TEMA 2º: ESPACIOS METRICOS

1. Espacio métrico

Se llama espacio métrico al par $M=(E,d)$ donde E es un conjunto no vacío y d una aplicación llamada distancia definida del siguiente modo

$$d: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

y que cumple las propiedades siguientes:

① $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in E$

② $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

③ $d(x,y) = d(y,x)$

④ $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad , \forall x,y,z \in E$

Ejemplos: a) En $(\mathbb{R}, d)$ la distancia se define del siguiente modo: $d(x,y) = |x-y|$

- $d(x,y) = |x-y| \geq 0$; $d(x,y) = |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$; $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$.

$d(x,y) = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

b) En $(\mathbb{R}^2, d)$ la distancia entre dos puntos $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ se define del siguiente modo:

$d(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$

c) El plano complejo es isomorfo a $\mathbb{R}^2$ y definimos la distancia entre dos números complejos z_1 y z_2 como: $d(z_1, z_2) = \| z_1 - z_2 \|$

d) Espacio métrico discreto: Sea (E,d) el espacio métrico discreto y d la distancia discreta definida así: $d(x,y) = 1$ para $x \neq y$, $d(x,x) = 0$.

En cualquier caso: $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $d(x,y) = d(y,x)$.

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \begin{cases} -\text{Si } x=y,\ d(x,y)=0 \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \\ -\text{Si } x \neq y: \begin{cases} -x=z \vee y=z : d(x,y)=1,\ d(y,z)=1 \vee d(x,z)=1. \\ -x \neq z \wedge y \neq z : d(x,y)=1 \quad d(x,z)+d(y,z)=2. \end{cases} \end{cases}$$

2. Bola abierta, bola cerrada y esfera

- Se llama bola abierta de centro $a \in E$ y de radio $r > 0$ al conjunto

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$$

- Se llama bola cerrada de centro $a \in E$ y de radio $r > 0$ al conjunto:

$$B'(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leq r\}$$

El concepto de bola es una generalización del concepto de intervalo en $\mathbb{R}$.

- Se llama esfera de centro a y radio r al conjunto: $E(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$

2.1 PROPOSICION: Sea el espacio métrico $M = (E,d)$. Sean a y b elementos de E distintos. Entonces existen dos bolas abiertas $B(a,r_1)$ y $B(b,r_2)$ disjuntas.

Demostración: $a \neq b \Rightarrow d(a,b) > 0$. Tomemos $r = \dfrac{d(a,b)}{3}$

y consideremos las bolas $B(a,r)$ y $B(b,r)$

Veamos que $B(a,r) \cap B(b,r) = \emptyset$

Por la 4ª propiedad de la distancia: $d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(b,x) \geq d(a,b) - d(a,x) > d(a,b) - r = 3r - r = 2r \Rightarrow d(b,x) > r$

Luego $x \notin B(b,r)$

De modo análogo se comprueba que $\forall x \in B(b,r)$, $x \notin B(a,r)$ csqd.

Esta propiedad se enuncia diciendo que todo espacio métrico es separado.

<u>2.2 PROPOSICION</u>: El centro de una bola pertenece a la misma cualquiera que sea el radio.

Basta comprobar que $d(a,a) = 0 < r, \forall r$.

3. <u>Conjunto acotado</u>

Sea el espacio métrico $M = (E,d)$ y A una parte de E. Diremos que A es acotado cuando $\sup_{x,y \in A} d(x,y) < +\infty$, es decir, cuando $\sup_{x,y \in A} d(x,y)$ es finito.

Se llama diámetro del conjunto A a $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$

<u>3.1 PROPOSICION</u>: Sea el espacio métrico $M = (E,d)$. Para cualquier bola abierta se verifica siempre que $\delta(B(a,r)) \leq 2r$. Es decir, $\delta(B(a,r)) = \sup_{x,y \in B(a,r)} d(x,y) \leq 2r$

Demostr.: $d(x,y) \leq d(a,x) + d(a,y) < r + r = 2r$

Luego $\sup_{x,y \in B(a,r)} d(x,y) \leq 2r$.

Ejemplo: En el espacio métrico discreto $r = 1$ para cualquier bola de centro $a \in E$.

Además $\delta(B(a,r)) = 1 < 2r = 2$.

<u>Propiedades de los conjuntos acotados</u>

① $A \subset B \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$.

Demostr.: $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$ $\quad \delta(B) = \sup_{x,y \in B} d(x,y)$

Como todo elemento de A pertenece a B, $\delta(A)$ será a lo sumo igual a $\delta(B)$: $\delta(A) \leq \delta(B)$.

