TEMA 1º: Espacios Topológicos

1. Estructura de Espacio Topológico

Espacio topológico es un par formado por un conjunto X y una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que debe verificar los siguientes axiomas:

① La unión de elementos de $\mathcal{T}$ es otro elemento de $\mathcal{T}$: $A_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \in J}^{\infty} A_i \in \mathcal{T}$

② La intersección de un número finito de elementos de $\mathcal{T}$ es otro elemento de $\mathcal{T}$: $A_i \in \mathcal{T}$, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{T}$.

③ $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ se dice que es un espacio topológico. De $\mathcal{T}$ decimos que es una topología y los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman abiertos.

Ejemplos: ⓐ Sea $X = \{a, b\}$ y $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$

$(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y $\mathcal{T}$ una topología pues se verifica.

① $\emptyset \cup \{a\} = \{a\} \in \mathcal{T}$; $\emptyset \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \mathcal{T}$; $\{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \mathcal{T}$; $\emptyset \cup \{a\} \cup \{a,b\} = \{a,b\} \in \mathcal{T}$

② $\emptyset \cap \{a\} = \emptyset$, $\emptyset \cap \{a,b\} = \{a,b\}$, $\{a\} \cap \{a,b\} = \{a\}$, $\emptyset \cap \{a\} \cap \{a,b\} = \emptyset$

③ $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X = \{a,b\} \in \mathcal{T}$

— o —

ⓑ Topología usual en $\mathbb{R}$: La familia J de intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ constituye una topología y el par $(\mathbb{R}, J)$ es un espacio topológico.

Si $I \in J$ será de la forma: $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, a[$ ó $\bigcup\limits_{i \in J}^{\infty} I_i$

① La unión de dos o más intervalos abiertos es otro intervalo abierto.

② La intersección de dos o más intervalos abiertos es otro intervalo abierto.

③ $\emptyset \in J$ ($\emptyset =]a, a[$) , $\mathbb{R} \in J$ ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$)

Hay dos tipos especiales de espacios topológicos: el espacio topológico discreto, que es aquel en que la topología coincide con el conjunto de las partes de X, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, y el espacio topológico grosero en el que la topología es $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$

2. Homeomorfismo de espacios topológicos

Sean los espacios topológicos $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Se dice que estos espacios topológicos son homeomorfos si existe una biyección Φ que transforma los abiertos de $(X_1, \mathcal{T}_1)$ en abiertos de $(X_2, \mathcal{T}_2)$ y la inversa Φ^{-1} transforma los abiertos de $(X_2, \mathcal{T}_2)$ en abiertos de $(X_1, \mathcal{T}_1)$.

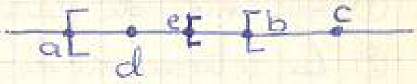
Los espacios $(X_1, \mathcal{T}_1)$ y $(X_2, \mathcal{T}_2)$ tienen las mismas propiedades topológicas.

Si U_1 es un abierto de X_1, $U_2' = \Phi(U_1)$ es un abierto de X_2

3. Entorno de un punto

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y x un elemento de X.
Se dice que $U \subset X$ es un entorno de x y se representa $U \in \mathcal{V}(x)$ si existe un abierto O tal que $x \in O \subset U$.

Ejemplo: Sea la topología usual en $\mathbb{R}$.
Se desea saber si $A = [a, b[\cup \{c\}$ es un entorno del punto d. Sí lo es, pues si cogemos el intervalo abierto $O =]a, e[$ vemos que:



$$d \in O \subset A.$$

Hay más entornos que abiertos.

4. Caracterización de los abiertos a partir de entornos

4.1. TEOREMA: La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto U de un espacio topológico X sea abierto es que sea entorno de todos sus puntos. U es abto $\iff U \in \mathcal{V}(x), \forall x \in U$.

