TEMA 4: TOPOLOGIAS INICIALES Y FINALES

En este tema se trata de responder a preguntas como las siguientes:
Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación de un conjunto X en un espacio topológico Y, ¿existen topologías sobre X que hagan a f continua, es decir, tales que si U' es abto de Y, $f^{-1}(U')$ sea abto de X?
La respuesta es afirmativa. Se definen los abiertos de X para una de estas topologías del siguiente modo:

$$U \text{ abto en } X \Leftrightarrow \exists U' \text{ abto de } Y / f^{-1}(U') = U$$

Si tenemos dos aplicaciones $f_1: X \rightarrow Y_1$ y $f_2: X \rightarrow Y_2$ donde Y_1 e Y_2 son espacios topológicos, ¿existen topologías sobre X tales que f_1 y f_2 sean continuas, es decir que $f_1^{-1}(U_1')$ y $f_2^{-1}(U_2')$, y por tanto $f_1^{-1}(U_1') \cap f_2^{-1}(U_2')$, sean abiertos? La respuesta también es afirmativa. Una base de una de estas topologías está formada por intersecciones finitas de contraimágenes de abiertos de Y.

Se trata de encontrar la topología menos fina que haga estas aplicaciones continuas.

1. Topología inicial

1.1. TEOREMA: Sea un conjunto X e $(Y_i)_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Sean $f_i: X \longrightarrow Y_i$, $i \in I$, aplicaciones. Entonces:

a) La familia de $\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{B} = \{ f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) / i_r \in I \wedge U_{i_r} \text{ abto de } Y_{i_r} \}$ es una base de una topología $\mathcal{T}$ sobre X. (Variando la i y la k obtenemos la base $\mathcal{B}$).

b) $\mathcal{T}$ es la topología menos fina haciendo continuas las f_i.

c) Sea Z un espacio topológico. La condición necesaria y suficiente para que una aplicación $g: Z \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ sea continua es que $\forall i \in I$, $f_i \circ g$ sea continua.

Demostr.: a) Hay que probar que $\bigcup B's = X$ ($B's$ = conjuntos de la base $\mathcal{B}$).
y que $B_i \cap B_j = \bigcup B's$.

- $X = f_i^{-1}(Y_i)$, pero Y_i es abto por $\mathcal{T}_i$, luego $f_i^{-1}(Y_i) \in \mathcal{B}$
  Por tanto $X \in \mathcal{B} \Rightarrow X = \bigcup B's$
- $B_i = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ $\quad B_j = f_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \ldots \cap f_{j_p}^{-1}(U_{j_p})$
  Luego $B_i \cap B_j = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \cap f_{j_1}^{-1}(U_{j_1}) \cap \ldots \cap f_{j_p}^{-1}(U_{j_p}) \in \mathcal{B}$
  Luego $B_i \cap B_j = \bigcup B's$
  Luego la topología $\mathcal{T}$ la definiremos así: $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow U = \bigcup B's$

b) Hay que probar que para $\mathcal{T}$ las aplicaciones f_i son continuas es más fina que $\mathcal{T}$.

- Si U_i es abto de Y_i, $f_i^{-1}(U_i) \in \mathcal{B} \Rightarrow f_i^{-1}(U_i)$ es abierto por $\mathcal{T}$, luego f_i es continua, $\forall i \in I$.
- Sean $f_i : (X, \mathcal{T}') \longrightarrow Y_i$ aplicaciones continuas. Hay que probar que $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$ es decir que todo abto por $\mathcal{T}$ es abto por $\mathcal{T}'$.

  Si $U \in \mathcal{T} \Rightarrow U = \bigcup B's$. Si probamos que para todo B, $B \in \mathcal{T}'$ quedará probado que $U \in \mathcal{T}'$.

Pero $B = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, donde las $f_{i_r}^{-1}(U_{i_r})$, $r \in \{1, \ldots, k\}$, son abtos por $\mathcal{T}'$ ya que las f_{i_r} son continuas. Luego B es la intersección finita de abtos y, por tanto, abto por $\mathcal{T}'$. Luego U que es unión de abtos por $\mathcal{T}'$ será un abto por $\mathcal{T}'$. Luego $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$.

c) $Z \xrightarrow{g} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{f_i} Y_i$

N) Si g es continua, como $\forall i \in I$, f_i es continua, $f_i \circ g$ es continua.

S) Si $f_i \circ g$ cont. $\Rightarrow g$ cont.

Hay que probar que si $U \in \mathcal{T}$, $g^{-1}(U)$ es abto en Z.

