TEMA 3º: FUNCIONES CONTINUAS EN ESPACIOS TOPOLOGICOS

1. Definiciones

Sea $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación entre dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$. Diremos que f es continua en el punto $x_0 \in X$ si para todo entorno de $f(x_0)$ existe un entorno de x_0 cuya imagen está contenida en el entorno de $f(x_0)$.

f continua en $x_0 \iff \forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists U \in \mathcal{V}(x_0) \;/\; f(U) \subset V$.

En el caso particular de un espacio métrico, la definición quedaría así:

"Sean $M=(E,d)$ y $M'=(E',d')$ dos espacios métricos. Se dice que la aplicación $f: E \longrightarrow E'$ es continua en x_0 cuando $\forall B(f(x_0), \varepsilon), \exists B(x_0, \delta)$ tal que
$$f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$
O lo que es equivalente, según la definición de bola abierta:

"$f: E \to E'$ es continua en x_0 si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $d(x, x_0) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

Ejemplo: Para el caso de una función real de variable real, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \;/\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

1.1. Proposición: Dados dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ ~~...~~ ~~...~~ la aplicación $f: X \to X'$ es continua en $x_0 \in X$ si y solo si se verifica que
$$\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0).$$

Demostr.: $\overset{N}{\Longrightarrow}$] f es continua en x_0, entonces $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists U \in \mathcal{V}(x_0)$ tal que $f(U) \in V$. Luego $f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(V)$.

Pero $f^{-1}(f(U)) \supset U \Rightarrow U \subset f^{-1}(V)$. Luego $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$, pues $U \in \mathcal{V}(x_0)$.

$\overset{S}{\Longleftarrow}$] $\forall V \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$. Veamos que f es continua en x_0.

Haciendo $U = f^{-1}(V)$, $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$. Luego f es continua en x_0.

1.2. Proposición: Sean X, X' y X'' espacios topológicos y $f: X \longrightarrow X'$ y $g: X' \longrightarrow X''$ dos aplicaciones continuas, f continua en x_0 y g en $f(x_0)$. Entonces $(g \circ f)$ es continua en x_0.

Demostr.: $g \circ f: X \longrightarrow X''$

Hay que probar que $\forall V \in \mathcal{V}((g\circ f)(x_0))$, $(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) \in \mathcal{V}(x_0)$.

Si g es continua en $f(x_0)$, y $V \in \mathcal{V}(g(f(x_0))) \Rightarrow g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(f(x_0))$.

Si f es continua en x_0 y $g^{-1}(V) \in \mathcal{V}(f(x_0)) \Rightarrow f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \mathcal{V}(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = (g \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x_0)$ c.s.q.d.

Definición: Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ espacios topológicos y $f: X \to X'$ una aplicación. Diremos que f es continua si y solo si f es continua en todos los puntos de X.

Ejemplos: ① Aplicación constante es continua:

$f: X \longrightarrow X'$ Sea $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(f(x))$. Siendo $\forall x \in X$, $f(x) = b$ se veri-

$x \longrightarrow f(x) = b$ [illegible]

② Aplicación identidad: $i: X \longrightarrow X$
$x \longmapsto i(x) = x$

Sea $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(i(x))$, como $i(x) = x \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$. Siendo $i^{-1}(V) = V$ queda probado que $i^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$. Luego la aplicación identidad es continua.

③ Cualquier aplicación f del espacio topológico discreto en otro espacio topológico cualquiera $(X', \mathcal{T})$ es continua. $f: X_d \longrightarrow X'$ es continua.

Sea $x \in X$. Si $V \in \mathcal{V}(f(x)) \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$. Pero también $x \in \{x\} \subset f^{-1}(V)$.
Siendo $\{x\}$ un abierto de $\mathcal{T}_d$, se verifica que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.