Demostr.: • Condición necesaria: Si U es abierto, $\forall x \in U$ se verifica
$x \in U \subset U$, como U es abierto se verifica que U es entorno de x, $U \in \mathcal{V}(x)$

• Condición suficiente: Si para todo $x \in U$, $U \in \mathcal{V}(x)$
$\exists\, O_x$ abto tal que $x \in O_x \subset U$

Luego $U \subset \bigcup_{x \in U} O_x \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x \in U} O_x$

Como los O_x son abiertos, por el 1^er axioma U es abierto.

5. Propiedades de la familia de entornos de un punto

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, x un elemento de X y $\mathcal{V}(x)$ la familia de entornos del punto x.

1. $V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in V$. Cualquiera que sea el entorno, x pertenece al mismo.
2. Si $U \in \mathcal{V}(x)$ y $V \subset X$ y $U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$

   Demostr.: $x \in O \subset U \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$
3. $(U_i)_{i=1}^{n}$, $U_i \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{V}(x)$. La intersección finita de entornos de un punto es un entorno de ese punto.

   Demostr.: Si $U_i \in \mathcal{V}(x)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{V}(x)$

   $\forall i$, $x \in O_i \subset U_i \Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$

   Luego $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{V}(x)$, pues $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ es abierto.
4. $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $\forall y \in V$, $U \in \mathcal{V}(y)$

   Demostr.: Si $U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists\, O$ tal que $x \in O \subset U$
   Haciendo $V = O$ será $V \in \mathcal{V}(x)$ y además $V \subset U$

6. Sistema fundamental de entornos de un punto x

Sea un punto x del espacio topológico X. Una familia $S \subset \mathcal{V}(x)$ diremos que constituye un sistema fundamental de entornos del punto x cuando para todo entorno U de x existe otro entorno U_0 perteneciente a S tal que U_0 está incluido en U, es decir, cuando:

$$\forall U \in \mathcal{V}(x),\ \exists U_0 \in S \mid U_0 \subset U$$

En un espacio topológico cualquiera los entornos abiertos de un punto constituye un sistema fundamental de entornos de ese punto, pues todo entorno de x contiene un abierto de x que también es entorno.

Ej.: En $\mathbb{R}$ la familia de intervalos abiertos que contienen a un punto x constituyen un sistema fundamental de entornos del punto x, pues, por pequeño que consideremos un entorno U del punto x siempre podremos encontrar un abierto que contenga al punto x y que esté incluido en U.

7. Base de una topología

Sea el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Una familia $\mathcal{B}$ de abiertos se dice que es una base para la topología $\mathcal{T}$ cuando todo abierto se puede expresar como unión de abiertos de la base $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ es base sii $\forall U$ abto, $U = \bigcup B_i$, $B_i \in \mathcal{B}$

Ejemplos: ① En la topología usual de $\mathbb{R}$ los intervalos abiertos constituyen una base de la misma.

② En la topología discreta una base sería:

$$\mathcal{B} = \{\phi\} \cup \{\{x\} \mid x \in X\}$$

③ En la topología grosera la base es la propia topología.

7.1. PROPOSICION: La condición necesaria y suficiente para que una familia $\mathcal{B}$ de abiertos del espacio topológico X constituya una base es que para cada $x \in X$, la subfamilia $B_x \subset \mathcal{B}$ formada por los elementos de $\mathcal{B}$ que contienen al punto x constituya un sistema fundamental de entornos del punto x.

Demostr.: Condición necesaria: Sea $\mathcal{B}$ una base de la topología y sea $x \in X$. Hay que demostrar que B_x es un sistema fundamental de entornos. Sea U un entorno de x, luego existe un abierto O tal que $x \in O \subset U$. Siendo $\mathcal{B}$ una base, O se puede recubrir con elementos de $\mathcal{B}$:

$$O = \bigcup B_i \Rightarrow x \in \bigcup B_i \subset U$$

Por tanto existirá un abierto de la base que contenga al punto x, es decir: $\exists j \mid x \in B_j \subset U$

de entornos de x.

Condición suficiente: Suponemos que $\forall x \in X$, B_x es un sistema fundamental de entornos y se quiere demostrar que $\mathcal{B}$ es una base.