② $\delta(A) = 0 \Leftrightarrow A = \{x\}$

Demostr.: Si $\sup_{x,y \in A} d(x,y) = 0 \Rightarrow \forall x,y \in A \Rightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \Rightarrow A = \{x\}$.

y recíprocamente si $A = \{x\}$, $\sup_{x \in A} d(x,x) = 0$.

<u>DEFINICION</u>: Se define la distancia entre dos subconjuntos A y B de E como

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y)$$

Se define la distancia entre un punto $x \in E$ y un conjunto $A \subset E$ como

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

3.2. <u>PROPOSICION</u>: La condición necesaria y suficiente para que un conjunto sea acotado es que sea subconjunto de una bola.

$$A \text{ acotado} \Leftrightarrow \exists B(a,\rho) \mid A \subset B(a,\rho)$$

Demostración: Condición necesaria: A acotado $\Rightarrow \delta(A) = r < +\infty$

- $r>0$: Sea a un elemento de A. Tomando una bola de centro a y radio $\rho > r$ se verifica que $A \subset B(a,\rho)$, pues
$\forall x \in A$, $d(a,x) \leq \delta(A) < \rho \Rightarrow x \in B(a,\rho)$.

Condición suficiente: $A \subset B(a,\rho) \Rightarrow \delta(A) \leq \delta(B(a,\rho)) \leq 2\rho$ (proposición 3.1) $\Rightarrow A$ acotado.

3.3 PROPOSICION: Si A y B son acotados, entonces $A\cup B$ es acotado y además
$$\delta(A\cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$$

Demostración: Si $x,y \in A\cup B$ se verifican uno de los casos siguientes:
a) $x,y \in A \Rightarrow d(x,y) \leq \delta(A)$ b) $x,y \in B \Rightarrow d(x,y) \leq \delta(B)$
c) $x \in A \wedge y \in B$. Si $a \in A$ y $b \in B \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$, pero $d(a,y) \leq d(a,b) + d(b,y)$, luego $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y)$
Como $x,a \in A \Rightarrow d(x,a) \leq \delta(A)$, y como $y,b \in B \Rightarrow d(b,y) \leq \delta(B)$, luego:
$d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(a,b)$
Como esto se verifica para cualquiera que sea $a \in A$ y $b \in B$, también se verifica para $\inf_{a\in A, b\in B} d(a,b) = d(A,B)$, luego: $d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$
Por tanto $\delta(A\cup B) = \sup_{x,y \in A\cup B} d(x,y) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A,B)$ csqd

3.4. PROPOSICION: Sea A un conjunto de un espacio métrico $M=(E,d)$. Entonces
$\forall x,y \in E$, $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$

Demostr.: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ luego $\inf_{z\in A} d(x,z) \leq \inf_{z\in A} [d(x,y) + d(y,z)] \leq$
$\leq d(x,y) + \inf_{z\in A} d(y,z)$
Es decir $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \rightarrow d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$
Análogamente $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$
Luego $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$.

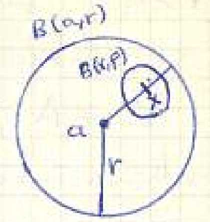
4. Topología asociada a un espacio métrico

DEFINICION: Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico. Diremos que un subconjunto U de E ~~[illegible]~~ es abierto cuando $\forall x \in U$, $\exists B(x,r_x) \subset U$.

4.1 PROPOSICION: Todo espacio métrico es un espacio topológico.
Demostr.: Veamos que la familia de abiertos es una topología.
① Sea $(U_i)_{i\in J}$ una familia de abiertos, y sea $U = \bigcup_{i\in J} U_i$. Veamos que U es abierto
Sea $x \in U \Rightarrow \exists U_K$ abto $/ x \in U_K$ abto $\Rightarrow \exists B(x,r_x) \subset U_K \subset U \Rightarrow U$ es abto.
② Sean $U_1,\dots,U_n$ abiertos y $\bigcap_{i=1}^n U_i = U$. Veamos que U es abto.
Sea $x \in U \Rightarrow x \in U_i$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, luego $\exists B(x,r_i) \subset U_i$
Tenemos n radios luego $\exists r = \min(r_1,\dots,r_n)$, luego:
$\forall x \in U$ y $\forall i$, $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i \Rightarrow \exists B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i = U \Rightarrow U$ es abto.
③ $\emptyset$ pertenece al conjunto de abiertos por exclusión, es decir, por que no podemos

4.2. PROPOSICION: Toda bola abierta es un conjunto abierto.

Demostr.: Sea la bola $B(a,r)$, entonces para todo x de $B(a,r)$ existe otra bola $B(x,\rho)$ tal que



$$B(x,\rho)\subset B(a,r)$$

Es suficiente tomar $\rho < r - d(a,x)$.