2. Caracterización de aplicaciones continuas

2.1. TEOREMA: Sean los espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$, y $f: X \longrightarrow X'$ una aplicación. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) f es continua
b) $\forall A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
c) $\forall F$ cerrado de X', $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.
d) $\forall U$ abierto de X', $f^{-1}(U)$ es abierto de X.

Demostracion: Para demostrar estas equivalencias es suficiente probar las implicaciones siguientes: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a).

a) $\Rightarrow$ b) Es decir: f es continua $\Rightarrow \forall A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Hemos de probar que $\forall x \in \bar{A}$, $f(x) \in \overline{f(A)}$.
Sea $V \in \mathcal{V}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$, pues f es continua.
Hemos de probar que $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$, $V \cap f(A) \neq \emptyset$.
Si $x \in \bar{A} \Rightarrow f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow f(f^{-1}(V) \cap A) \neq \emptyset$, por ser f aplicación.
Pero $f(f^{-1}(V) \cap A) \subset f(f^{-1}(V)) \cap f(A) \subset V \cap f(A)$
Luego $\forall V \in \mathcal{V}(f(x))$, $V \cap f(A) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$
Luego $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, csqd.

b) $\Rightarrow$ c) Es decir: $\forall A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} \Rightarrow [\forall F$ cerrado de $X' \Rightarrow f^{-1}(F)$ cerrado de $X]$.
Sea F un cerrado de X' y sea $A = f^{-1}(F) \subset X$.
Luego $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \bar{F} = F \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\bar{A}) \subset F \Rightarrow f^{-1}(f(\bar{A})) \subset f^{-1}(F)$, pero $\bar{A} \subset f^{-1}(f(\bar{A}))$ y $f^{-1}(F) = A$
Luego $\bar{A} \subset A \Rightarrow \bar{A} = A$, es decir $A = f^{-1}(F)$ es cerrado.

c) $\Rightarrow$ d) (F cerrado $\Rightarrow f^{-1}(F)$ cerrado) $\Rightarrow$ ($\forall U$ abto de $X' \Rightarrow f^{-1}(U)$ abto de X).
$\forall U$ abto $\subset X'$, $\complement U$ cerrado $\Rightarrow f^{-1}(\complement U)$ es cerrado. Siendo $f^{-1}(\complement U) = \complement f^{-1}(U)$
Se verifica que $\complement f^{-1}(U)$ es cerrado, luego $f^{-1}(U)$ es abierto.

d) $\Rightarrow$ a) (U abto $\Rightarrow f^{-1}(U)$ abto) $\Rightarrow$ f es continua.
Sea $x \in X$ y $V \in \mathcal{V}(f(x)) \Rightarrow \exists U$ abto $/ f(x) \in U \subset V \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$. Siendo $f^{-1}(U)$ abto se verifica que $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.
Luego f es continua.

La proposición que más se utiliza para ver si una función f es continua es la que dice que si U es un abierto de X', $f^{-1}(U)$ es un abierto de X, $\forall U \in \mathcal{T}'$.

2.7. PROPOSICION: Una función f definida entre dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ es continua si y solo si para todo abierto B de una base de X', $f^{-1}(B)$ es un abierto de X.

Demostr.: $\boxed{N}$ Si f es continua se verifica por el teorema anterior que para todo abierto de X' ~~se verifica~~ que la contraimagen es abierto en X. Luego si B es abto de X' $f^{-1}(B)$ será un abierto de X.

$\boxed{S}$ $\forall B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B)$ es abto, donde $\mathcal{B}$ es una base de X'. Veamos que f es continua. Sea U una abierto de X', luego $U = \bigcup B_i$

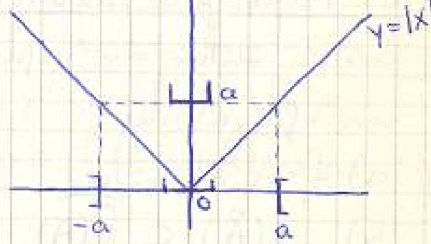
Luego $f^{-1}(U) = \bigcup f^{-1}(B_i)$, como los $f^{-1}(B_i)$ son abiertos, la unión tambien será un abierto, luego $f^{-1}(U)$ es abierto, $\forall U$ abto $\subset X'$. esqd.