Sea O un abierto cualquiera. Para cualquier punto x de O, O es entorno de x. Por ser B_x sistema fundamental de entornos de x, existirá un entorno $B_{xi} \in B_x$ tal que $x \in B_{xi} \subset O$, es decir:

$$\forall x \in O, \exists B_{xi} \in B_x \mid x \in B_{xi} \subset O$$

Luego la unión de todos los puntos x de O estará comprendida en la unión de los B_x correspondientes y esta a su vez estará incluida en O, es decir: ($x \in O$, quiere decir que x recorre O)

$$\bigcup_{x\in O}\{x\} \subset \bigcup_{x \in O} B_x \subset O \quad , \text{ siendo } \bigcup_{x \in O}\{x\} = O \text{ tenemos que}$$

$$O \subset \bigcup_{x\in O} B_x \subset O \iff O = \bigcup_{x \in O} B_x$$

Siendo O un abierto cualquiera, queda demostrado el enunciado

7.2. PROPOSICION: Caracterización de bases: Sea el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. La condición necesaria y suficiente para que una familia $\mathcal{B}$ de abiertos de $\mathcal{T}$ constituya una base es que:

① $\bigcup_{B_i \in B} B_i = X$. Es decir, la unión de los elementos de la base es el conjunto X.

② $B_1 \cap B_2 = \bigcup B_K$. Es decir, la intersección de dos abiertos o elementos de $\mathcal{B}$, cualesquiera que sean, se puede expresar como unión de abiertos de $\mathcal{B}$.

Demostr.: La condición es evidentemente necesaria pues X es un abierto de $\mathcal{T}$ y ha de poder expresarse como unión de abiertos de la base, y, además, la intersección de dos abiertos (1^{er} axioma) es también un abierto.

Condición suficiente: A partir de ① y ② demostraremos que $\mathcal{B}$ es base para alguna topología del espacio X. Habremos de construir entonces una topología $\mathcal{T}$ en la que los abiertos se puedan expresar como unión de abiertos de la familia $\mathcal{B}$. Luego si O es un abierto de $\mathcal{T}$, por definición O se expresará como unión de abiertos de la familia $\mathcal{B}$:

$$O \text{ abto}, \ O \in \mathcal{T} \overset{def}{\iff} O = \bigcup B_i$$

Tendremos que demostrar entonces que $\mathcal{T}$, así definida, es efectivamente una topología para lo cual demostraremos que verifica los tres axiomas de las topologías:

I. (U_i) abto $\Rightarrow \bigcup U_i$ abto

Demostr.: U_i abto $= \bigcup_j B_{ji}$, luego $\bigcup_i U_i = \bigcup_i \bigcup_j B_{ji}$

donde U_i recorre los abiertos de $\mathcal{T}$ y B_j los abiertos de $\mathcal{B}$.

En definitiva queda que $\bigcup_i U_i = \bigcup B's$ (unión de ciertos conjuntos de $\mathcal{B}$)

II. La intersección finita de abiertos es un abierto.

Demostr.: Sean U_1 y U_2 abiertos de $\mathcal{T}$. Luego: $U_1 = \bigcup_i B_{i_1}$; $U_2 = \bigcup_j B_{j_2}$

Luego $U_1 \cap U_2 = (\bigcup_i B_{i_1}) \cap (\bigcup_j B_{j_2})$

Por la propiedad distributiva nos va a quedar lo siguiente:

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{i,j} (B_{i_1} \cap B_{j_2})$$

y según la condición ② $B_{i_1} \cap B_{j_2} = \bigcup B_K$, luego quedará

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{ij} \bigcup_K B_{K,j,i}$$

En definitiva queda una unión de abiertos de la base, que por tanto es también un abierto.

III. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

Demostr.: $\emptyset \in \mathcal{T}$ pues es la unión vacía $\bigcup_\emptyset$ de abiertos de $\mathcal{B}$

$X \in \mathcal{T}$ por la condición ①

8. Punto interior de un conjunto

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. Diremos que un punto $x \in A$ es interior a A, si A es entorno de x, $A \in \mathcal{V}(x)$.