$\forall\, y \in B(x,\rho) \Rightarrow d(x,y) < \rho$

Pero $d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + \rho < d(a,x) + r - d(a,x) = r$

Luego $d(a,y) < r \Rightarrow y \in B(a,r) \Rightarrow B(x,\rho) \subset B(a,r)$.

4.3. TEOREMA: La condición necesaria y suficiente para que un conjunto U de E sea abierto es que U sea unión de bolas abiertas.

Condición necesaria: U abto $\Rightarrow \forall x\in U, \exists B(x,r_x)\subset U \Leftrightarrow x\in B(x,r_x)\subset U \Rightarrow$

$\Rightarrow U \subset \bigcup_{x\in U} B(x,r_x) \subset U \Rightarrow U = \bigcup_{x\in U} B(x,r_x)$

Condición suficiente: $U = \bigcup B(x_i,r_i) \Rightarrow U$ es abto, pues $B(x_i,r_i)$ es abto.

COROLARIO: Las bolas abiertas constituyen una base para la topología del espacio métrico, pues todo abto de la topología se puede expresar como unión de bolas abiertas.

4.4. PROPOSICION: La familia de bolas abiertas de centro a constituye un sistema fundamental de entornos del punto a.

$\{B(a,r) / r\in\mathbb{R}^+\}$ es sistema fundamental de entornos del punto a.

Demostr.: $\forall\, V\in \mathcal{V}(a) \Rightarrow \exists\, O$ abto$/ a\in O\subset V$

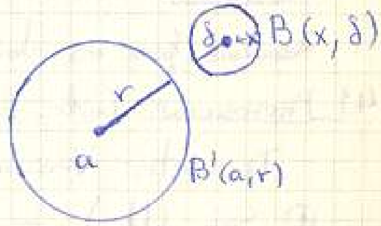
O abto $\Rightarrow \exists B(a,r) / x\in B(a,r)\subset O\subset V \Rightarrow V\supset B(a,r)$

Es decir todo entorno de a contiene al menos una bola $B(a,r)$, luego queda demostrada la proposición.

COROLARIO: La familia $\{B(a,\frac{1}{n}) / n\in\mathbb{N}\}$ es sistema fundamental de entornos del punto a pues toda bola $B(a,r) \supset B(a,1/n)$ a partir de un cierto valor de $n\in\mathbb{N}$.
Es decir, siempre se puede encontrar un sistema fundamental de entornos numerables.

4.5. PROPOSICION: Toda bola cerrada $B'(a,r)$ de un espacio métrico $M=(E,d)$ es un conjunto cerrado.

Demostr.: Comprobemos que $\complement B'(a,r)$ es abierto



Sea $x\in \complement B'(a,r)$. Veamos que existe una bola $B(x,\delta)$ contenida totalmente en $\complement B'(a,r)$, y esto para cualquier $x\in\complement B'(a,r)$, luego $\complement B'(a,r)$ será abierto.

Consideremos $\delta \leq d(a,x) - r$ (sería suficiente tomar $\delta = d(a,x)-r$).

Si $x\in \complement B'(a,r) \Rightarrow x\notin B'(a,r) \Rightarrow d(a,x) > r$, luego $\delta > 0$.

Veamos que $B(x,\delta)\subset \complement B'(a,r)$

$\forall\, y\in B(x,\delta) \Rightarrow d(x,y) < \delta$

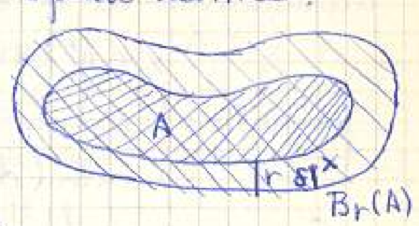
Además $d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) \Rightarrow d(a,y) \geq d(a,x) - d(y,x) >$

$> d(a,x) - \delta \geq d(a,x) - d(a,x) + r = r \Rightarrow d(a,y) > r \Rightarrow y \in \complement B'(a,r)$

5. Concepto de bola centrada en un conjunto A

DEFINICION: Se llama bola abierta centrada en un conjunto A y de radio r al conjunto $B_r(A) = \{x \in E \,/\, d(x,A) < r\}$ donde E es un espacio métrico.