Esta proposición nos permite estudiar la continuidad de una función utilizando los abiertos de la base, en lugar de utilizar todos los abiertos de la topología.

Si V es un abierto de X, $f(V)$ no tiene porque ser un abierto de X'.

Contraejemplo: Sea la función $f(x) = |x|$

Como vemos la imagen del abierto $]-a, a[$ es $[0, a[$ que no es abierto ni cerrado, siendo $f(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$.



3. Homeomorfismo

Recordemos que una aplicación f entre dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ es homeomorfismo si f es biyectiva y transforma abiertos de $(X, \mathcal{T})$ en abiertos de $(X', \mathcal{T}')$, y viceversa.

Podemos dar la siguiente definición de homeomorfismo, que es equivalente a la anterior:
$f: X \rightarrow X'$ es homeomorfismo si f es biyectiva y f y f^{-1} son continuas.
Si f es continua: $\forall U$ abto $\subset X' \Rightarrow f^{-1}(U)$ abto $\subset X$.
Si f^{-1} es continua: $\forall V$ abto $\subset X \Rightarrow (f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$ es abto de X'.

La aplicación f puede ser biyectiva y continua y, sin embargo, no ser homeomorfismo. En $\mathbb{R}$ si f es biyectiva y continua, f^{-1} también es continua, luego f es homeomorfismo. Veamos un contraejemplo en otro espacio topológico.

Contraejemplo: Sea X un conjunto al que se le dota de dos topologías, la discreta y otra cualquiera distinta de la discreta. Se considera la aplicación identidad en X:

$$i : (X, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$$

Evidentemente, i es biyectiva y continua, sin embargo, en ...

4. Aplicaciones abiertas y cerradas

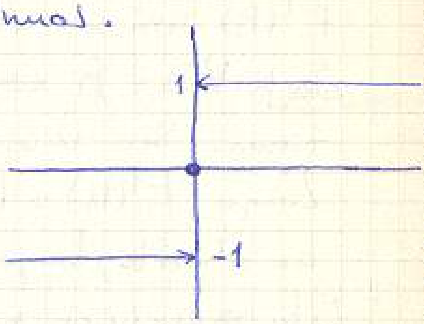
DEFINICIONES: Una aplicación $f: X \longrightarrow X'$ se dice que es abierta cuando $\forall U$ abto $\subset X$, $f(U)$ abto $\in X'$.

Se dice que $f: X \to X'$ es cerrada si para todo cerrado $F \subset X$, $f(F)$ cerrado $\subset X'$.

Hay aplicaciones abiertas que no son continuas, como, por ejemplo, la inversa de la que se puso en el apartado 3: $i: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_d)$ es abta, pues para todo U abto $\in X$, $f(U)$ abto $\subset X$, pues $f(U) \in \mathcal{T}_d$.

Asimismo, hay aplicaciones cerradas que no son continuas.

Ej: Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ definida del siguiente modo:
- $x > 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = 1$
- $x = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = 0$
- $x < 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}(x) = -1$.



Sea F un cerrado cualquiera, entonces $f(F)$ puede ser: a) $\{1\}$, b) $\{0\}$, c) $\{-1\}$, d) $\{0,1\}$, e) $\{-1,0\}$, f) $\{-1,1\}$, g) $\{-1,0,1\}$ conjuntos todos ellos cerrados, luego f es cerrada, y está claro que f no es continua.