Al conjunto de los puntos interiores de un conjunto A se le llama interior del conjunto y se le representa por $\mathring{A}$:

$$\mathring{A} = \{x \in X \mid x \text{ es interior a } A\} = \{x \in X \mid A \in \mathcal{V}(x)\}$$

Ejemplos: ① En la topología usual en $\mathbb{R}$, el interior de los números naturales es el vacío, pues cualquier entorno de un número natural contiene puntos que no pertenecen a $\mathbb{N}$. Lo mismo sucede con $\mathbb{Q}$, pues en cualquier entorno de un número racional hay números irracionales. Luego: $\mathring{\mathbb{N}} = \emptyset$, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$

② Sea el conjunto $A =]2,3] \cup [5,6] \cup \{4\} \cup \mathbb{N}$. Hallar $\mathring{A}$:

$$\mathring{A} =]2,3[\cup]5,6[$$

8.1. Proposicion: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X. Entonces el interior de A, $\mathring{A}$, es un abierto, y además, es el mayor abierto contenido en A. Es decir:

① Si $A \subset X$, $\mathring{A}$ es abto, o bien, $\forall x \in \mathring{A}$, $\mathring{A} \in \mathcal{V}(x)$

② $\forall U \subset A$, U abto, $U \subset \mathring{A}$

Demostr.: ① $x \in \mathring{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \in \mathcal{V}(x)$.

Ahora, si $A \in \mathcal{V}(x)$, $\exists\, O$ abto $/ x \in O \subset A$

Se trata de demostrar que $O \subset \mathring{A}$.

Sea $y \in O \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow y \in \mathring{A}$, $\forall y \in O$

Luego $O \subset \mathring{A}$ y también: $x \in O \subset \mathring{A}$, $\forall x \in \mathring{A}$, luego $\mathring{A} \in \mathcal{V}(x)$, c.q.d.

② Sea U abto $/ U \subset A$ veamos que también $U \subset \mathring{A}$.

8.2. **COROLARIO:** La condición necesaria y suficiente para que un conjunto A sea abierto es que coincida con su interior, $A = \mathring{A}$.

Es necesaria puesto que si A es abierto, será el mayor abierto, y siendo $\mathring{A}$ el mayor abierto será $\mathring{A} = A$. Es suficiente, porque si $A = \mathring{A}$ y $\mathring{A}$ es abierto, A será abierto.

Segun esto, en la topología usual en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ no es abierto pues no coincide con su interior, $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

9. Propiedades del interior de un conjunto

① Si $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$

Demostr.: Si $A \subset B$, como $\mathring{A} \subset A$, será $\mathring{A} \subset B$.
Luego $\mathring{A}$ es un abierto contenido en B. Como $\mathring{B}$ es el mayor abierto contenido en B se verificará: $\mathring{A} \subset \mathring{B}$

②. $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

Demostr.: Por el corolario anterior $\mathring{A}$ será abierto si coincide con su interior $\mathring{\mathring{A}}$; como $\mathring{A}$ es abierto sera $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}}$

③ El interior de la intersección de dos conjuntos es igual a la intersección de los interiores de los conjuntos: $\mathring{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Demostr.: Probemos que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A \cap B}}$ y que $\mathring{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$, de lo que resultará lo que queremos demostrar.

- $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A \cap B}}$: Si $\mathring{A} \subset A$ y $\mathring{B} \subset B$ ~~se~~ verificará que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$.
Siendo $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ la intersección de dos abiertos, será un abierto incluido en $A \cap B$.
Siendo $\mathring{\widehat{A \cap B}}$ el mayor abierto de $A \cap B$ se verificará que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A \cap B}}$
- $\mathring{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$: $\forall x \in \mathring{\widehat{A \cap B}}$ existe, por definición, un abierto U tal que $x \in U \subset A \cap B$ o lo que es lo mismo: $x \in U \subset A \wedge x \in U \subset B$, lo que significa que $A \in \mathcal{V}(x)$ y $B \in \mathcal{V}(x)$. Esto implica que $x \in \mathring{A} \wedge x \in \mathring{B} \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, luego $\mathring{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$

En resumen: $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \mathring{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B} \Leftrightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} = \mathring{\widehat{A \cap B}}$ csqd.