$U \in \mathcal{T} \Rightarrow U = \bigcup B's \Rightarrow g^{-1}(U) = g^{-1}(\bigcup B's) = \bigcup g^{-1}(B's)$

Probemos que $\forall B \in \mathcal{B}$, $g^{-1}(B)$ es abto

$B = f_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, luego

$$g^{-1}(B) = (g^{-1} \circ f_{i_1}^{-1})(U_{i_1}) \cap \ldots \cap (g^{-1} \circ f_{i_k}^{-1})(U_{i_k}) =$$

$$= (f_{i_1} \circ g)^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap (f_{i_k} \circ g)^{-1}(U_{i_k})$$

Como $f_{i_r} \circ g$ son continuas, $(f_{i_r} \circ g)^{-1}(U_{i_r})$ es abto en Z, luego $\forall B$, $g^{-1}(B)$ es intersección de abtos, y portanto abto en Z.

Luego $g^{-1}(U)$, como unión de abtos en Z, es abto Z. De donde se deduce que g es continua. c.s.q.d.

DEFINICION: Sea un conjunto X y una familia $(Y_i)_{i \in I}$ de espacios topológicos $(Y_i, \mathcal{T}_i)$. Sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia de aplicaciones de X en Y_i. Se llama topología inicial sobre X asociada a la familia $(f_i)_{i \in I}$ a la topología menos fina sobre X con respecto a la cual toda función f_i es continua.

DEFINICION: Sea X un conjunto e Y un espacio topológico, y $f : X \to Y$ una aplicación. Se define la imagen recíproca de una topología asociada a f como la topología inicial sobre X asociada a f. Es decir, si $\mathcal{T}_Y$ es la topología asociada a Y, la imagen recíproca de $\mathcal{T}_Y$ es la topología inicial sobre X asociada a f.

Una base de la imagen recíproca es $\mathcal{B} = \{f^{-1}(U) / U \in \mathcal{T}_Y\}$

1.2. PROPOSICION: La base $\mathcal{B} = \{f^{-1}(U) / U \in \mathcal{T}_Y\}$ coincide con la topología inicial o topología imagen recíproca.

Demostr.: Sea U un abto de X por la topología imagen recíproca. Hemos de probar que $U = f^{-1}(U')$, $U' \in \mathcal{T}_Y$.

Si $\mathcal{B}$ es base, $U = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U'_i)$, $U'_i \in \mathcal{T}'$, luego $U = f^{-1}(\bigcup_{i\in J} U'_i)$

Pero $\bigcup_{i\in J} U'_i \in \mathcal{T}_Y$, luego $U = f^{-1}(\bigcup_{i\in J} U'_i) = f^{-1}(U')$, $U' \in \mathcal{T}_Y$, csqd.

2. Ejemplos de aplicación de las topologías iniciales

2.1. Extremo superior de una familia de topologías:

Sea un conjunto X y $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ una familia de topologías sobre X.

Podemos preguntarnos si existe $\sup_{i\in I}(\mathcal{T}_i)$, es decir si existe una topología $\mathcal{T}$ más fina que $\mathcal{T}_i$, $\forall i\in I$, (es decir, $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_i$, $\forall i \in I$) y que sea la menos fina de todas las topologías que son más finas que las $\mathcal{T}_i$, es decir, que si $\forall i \in I$, $\mathcal{T}' \geq \mathcal{T}_i$, $\mathcal{T} \leq \mathcal{T}'$. La respuesta es afirmativa.

Consideremos las aplicaciones identidad j_i definidas como sigue:

$$j_i : (X, \mathcal{T}) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_i)$$

La pregunta formulada equivale a esta otra: ¿existe alguna topología sobre X para la cual todas las j_i son continuas? Sabemos que al menos existe una, la topología inicial $\mathcal{T}$ asociada a la familia de aplicaciones $(j_i)_{i\in I}$. Sabemos además que la topología inicial es la menos fina de todas las topologías que hacen continuas a las j_i. Luego el extremo superior de la familia $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ es la topología inicial asociada a la familia $(j_i)_{i\in I}$.

2.2. Topología generada por una familia de subconjuntos de X.

Sea un conjunto X y $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Cabe preguntarse si existe alguna topología sobre X que haga abiertos a los elementos de $\mathcal{G}$, es decir, si $\exists\, \mathcal{T}$ sobre X / $G_i \in \mathcal{G} \Rightarrow G_i \in \mathcal{T}$.

Consideremos para cada $G_i \in \mathcal{G}$ la topología $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, G_i, X\}$, $\forall i \in I$

Tenemos entonces una familia de espacios topológicos $(X, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$

Consideremos la familia de aplicaciones identidad $(j_i)_{i\in I}$:

$$j_i : X \longrightarrow (X, \mathcal{T}_i)$$

Luego la topología inicial $\mathcal{T}$ asociada a $(j_i)_{i\in I}$ es una topología sobre X, para la cual $\forall i \in I$, $G_i \in \mathcal{T}$, pues $G_i \in \mathcal{T}_i \Rightarrow j_i^{-1}(G_i) = G_i \in \mathcal{T}$. Además es la menos fina de todas las topologías que hacen a G_i abiertos de X, $\forall i \in I$.

Se le llama topología generada por la familia de subconjuntos $\mathcal{G}$.