4.1. TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE APLICACIONES ABIERTAS: Sea $f: X \to X'$ una aplicación entre dos espacios topológicos $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) f es abierta.

b) $f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$

c) $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $x \in X$, $f(U) \in \mathcal{V}(f(x))$

Demostr.: a) $\Rightarrow$ b) | f abta $\Rightarrow f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)}$

Si f abta, $\forall U$ abto $\subset X$, $f(U)$ abto de X'

Sea A una parte de X. Como $\mathring{A}$ es abierto, $f(\mathring{A})$ es un abierto de X' y además como $\mathring{A} \subset A$, se verifica que $f(\mathring{A}) \subset f(A)$. Siendo $f(\mathring{A})$ un abierto contenido en $f(A)$ estará también contenido en $\widehat{f(A)}$ que es el mayor abierto contenido en $f(A)$.

b) $\Rightarrow$ c) | $f(\mathring{A}) \subset \widehat{f(A)} \Rightarrow \forall U \in \mathcal{V}(x)$, $f(U) \in \mathcal{V}(f(x))$.

Si $U \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow x \in \mathring{U}$, pero $f(\mathring{U}) \subset \widehat{f(U)}$ por hipótesis, luego $f(x) \in f(\mathring{U}) \subset \widehat{f(U)} \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x) \in \widehat{f(U)} \Longleftrightarrow f(U) \in \mathcal{V}(f(x))$.

c) $\Rightarrow$ a) | $\forall x \in U$ abto $\Rightarrow U \in \mathcal{V}(x)$, luego según c) $f(U) \in \mathcal{V}(f(x)) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall f(x) \in f(U)$, $f(U) \in \mathcal{V}(f(x))$, luego $f(U)$ es entorno de todos sus puntos, luego es abierto. Por tanto $\forall U$ abto $\subset X$, $f(U)$ abto $\subset X' \Longleftrightarrow f$ es abierta.

4.2. TEOREMA DE CARACTERIZACIÓN DE APLICACIONES CERRADAS: Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ espacios topológicos y $f: X \to X'$ una aplicación. La condición necesaria y suficiente para que f sea cerrada es que $\forall A \subset X$, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Demostr.: N $\Rightarrow$ | Hemos de probar que si f es cerrada, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$.

Sea A una parte de X, luego $\bar{A}$ es un cerrado de X. Por ser f cerrada, $f(\bar{A})$ es un cerrado de X'. Por otra parte $A \subset \bar{A} \Rightarrow f(A) \subset f(\bar{A})$, luego $f(\bar{A})$ es un cerrado que contiene a $f(A)$, luego deberá contener a $\overline{f(A)}$ que es el menor cerrado que contiene a $f(A)$. Luego $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

$\underline{\Leftarrow}$] Hemos de probar que si $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$, f es cerrada.

Sea F un cerrado de X. Según la hipótesis $\overline{f(F)} \subset f(\bar{F}) = f(F)$, pues F es cerrado. Luego $\overline{f(F)} \subset f(F)$. Además $f(F) \subset \overline{f(F)}$. Luego $f(F) = \overline{f(F)}$, es decir, $f(F)$ es cerrado de X', $\forall F$ cerrado $\subset X$. Luego f es cerrada.

4.3. COROLARIO: La condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f: X \to X'$ sea cerrada y continua es que

$$\forall A \subset X, \quad f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$$

Esto se deduce de los teoremas 2.1 y 4.2.

4.4. COROLARIO: La condición necesaria y suficiente para que $f: X \to X'$ sea un homeomorfismo es que sea biyectiva, abierta y continua. Y también es condición necesaria y suficiente para que $f: X \to X'$ sea homeomorfismo que sea biyectiva, cerrada y continua.

- Si f es biyectiva, abierta y continua, por ser abierta f transforma abiertos de X en abiertos de X' y por ser continua transforma abiertos de X' en abiertos de X.
- Hemos visto antes que f es homeomorfismo si es biyectiva y f y f^{-1} son continuas. f es continua por hipótesis, veamos que f^{-1} también lo es.
  Sea F un cerrado de X. Para que f^{-1} sea continua $(f^{-1})^{-1}(F)$ debe ser cerrado. Pero $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ que es cerrado pues f es cerrada, luego f^{-1} es continua.

