya que $x-x_{n-j}=(t+j)h$ y $\binom{t+i-1}{i}=\frac{(t+i-1)(t+i-2)\cdots t}{i!}$

Las fórmulas (IV) y (V) se conocen como fórmula de Newton regresiva.

En definitiva, todas son expresiones distintas del mismo polinomio, ya que solo depende del orden en que están escritos los puntos de interpolación.

4. Diferencias centrales

Continuamos suponiendo que f está definida en la sucesión

$$x_j=x_0+jh, \quad j\in\mathbb{Z}$$

Se llama diferencia central de f en $x_{k+\frac{1}{2}}$ a

$$\delta f_{k+\frac{1}{2}}=f_{k+1}-f_k \qquad (I)$$

Se pueden calcular las diferencias centrales para todo k. Ahora bien, si queremos calcular la diferencia entre dos de ellas deberemos tener en cuenta que no podremos escribir $\delta^2 f_{k+\frac{1}{2}}$ pues en ese caso sería

$$\delta(\delta f_{k+\frac{1}{2}})=\delta f_{k+1}-\delta f_k$$

y esto no lo hemos calculado. Debemos escribir

$$\delta^2 f_k=\delta(\delta f_k)=\delta f_{k+\frac{1}{2}}-\delta f_{k-\frac{1}{2}} \qquad (II)$$

Esta circunstancia las hace de manejo más complicado que las otras diferencias finitas.

De (I) se deduce que

$$\delta f_{k+\frac{1}{2}}=\Delta f_k$$

y de (II) $\quad \delta^2 f_k=\Delta f_k-\Delta f_{k-1}=\Delta^2 f_{k-1}$

La relación que existe en general es

$$\delta^n f_{k+\frac{n}{2}}=\Delta^n f_k, \quad \forall n\geq 0$$

con el convenio $\delta^0 f_k=f_k$.

Según lo anterior y el teorema 2.1 se tiene que

$$\delta^n f_{k+\frac{n}{2}} = n!\, h^n f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n}] \qquad (\mathrm{III})$$

Análogamente

$$\delta^n f_{k+\frac{n}{2}} = \nabla^n f_{n+k}$$

5. Expresión del polinomio de interpolación mediante diferencias centrales. Fórmula de Stirling.

Consideremos el polinomio de interpolación de f en los puntos

$$x_0, x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, \dots, x_n, x_{-n}$$

Su expresión según la fórmula de Newton de diferencias divididas será

$$P(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_{-1}](x-x_0)(x-x_1) + \dots +$$
$$+ f[x_0,x_1,x_{-1},\dots,x_n,x_{-n}](x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_n).$$

Teniendo en cuenta la relación (III) del apartado anterior tenemos

$$f[x_0,x_1] = \frac{\delta f_{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$f[x_0,x_1,x_{-1}] = f[x_{-1},x_0,x_1] = \frac{\delta^2 f_0}{2!\, h^2}$$

$$\text{- - - - - - - - - - - -}$$

$$f[x_0,x_1,x_{-1},\dots,x_n,x_{-n}] = f[x_{-n},\dots,x_{-1},x_0,x_1,\dots,x_n] = \frac{\delta^{2n} f_0}{(2n)!\, h^{2n}}$$

Por tanto el polinomio de interpolación puede expresarse por

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!\,h}\delta f_{\frac{1}{2}} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2}\delta^2 f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})}{3!\,h^3}\delta^3 f_{\frac{1}{2}} + \dots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_n)}{(2n)!\; h^{2n}}\delta^{2n} f_0 \qquad (\mathrm{I})$$

Esta fórmula recibe el nombre de fórmula de Gauss progresiva.

Análogamente podríamos considerar los mismos puntos en el orden

$$x_0, x_{-1}, x_1, \dots, x_{-n}, x_n$$

y por un proceso similar obtendríamos

$$P(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!\,h}\delta f_{-\frac{1}{2}} + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})}{2!\,h^2}\delta^2 f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)}{3!\,h^3}\delta^3 f_{-\frac{1}{2}} + \dots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)\cdots(x-x_{-n})}{(2n)!\cdot h^{2n}}\delta^{2n} f_0$$

ya que $f[x_0,x_{-1}] = f[x_{-1},x_0] = \dfrac{\delta f_{-\frac{1}{2}}}{h}$ (II)

Esta es la llamada fórmula de Gauss regresiva.

Como (I) y (II) son expresiones distintas del mismo polinomio $P(x)$, la semisuma de ambas dará otra expresión de $P(x)$. Se obtiene así

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{2\cdot 1!\,h}\left(\delta f_{\frac{1}{2}} + \delta f_{-\frac{1}{2}}\right) + \frac{x-x_0}{2\cdot 2!\,h^2}\left[(x-x_1)+(x-x_{-1})\right]\delta^2 f_0 + \dots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\cdots(x-x_{-n+1})(x-x_{n-1})}{2\cdot(2n)!\,h^{2n}}\left[(x-x_n)+(x-x_{-n})\right]\delta^{2n} f_0$$

que se conoce como fórmula de Stirling.