10. Conjunto cerrado

Un conjunto F se llama cerrado si el complementario es abierto.

Ejemplos: ① En la topología usual en $\mathbb{R}$ cualquier intervalo cerrado es un conjunto cerrado, pues su complementario es abierto:
$F = [-1, 2] \cup [7, 9]$ es cerrado pues $\complement F =]-\infty, -1[\cup]2, 7[\cup]9, +\infty[$ es abierto.

② Los números naturales son un conjunto cerrado en $\mathbb{R}$ pues

$$\complement \mathbb{N} = \bigcup_{\substack{n=0 \\ n \in \mathbb{N}}}]n, n+1[\cup]-\infty, 0[$$

③ El intervalo $[2, +\infty[$ es cerrado pues $\complement [2, +\infty[=]-\infty, 2[$ es abierto.

Hay conjuntos que son abiertos y cerrados a la vez, y conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

④ $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados. $\mathbb{R}$ es abierto por el 3^er axioma de las topologías, pero es cerrado también, pues su complementario es el abierto $\emptyset$. Lo mismo se puede decir de $\emptyset$.

⑤ $]2,3]$ no es ni abierto ni cerrado. En la topología usual en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ tampoco es abierto ni cerrado.

11. Propiedades de los conjuntos cerrados

① La intersección cualquiera de cerrados es un cerrado.

Demostr.: Sea $(F_i)_{i\in J}$ una familia de cerrados.

Si F_i es cerrado entonces $\complement F_i$ es abierto

Luego la unión de estos abiertos será un abierto:

$$\bigcup_{i\in J} \complement F_i \text{ es abierto}$$

Por la ley de Morgan la unión de complementarios se convierte en el complementario de las intersecciones: $\bigcup_{i\in J} \complement F_i = \complement \bigcap_{i\in J} F_i$ que es un abierto

Si $\complement \bigcap_{i\in J} F_i$ es abierto, su complementario $\complement\complement \bigcap_{i\in J} F_i = \bigcap_{i\in J} F_i$ es cerrado, c.s.q.d.

② La unión finita de cerrados es un cerrado.

Demostr.: Sea la familia anterior de cerrados.

Si F_i es cerrado, $\complement F_i$ es abierto. Luego

$\bigcap_{i=1}^{n} \complement F_i$ es un abierto, por el 2º axioma de las topologías. Por la ley de Morgan:

$$\bigcap_{i=1}^{n} \complement F_i = \complement \bigcup_{i=1}^{n} F_i \text{ que también es un abierto}$$

Luego su complementario $\complement\complement \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ es un cerrado, c.s.q.d.

③ $\emptyset$ y X son cerrados.

Demostr.: $\emptyset$ es cerrado pues es complementario del abierto X.

X es cerrado pues es complementario del abierto $\emptyset$.

Contraejemplo: La unión infinita de cerrados no tiene porque ser cerrado.

Sea, p. ej., la familia $F_n = \left[1+\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$

La unión infinita de los cerrados de la familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el abierto $]1,3[$.

12. Puntos adherentes a un conjunto

Sea el espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ y A un subconjunto de X. Diremos que $x\in X$ es adherente a A ($x\in\bar{A}$) cuando todo entorno de x corta a A.

$$x\in\bar{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall U\in \mathcal{V}(x),\ U\cap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de los puntos adherentes a A se le llama adherencia de A.

Algunos autores le llaman clausura de A.

Ejemplos: ① Sea el intervalo $A =]1,2[$. Hallar $\bar{A}$

$\forall x \in A$, $x \in \bar{A}$, pues $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\{x\} \subset U \cap A \neq \emptyset$.

Además los extremos del intervalo tambien pertenecen a la adherencia de A, pues en todo entorno de 1 y de 2 hay elementos de A, luego $\bar{A} = [1,2]$. $A \subset \bar{A}$

② Si $A = \{a\}$, $\bar{A} = \{a\}$ (en $\mathbb{R}$ con la topología usual).