Trivialmente $A \subset B_r(A)$, pues si $x \in A$, $d(x,A) = 0 < r$.



DEFINICION: Se llama bola cerrada centrada en un conjunto A y de radio r al conjunto: $B'_r(A) = \{x \in E \,/\, d(x,A) \leq r\}$.

5.1. PROPOSICION: La bola abierta $B_r(A)$ es un conjunto abierto.

Demostr.: Veamos que $\forall x \in B_r(A)$, $\exists B(x,\delta) \,/\, B(x,\delta) \subset B_r(A)$

Es suficiente tomar $\delta = r - d(x,A)$.

Sea $y \in B(x,\delta)$. Hemos de demostrar que $B(x,\delta) \subset B_r(A)$, es decir, $d(y,A) < r$

$d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$, pero $d(x,y) < \delta$, pues $y \in B(x,\delta)$ luego

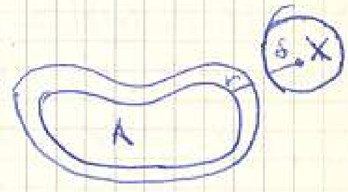
$d(y,A) < \delta + d(x,A) = r - d(x,A) + d(x,A) = r \Leftrightarrow d(y,A) < r \Rightarrow y \in B_r(A)$

$\Rightarrow B(x,\delta) \subset B_r(A)$, luego $B_r(A)$ es abierto, csqd.

5.2. PROPOSICION: La bola cerrada $B'_r(A)$ es un conjunto cerrado.

Demostr.: Veamos que $\complement B'_r(A)$ es abierto

es decir que $\forall x \in \complement B'_r(A)$, $\exists B(x,\delta) \subset \complement B'_r(A)$



Es suficiente tomar $\delta = d(x,A) - r$

Si $x \in \complement B'_r(A) \Rightarrow x \notin B'_r(A) \Rightarrow d(x,A) > r$

Luego $\delta > 0$.

Sea $y \in B(x,\delta) \Rightarrow d(x,y) < \delta$

Además $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A) \Rightarrow d(y,A) \geq d(x,A) - d(x,y) > d(x,A) - \delta =$

$= d(x,A) - d(x,A) + r = r \Rightarrow d(y,A) > r \Rightarrow y \notin B'_r(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow y \in \complement B'_r(A) \Rightarrow \exists B(x,\delta) \subset \complement B'_r(A)$, $\forall x \in \complement B'_r(A)$.

6. Caracterización de la adherencia de un conjunto

TEOREMA: Sea $M = (E,d)$ un espacio métrico y A una parte de E. La condición necesaria y suficiente para que un elemento x de E pertenezca a $\bar{A}$ es que $d(x,A) = 0$.

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0.$$

Demostr.: Condición necesaria: Si $d(x,A) > 0$, tomando $r < d(x,A)$ se verifica que $B(x,r) \subset \complement A \Rightarrow x \in \mathring{\complement A} \Leftrightarrow x \in \complement \bar{A} \Rightarrow x \notin \bar{A}$. Luego $d(x,A) = 0$.

Condición suficiente: Si $d(x,A) = 0$ veamos que $x \in \bar{A}$, es decir, que toda bola abierta ~~de~~ centro x corta a A: $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$.

Consideremos que $\inf_{y \in A} d(x,y) = 0 \Rightarrow \forall r > 0, \exists y \in A \,/\, d(x,y) < r$

Luego $y \in B(x,r)$, luego $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ csqd.

7. Puntos de acumulación en un espacio métrico

"La condición necesaria y suficiente para que un punto $x \in E$ sea punto de acumulación de A es que todo entorno de x corte a A en una infinidad de puntos.

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x),\ U \cap A \text{ es infinito."}$$

Demostr.: Condición necesaria: Supongamos que $\exists U \in \mathcal{V}(x) / U \cap A = \{x_1, \dots, x_n\}$

Sea $r = \min(d(x,x_i),\ x \neq x_i) > 0$

Consideremos la bola abierta $B(x,r)$. $B(x,r)$ es un abierto que contiene al punto x, luego $B(x,r) \in \mathcal{V}(x)$. Siendo $x \neq x_i$, $d(x,x_i) \geq r$, luego

$$x_i \notin B(x,r).$$

Es decir existe un entorno de x que no contiene ningún punto de A, luego x no es un punto de acumulación de A contra la hipótesis.

Condición suficiente: Si $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $U \cap A$ es infinito, cada entorno de x contiene un punto de A distinto de x, luego $x \in A'$.