4.5. COROLARIO: La condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f: X \to X'$ sea homeomorfismo es que sea biyectiva y que

$$\forall A \subset X, \quad f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$$

4.6. COROLARIO: Una aplicación $f: X \to X'$ es homeomorfismo si f es continua y $\exists g: X' \to X$ también continua tal que $g \circ f = i_X$ y $f \circ g = i_{X'}$.
(Si ocurre esto, $g = f^{-1}$; la existencia de g implica que f es biyectiva).

5 Comparación de topologías

Sea un conjunto X. Llamemos $\mathcal{F}_X$ al conjunto de las topologías sobre X. Se va a definir en $\mathcal{F}_X$ una relación de orden $\leq$. Diremos que la topología $\mathcal{T}$ es menos fina que la topología $\mathcal{T}'$ si todo abierto de $\mathcal{T}$ es abierto de $\mathcal{T}'$:

$$(\mathcal{T} \leq \mathcal{T}') \Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}').$$

Evidentemente, la relación $\leq$ es de orden, pues verifica las propiedades:
- Reflexiva: $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}$, pues $\forall U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}$
- Antisimétrica: $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \wedge \mathcal{T}' \leq \mathcal{T} \Rightarrow (\forall U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}') \wedge (\forall V \in \mathcal{T}' \Rightarrow V \in \mathcal{T})$

$\Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}'$

- Transitiva: $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}' \wedge \mathcal{T}' \leq \mathcal{T}'' \Rightarrow (\forall U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}') \wedge (\forall V \in \mathcal{T}' \Rightarrow V \in \mathcal{T}'') \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall U \in \mathcal{T} \Rightarrow U \in \mathcal{T}'' \Rightarrow \mathcal{T} \leq \mathcal{T}''$.

El orden es parcial, pues no todas las topologías pertenecientes a F_X son comparables.

El conjunto F_X posee mínimo y máximo. El mínimo es la topología grosera $\mathcal{T}_G = \{\phi, X\}$, pues toda topología de F_X contiene al vacío y el total, es decir, $\forall \mathcal{T} \in F_X$, $\mathcal{T}_G \leq \mathcal{T}. \Rightarrow \min F_X = \mathcal{T}_G$.

El máximo es la topología discreta $\mathcal{T}_D = \mathcal{P}(X)$, pues para toda topología sobre X se verifica que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}_D \Rightarrow \max F_X = \mathcal{T}_D$.

5.1. PROPOSICION: Es condición necesaria y suficiente para que la aplicación identidad $i: (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ sea continua que $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$.

Demostr.: Trivial, pues si U es abto de $\mathcal{T}'$, $i^{-1}(U) = U$ debe ser abto de $\mathcal{T}$ para que i sea continua.

6. Función uniformemente continua

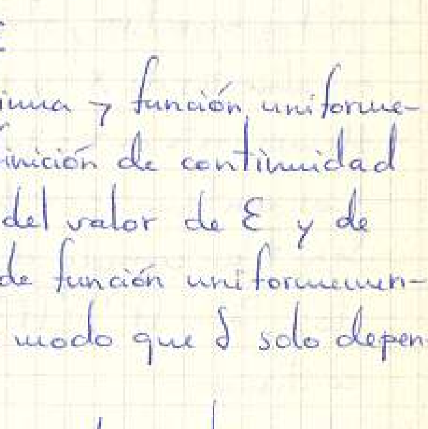
DEFINICION: Sean $M_1 = (E_1, d_1)$ y $M_2 = (E_2, d_2)$ dos espacios métricos. Una aplicación $f: E_1 \longrightarrow E_2$ diremos que es uniformemente continua si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ / \ d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Aparentemente, no hay diferencia entre función continua y función uniformemente continua. Recordemos, sin embargo, que la definición de continuidad se refería a un punto x_0, de modo que δ depende del valor de ε y de la posición del punto x_0. Como vemos la definición de función uniformemente continua no hace alusión a un punto concreto, de modo que δ solo depende de ε.