③ En la topología usual en $\mathbb{R}$, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, pues en cualquier entorno del número real α hay números racionales. Asimismo: $\bar{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$.

④ $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ pues se puede encontrar un entorno de un número natural en el que sólo haya ese número natural.

12.1. PROPOSICIÓN: A) $\complement \bar{A} = \mathring{\overline{\complement A}}$; B) $\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}$ (DEMOSTRACION EN LOS EJERCICIOS).

A) Demostr.: Probaremos que: a) $\complement \bar{A} \subset \mathring{\complement A}$ y que b) $\mathring{\complement A} \subset \complement \bar{A}$

a) Sea $x \in \complement \bar{A}$. Luego $x \notin \bar{A}$. Por tanto:

$$\exists U \in \mathcal{V}(x) \text{ tal que } U \cap A = \emptyset$$

Si U no corta a A, se verifica que $U \subset \complement A$

Luego $x \in U \subset \complement A$, no es preciso que U sea abierto, pues siendo entorno contiene al menos un abierto al que pertenece el punto x. Por tanto:

$$\complement A \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \mathring{\complement A}, \forall x \in \complement \bar{A}, \text{ luego: } \complement \bar{A} \subset \mathring{\complement A}$$

b) $\mathring{\complement A} \subset \complement \bar{A}$. Sea $x \in \mathring{\complement A} \Rightarrow \exists U$ abto $/ x \in U \subset \complement A \Rightarrow$

$\Rightarrow U \cap A = \emptyset \Leftrightarrow U \in \mathcal{V}(x)$ y además no corta a A, luego $x \notin \bar{A}$ de donde se deduce que: $x \in \complement \bar{A}$

12.2. PROPOSICION: Dado un conjunto A en el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, la adherencia de A, $\bar{A}$, es un cerrado y es el menor cerrado que contiene a A.

Demostr: ① Según la proposición anterior $\complement \bar{A} = \mathring{\complement A}$; siendo $\mathring{\complement A}$ abierto, también lo será $\complement \bar{A}$, luego $\bar{A}$ es cerrado.

② $\mathring{\complement A}$ es el mayor abierto contenido en $\complement A$: $\mathring{\complement A}$ mayor abto $\subset \complement A$

Tomando complementarios: $\complement \mathring{\complement A}$ menor cerrado $\supset \complement\complement A = A$

pero $\complement \mathring{\complement A} = \complement\complement \bar{A} = \bar{A}$, luego:

$\bar{A}$ es el menor cerrado que contiene a A.

12.3. COROLARIO: La condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea cerrado es que coincida con su adherencia.

$$A \text{ cerrado} \Leftrightarrow A = \bar{A}$$

Demostr: Condición necesaria: Si A es cerrado será el menor cerrado; como acabamos de demostrar $\bar{A}$ es el menor cerrado, luego $A = \bar{A}$.

Cond. suficiente. Si $A = \bar{A}$, como $\bar{A}$ es cerrado, A tambien lo será.

13. Propiedades de la adherencia de un conjunto

① $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Demostr.: $A \subset B \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset \overline{B}$, luego $\overline{B}$ es un cerrado que contiene a A; como $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A será: $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) Demostr. directa: $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall U \in V(x),\ U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow U \cap B \neq \emptyset$, pues $A \subset B$, luego: $x \in \overline{B}$, $\forall x \in \overline{A}$, luego $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Demostr.: Demostraremos que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ y que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

a) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{A} \supset A \\ \overline{B} \supset B \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \supset A \cup B$$

Siendo $\overline{A} \cup \overline{B}$ un cerrado que contiene a $A \cup B$ y siendo $\overline{A \cup B}$ el menor cerrado que contiene a $A \cup B$ se verificará que $\overline{A} \cup \overline{B} \supset \overline{A \cup B}$.

b) $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$:

Sea $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}, \Rightarrow \forall U \in V(x)$, $U \cap A \neq \emptyset \vee U \cap B \neq \emptyset$

En cualquier caso, si U corta a A o a B, corta a $A \cup B$, luego:
$\forall U \in V(x),\ U \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

Luego: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ c.q.d.