Una base para esta topología serán intersecciones finitas de contraimágenes de elementos de $\mathcal{G}$, o lo que es lo mismo, intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{G}$, pues se trata de aplicaciones identidad.

3. Topologías finales

El problema es el inverso que para las topologías iniciales. Sea un conjunto X y un espacio topológico Y. Se considera una aplicación $f: Y \to X$ y se quiere dotar a X de una topología que haga a f continua. Fácilmente se ve que los abiertos de esta topología deben ser de la siguiente manera:

$$U \text{ abto de } X \overset{\text{def}}{\iff} f^{-1}(U) \text{ abto de } Y$$

3.1. TEOREMA: Sea $(Y_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y un conjunto X. Sea $f_i: Y_i \to X$ una familia de aplicaciones. Entonces:

a) Decimos, por definición, que U es abierto de una topología $\mathcal{T}$ sobre X sii la contraimagen de U es un abierto de Y_i; $U \in \mathcal{T} \overset{\text{def}}{\iff} f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$. Entonces, $\mathcal{T}$ así definida es en efecto una topología sobre X.

b) $\mathcal{T}$ es la topología más fina sobre X haciendo continuas las f_i.

c) Sea Z un espacio topológico y sea $g: X \to Z$ una aplicación. Entonces g es continua si y solo si $g \circ f_i$ es continua, $\forall i \in I$.

Demostr.: a) $\mathcal{T}$ es topología sobre X, $U \in \mathcal{T} \iff f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I$.

- Veamos que $\bigcup_{k\in J} U_k$ es abto, para U_k abto, $\forall k \in J$:

$$f_i^{-1}\Big(\bigcup_{k\in J} U_k\Big) = \bigcup_{k\in J} f_i^{-1}(U_k)$$

Como U_k es abto, $f_i^{-1}(U_k)$ es abto de $\mathcal{T}_i$, luego $\bigcup_{k\in J} f_i^{-1}(U_k)$ es abto $\Rightarrow \bigcup_{k\in J} U_k \in \mathcal{T}$.

- $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{T}$, pues $f_i^{-1}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} U_k\Big) = \bigcap_{k=1}^{n} f_i^{-1}(U_k)$ que es abto de $\mathcal{T}_i$, $\forall i \in I$.

- $\emptyset$ abto pues $f_i^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
  $X \in \mathcal{T}$, pues $f_i^{-1}(X) = Y_i \in \mathcal{T}_i$.

b) Veamos que $\mathcal{T}$ hace continuas las f_i:

$$\big(U \in \mathcal{T} \overset{\text{def}}{\iff} f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i\big) \Rightarrow f_i \text{ continua}, \forall i \in I.$$

$\mathcal{T}$ es la topología más fina que hace continuas las f_i, es decir, si $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow (X, \mathcal{T}')$ son continuas $\forall i \in I \Rightarrow \mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$

Si U abto de X por $\mathcal{T}'$ $(U \in \mathcal{T}') \Rightarrow f_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}_i \overset{\text{def}}{\iff} U \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$.

c) g continua $\iff g \circ f_i$ continuas. $\quad Y_i \xrightarrow{f_i} (X, \mathcal{T}) \xrightarrow{g} Z$.

$\Rightarrow$] Si g continua, como f_i continua, $\forall i \in I \Rightarrow g \circ f_i$ es continua.

$\Leftarrow$] Sea U un abierto de Z. Hay que probar que $g^{-1}(U)$ es abto de X por $\mathcal{T}$.

$$g^{-1}(U) \in \mathcal{T} \overset{\text{def}}{\iff} \forall i \in I,\ f_i^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_i$$

Pero $f_i^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f_i)^{-1}(U)$ que es abto de $\mathcal{T}_i$ pues $g \circ f_i$ es continua, luego $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ y g es continua. c.q.d.

DEFINICION: Sea un conjunto X y $f_i : (Y_i, \mathcal{T}_i) \longrightarrow X$ aplicaciones de espacios topológicos $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ en X. Se llama topología final asociada a la familia de aplicaciones $(f_i)_{i\in I}$ a la topología más fina sobre X con respecto a la cual las funciones f_i son continuas.

4. Ejemplo de aplicación de la topología final.

Extremo inferior de una familia de topologías

Sea $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ una familia de topologías sobre un conjunto X. ¿Existe el extremo inferior para esta familia de topologías?

Se trata de encontrar la topología más fina de las topologías $\mathcal{T}'$ que verifican que $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}_i, \forall i \in I$.

Se consideran las aplicaciones identidad $(j_i)_{i\in I}$ definidas así:

$$j_i : (X, \mathcal{T}_i) \longrightarrow X$$

Se trata de encontrar una topología sobre X que haga continuas las aplicaciones j_i y que sea la más fina de las que verifican lo anterior. La topología buscada es la topología final asociada a la familia $(j_i)_{i\in I}$, que es el extremo inferior de la familia $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$

Los abiertos de $\mathcal{T}$ son abiertos por $\mathcal{T}_i, \forall i$, luego $\mathcal{T} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$.