6.1. PROPOSICION: Si una función $f: E_1 \longrightarrow E_2$ es uniformemente continua, es continua.

Demostr.: Si $f: E_1 \longrightarrow E_2$ es uniformemente continua:
$\forall x_0 \in E_1 \wedge \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \ / \ d_1(x_0, x) < \delta \Rightarrow d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$, luego f es continua en todos los puntos de E_1.



El recíproco no es cierto, en general: Consideremos la función $\frac{1}{x}$. Como vemos esta función es continua en $]0, +\infty[$, pero no es uniformemente continua pues, dado un ε, el valor de δ depende de la posición del punto. Para $x_0 < x_1$, hemos de tomar un δ menor para x_0 que para x_1, dado un ε fijo.

Se ha considerado la función $1/x$ ~~de~~ $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

6.2. PROPOSICION: Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico y la recta real $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Sea A una parte no vacía de E. Entonces la aplicación:

$$f: E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x)=d(x,A)$$

es uniformemente continua.

Demostr.: Se demostró en el tema II (aptdo 3, propos. 3.4) que $|d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y)$.

Hemos de hallar $\delta>0$ tal que $d(x,y)<\delta \Rightarrow d_u(f(x),f(y))<\varepsilon$

Pero $d_u(f(x),f(y)) = |d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y) < \delta$

Luego es suficiente hacer $\delta=\varepsilon$ para que se verifique: $d_u(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Luego $f(x)=d(x,A)$ es uniformemente continua. c.q.d.

7. Estructuras sobre un espacio métrico

Siempre que se define una estructura sobre un conjunto, se establece un isomorfismo en dicha estructura. Así si un conjunto tiene una estructura algebraica de grupo el isomorfismo propio de esta estructura son las biyecciones homomórficas; si se trata de una estructura topológica, el isomorfismo propio de dicha estructura es el homeomorfismo.

Cabe hablar de propiedades inherentes o propias de cada estructura (propiedades algebraicas, topológicas, métricas, ...) propiedades que el isomorfismo de la estructura conserva. Es decir, diremos que una propiedad es propia de una estructura cuando se mantiene por el isomorfismo correspondiente. Así:

- podemos decir que una propiedad es topológica si se mantiene por homeomorfismos.
- y que una propiedad es métrica si se mantiene por el isomorfismo correspondiente a la estructura métrica. Aún no hemos definido este isomorfismo, pero parece lógico pensar que si la propiedad esencial de la estructura métrica es la distancia, dicho isomorfismo ha de ser precisamente aquel que conserva las distancias. Luego:

DEFINICION: Sean $M_1=(E_1,d_1)$ y $M_2=(E_2,d_2)$ dos espacios métricos. Decimos que una aplicación $f: E_1 \longrightarrow E_2$ es una isometría si es biyectiva y conserva las distancias, es decir:

$\forall x,y \in E_1,\ d_1(x,y) = d_2(f(x),f(y))$.

Siendo un espacio métrico un espacio topológico particular, podemos definir en él, a parte de la estructura métrica, la estructura topológica inducida por la distancia. Además, podemos definir una nueva estructura sobre él llamada "estructura [illegible] de la cual, por el momento, solo caracterizaremos su isomorfismo asociado, al cual llamaremos homeomorfismo uniforme.

DEFINICION: Sean $M_1=(E_1,d_1)$ y $M_2=(E_2,d_2)$ espacios métricos. Diremos que una aplicación $f:E_1\to E_2$ es un homeomorfismo uniforme si f es biyectiva y f y f^{-1} son uniformemente continuas.

Luego en un espacio métrico subyacen propiedades topológicas (el carácter abierto o cerrado de un conjunto), propiedades uniformes (el carácter de Cauchy de una sucesión) y propiedades métricas (el carácter acotado de un conjunto).

7.1. **PROPOSICION**: Toda isometría es un homeomorfismo uniforme y todo homeomorfismo uniforme, y todo homeomorfismo uniforme es un homeomorfismo.