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

Demostr.: Siendo $\overline{A}$ cerrado, coincide con su adherencia.

14. Puntos aislados y puntos de acumulación

* Sea un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y A un subconjunto de X. Diremos que el punto $x \in \overline{A}$ es aislado cuando exista un entorno U del punto x tal que $U \cap A = \{x\}$, $x \in A$.

Ejemplos: (1) Sea $A =]1,2[\cup \{3\}$. 3 es un punto aislado.
(2) En $\mathbb{N}$ todos los puntos son aislados

* Un punto $x \in \overline{A}$ se dice de acumulación cuando todo entorno del punto x contiene algún punto de A distinto de x.

$x \in \overline{A}$ es de acumulación si $\forall U \in V(x)$, $\exists x' \in U \cap A$, $x' \neq x$, o bien si $\forall U \in V(x)$, $U \cap A - \{x\} \neq \emptyset$

La adherencia está formada por la unión de los puntos aislados y los de acumulación. Al conjunto A' de los puntos de acumulación de A se le llama conjunto derivado.

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{1/n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

Los puntos posteriores a 1 y anteriores a 0 no pertenecen a $\overline{A}$. P. ej.: sea $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$, tomando δ del siguiente modo: $0 < \delta < x - 1$ encontramos un entorno $]x-\delta, x+\delta[$ cuya intersección con A es el vacío, luego $x \notin \overline{A}$.

En $[0,1]$ hay puntos que no pertenecen a $\overline{A}$. Son los puntos x que verifican la desigualdad $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$. Tomando $\delta < \min\left(x - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - x\right)$ tene-

La adherencia es $\bar{A} = A \cup \{0\}$

$0 \in \bar{A}$ pues $\forall U \in \mathcal{V}(0)$, $U \cap A \neq \emptyset$. Si cogemos un entorno $]-\varepsilon, +\varepsilon[$ siempre $\exists n \in \mathbb{N} / \frac{1}{n} < \varepsilon$, luego 0 es un punto de adherencia.

Los puntos de A son aislados pues para cualquier punto de A, $1/n$, es posible encontrar un entorno de radio δ tal que $]\frac{1}{n} - \delta, \frac{1}{n} + \delta[\cap$ $\cap A = \{1/n\}$. Basta tomar $\delta < (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$.

El 0 es un punto de acumulación, pues en todo entorno de 0 hay puntos de A.

15. Frontera de un conjunto

Dado un conjunto A, la frontera de A son los puntos que son adherentes al conjunto y al complementario.

$$Fr(A) = \bar{A} \cap \overline{\complement A}$$

16. Conjunto denso

Sea un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$. Un subconjunto $D \subset X$ se dice denso cuando la adherencia de D coincide con X.

$$\bar{D} = X.$$

Ejemplo: En la topología usual en $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ son densos.

16.1. PROPOSICION: La condición necesaria y suficiente para que un conjunto de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ sea denso es que todo abierto U corte a D.

Es decir: $U \cap D \neq \emptyset$, $\forall U$ abto

Demostr.: • Condición necesaria: Supongamos que D es denso, luego $\bar{D} = X$. Entonces cualquier abierto $U \neq \emptyset$ corta a D.

Sea $x \in U \Rightarrow U$ abto $\in \mathcal{V}(x)$. Siendo $\bar{D} = X \Rightarrow x \in \bar{D} \Rightarrow U \cap D \neq \emptyset$.

• Condición suficiente: Supongamos que $\forall V$ abto, $V \cap D \neq \emptyset$. Entonces $\bar{D} = X$.

Sea $x \in X$. Sea $U \in \mathcal{V}(x)$ luego $\exists O$ abto$/ x \in O \subset U$. Siendo O abto, $O \cap D \neq \emptyset$, luego $U \cap D \neq \emptyset$, luego x es adherente a D, $x \in \bar{D}$, $\forall x \in X$.