En todas éstas fórmulas se puede hacer un cambio de variables $x = x_0 + th$ que simplifica algo las expresiones, como se ha hecho con las fórmulas de Newton.

6. CONSTRUCCION DEL POLINOMIO DE INTERPOLACION POR RECURRENCIA.

Hemos visto anteriormente que para conseguir el polinomio de interpolación en $n+1$ puntos a partir del de n puntos se introducían las diferencias porque la expresión de Lagrange no era cómoda en ese sentido. Esto dió lugar a la aparición de la fórmula de Newton, pero luego, en la práctica, al calcular el valor de P_n en un punto x dado no es obligatorio calcular $P_{n-1}(x)$ para pasar luego a $P_n(x)$, sino que suele hacerse mediante el proceso descrito en Tema 10, aptdo 4.c).

Ahora vamos a ver un método recurrente (o iterativo) en el sentido de que para calcular $P_n(x)$ hay que calcular $P_{n-1}(x)$ y así sucesivamente, pero además, con la particularidad de que no usa diferencias, sino que usa los valores de f_k directamente.

Se basa en un resultado debido a AitKen que vamos a exponer. Sea A el conjunto de los puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ y B un subconjunto de A formado por $k+1$ puntos, $k \geq 0$. Entonces existe un único polinomio de grado $\leq k$ que interpola a la función f dada en los puntos de B y que denotaremos por P_B.

6.1. TEOREMA: Sean B y C dos subconjuntos no vacíos de A, con todos sus puntos comunes excepto x_j de B que no está en C y x_k de C que no está en B. Entonces se tiene

$$P_{B\cup C}(x) = \frac{(x-x_k)\,P_B(x) - (x-x_j)\,P_C(x)}{x_j - x_k} \qquad (I)$$

Demostr.: B y C tienen el mismo número de puntos. Supongamos que es $m+1$. De ellos tienen m comunes y el restante no. Por eso $B\cup C$ tendrá $m+2$ puntos. Luego $P_{B\cup C}$ es de grado $\leq m+1$. El segundo miembro de (I) representa también un polinomio de grado $\leq m+1$. Lo llamaremos $q(x)$. Lo que habremos de probar es que $q(x_i)=f_i$, $\forall x_i \in B\cup C$.

Si x_i es uno de los puntos comunes de B y C se tiene

$$q(x_i)=\frac{(x_i-x_k)f_i-(x_i-x_j)f_i}{x_j-x_k}=f_i.$$

Si $x_i=x_j$, $q(x_j)=\frac{(x_j-x_k)f_j}{x_j-x_k}=f_j$

Si $x_i=x_k$, $q(x_k)=\frac{-(x_k-x_j)f_k}{x_j-x_k}=f_k$. csqd.

Observamos entonces que para llegar al polinomio de interpolación de f en $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ basta tomar el de $\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}\}$ y el de $\{x_0,x_1,\ldots,x_{n-2},x_n\}$. Pero a su vez estos se conocen a través de otros y así sucesivamente.

Por ejemplo, para conocer el polinomio de interpolación en $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ tenemos que hallar los de los conjuntos $\{x_0,x_1,x_2\}$ y $\{x_0,x_1,x_3\}$ y para estos los de $\{x_0,x_2\}$, $\{x_0,x_1\}$, $\{x_0,x_3\}$.

Para eso es conveniente disponer los cálculos de la siguiente forma, que se conoce como método de Aitken.

x_0	$x-x_0$	$f(x_0)$			
x_1	$x-x_1$	$f(x_1)$	$P(x;x_0,x_1)$		
x_2	$x-x_2$	$f(x_2)$	$P(x;x_0,x_2)$	$P(x;x_0,x_1,x_2)$	
x_3	$x-x_3$	$f(x_3)$	$P(x;x_0,x_3)$	$P(x;x_0,x_1,x_3)$	$P(x;x_0,x_1,x_2,x_3)$

donde $P(x;x_0,x_1,x_2,x_3)$ es el polinomio de interpolación de f en $\{x_0,x_1,x_2,x_3\}$ y así sucesivamente.

Se disponen en una columna los valores de f y entonces, a partir de f_0 y de cada uno de los f_1,f_2,f_3 se construye la columna de los $P(x;x_0,x_k)$, $k=1,2,3$, mediante la fórmula (I)

Despues a partir de $P(x;x_0,x_1)$ y de cada uno de los elementos de su columna se construye la siguiente columna y así sucesivamente.

Para esto viene bien poner una columna previa con los $x-x_k$

y así, para obtener $P(x; x_0, x_1, x_3)$ necesitamos manejar $P(x; x_0, x_1)$, $x - x_1$, $P(x; x_0, x_3)$, $x - x_3$.

Si se desea calcular únicamente el valor concreto de $P(x; x_0, x_1, x_2, x_3)$ en un punto $x = c$ basta sustituir x por c en todos los cálculos hechos y al final se obtendrá $P(c; x_0, x_1, x_2, x_3)$, es decir, el valor deseado.

Naturalmente esta elección de B y C en el teorema anterior para llegar a A no es única. Podríamos tomar por ejemplo $B = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ y $C = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ y da lugar a otro método distinto llamado método o algoritmo de Neville.