Demostracion: Si $f:E_1\to E_2$ es una isometría es biyectiva y además $\forall x,y\in E_1$, $d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y)) \Rightarrow d_1(x,y)<\delta \Leftrightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$ para $\delta=\varepsilon$. Luego f es homeomorfismo uniforme, pues f es uniformemente continua y f^{-1} también lo es.

- Si $f:E_1\to E_2$ es homeomorfismo uniforme, f es biyectiva y f y f^{-1} son continuas, luego f es homeomorfismo.

Luego toda propiedad topológica se conserva por un homeomorfismo uniforme y toda propiedad uniforme se conserva por una isometría. Es decir, toda propiedad métrica es uniforme y toda propiedad uniforme es topológica, como ilustra el gráfico del margen. Luego los espacios topológicos engloban a los espacios uniformes y estos a su vez a los espacios métricos. La inclusión es estricta.

DEFINICIONES: Sean $M_1=(E_1,d_1)$ y $M_2=(E_2,d_2)$ dos espacios métricos.

a) Se dice que M_1 y M_2 son topológicamente equivalentes (t-equivalentes) si $\exists f:E_1\to E_2$ que es un homeomorfismo.

b) Se dice que M_1 y M_2 son uniformemente equivalentes, o simplemente equivalentes si $\exists f:E_1\to E_2$ que es homeomorfismo uniforme.

c) Se dice que son isométricos si $\exists f:E_1\to E_2$ que es una isometría.

DEFINICION: * Sea un conjunto E dotado de dos distancias d_1 y d_2. Se dice que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si la identidad es un homeomorfismo: d_1 y d_2 t-equivalentes si $i:(E,d_1)\longrightarrow(E,d_2)$ es homeomorfismo.

$$x \longmapsto x$$

Es decir si d_1 y d_2 inducen en E la misma topología.

* Se dice que d_1 y d_2 son equivalentes si $i:(E,d_1)\longrightarrow(E,d_2)$ es un homeomorfismo uniforme.

7.2. PROPOSICION: Es condición necesaria y suficiente para que dos distancias d_1 y d_2 sobre E sean t-equivalentes que toda bola abierta por d_1 sea un conjunto abierto por d_2 y que toda bola abierta por d_2 sea un conjunto abierto por d_1.

Demostr.: $\underline{N}\rfloor$ Si d_1 y d_2 son t-equivalentes, $i:(E,d_1) \longrightarrow (E,d_2)$ es abierta y continua, luego:

Luego si $B(a,r)$ es una bola abta por d_1: $i(B(a,r)) = B(a,r)$ es ~~un~~ conjunto abto por d_2, pues i es abierta. Si $B(a,r)$ es una bola abta por d_2, $i^{-1}(B(a,r)) = B(a,r)$ es un conjunto abto por d_1 (no tiene por que ser una bola abta), pues i es continua.

$\underline{S}\rfloor$ Trivial, pues las bolas abtas constituyen una base de las topologías inducidas por d_1 y d_2.

7.3. PROPOSICION: Es condición suficiente (no necesaria) para que dos distancias d_1 y d_2 sobre E sean equivalentes que existan dos constantes $a, b > 0$ tales que:

$$a\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b\, d_1(x,y), \quad \forall x,y \in E$$

Demostr.: Veamos que $i:(E,d_1) \longrightarrow (E,d_2)$ es homeomorfismo uniforme.

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{b}$ para que si:

$$d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$$

pues si $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(x,y) < \frac{\varepsilon}{b} \Rightarrow b\, d_1(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon$.

Luego i es uniformemente continua.

Análogamente i^{-1} es uniformemente continua pues para $\delta = \varepsilon \cdot a$

$$d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(x,y) < \varepsilon \cdot a \Rightarrow \frac{1}{a} d_2(x,y) < \varepsilon$$

Como $a\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \Rightarrow d_1(x,y) \leq \frac{1}{a} d_2(x,y) < \varepsilon$. csqd.

■