# TEMA 5º: SUBESPACIOS

## 1. Subespacios topológicos

**DEFINICION:** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $A$ un subconjunto de $X$. Consideremos la aplicación identidad en $X$ restringida a $A$ (llamada inclusión o inyección canónica) $i: A \longrightarrow X$. Entonces la topología inducida por $X$ sobre $A$ es por definición la topología imagen recíproca de $\mathcal{T}$ asociada a $i$. Se dice entonces que $A$ tiene una topología de subespacio $\mathcal{T}_A$ y que $(A, \mathcal{T}_A)$ es un subespacio topológico de $(X, \mathcal{T})$.

- Caracterización de los abiertos de $\mathcal{T}_A$:

Un subconjunto $U$ de $A$ diremos que es abto de $\mathcal{T}_A$ sii, por definición, existe un abto $U'$ de $\mathcal{T}$ tal que $i^{-1}(U') = U$.

$U \subset A$, $U \in \mathcal{T}_A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists U' \in \mathcal{T} / i^{-1}(U') = U$.

Pero si $U' \subset X$, $i^{-1}(U') = U' \cap A$, pues $i$ es inyectiva. Luego:

$U \in \mathcal{T}_A \Leftrightarrow U = U' \cap A$, donde $U' \in \mathcal{T}$.

Se dice que $U$ es abto de $\mathcal{T}_A$ sii es la traza sobre $A$ de un abto de $\mathcal{T}$.

Análogamente: $F$ cerrado de $A \Leftrightarrow F = i^{-1}(F') = F' \cap A$, donde $F'$ cerrado de $X$.

**1.1. PROPOSICION:** Sea un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ y $A \subset X$ un subconjunto de $X$ con la topología de subespacio. Si denotamos por $\mathcal{V}_A(x)$ la familia de entornos del punto $x \in A$ en el subespacio $(A, \mathcal{T}_A)$, se verifica:

$$U \in \mathcal{V}_A(x) \Leftrightarrow \exists U' \in \mathcal{V}(x) / U = U' \cap A.$$

Es decir, $U$ es entorno de $x$ en $(A, \mathcal{T}_A)$ sii existe un entorno de $x$ en $(X, \mathcal{T})$ cuya traza sobre $A$ es $U$.

Demostr.: $\underline{\Rightarrow}|$ $U \in \mathcal{V}_A(x) \Rightarrow \exists O \in \mathcal{T}_A / x \in O \subset U$

Si $O \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists O' \in \mathcal{T} / O = O' \cap A$

Consideremos $U' = O' \cup U$. Entonces $U' \in \mathcal{V}(x)$, pues $x \in O' \subset U'$, pues $x \in O \subset O'$.

Además $U' \cap A = (O' \cup U) \cap A = (O' \cap A) \cup (U \cap A) = O \cup U$, pues $U \subset A$

Luego $U' \cap A = O \cup U = U$, pues $O \subset U$. Luego $\exists U' \in \mathcal{V}(x) / U' \cap A = U$.

$\underline{\Leftarrow}|$ Sea $U' \in \mathcal{V}(x)$. Consideremos $U = U' \cap A$. Veamos que $U \in \mathcal{V}_A(x)$.

La aplicación $i: (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (X, \mathcal{T})$ es continua, pues se ha definido $\mathcal{T}_A$ como la topología imagen recíproca. Luego:

$U' \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow i^{-1}(U') = U' \cap A \in \mathcal{V}_A(x)$, csqd.

**1.2. PROPOSICION:** Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $B \subset A \subset X$. En $B$ se pueden considerar dos topologías de subespacio: Una $\mathcal{T}_B$ inducida por ser $B \subset X$ y otra $\mathcal{T}_{A_B}$ inducida por ser $B \subset A$. En estas hipótesis:

$$\mathcal{T}_{A_B} = \mathcal{T}_B.$$

Demostración: Probaremos que $\mathcal{T}_B \leq \mathcal{T}_{A_B} \wedge \mathcal{T}_{A_B} \leq \mathcal{T}_B$ con lo que se da la igualdad

- $\mathcal{T}_B \leq \mathcal{T}_{A_B}$, es decir $\forall U \in \mathcal{T}_B \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{A_B}$.

  $U \in \mathcal{T}_B \Rightarrow U = U' \cap B$, $U' \in \mathcal{T}$. Como $B \subset A \Rightarrow B \cap A = B$.

  Luego $U = U' \cap B = U' \cap (A \cap B) = (U' \cap A) \cap B$

  Si $U'' = U' \cap A \Rightarrow U'' \in \mathcal{T}_A$, es decir, $U''$ es abto en $A$. Luego:

  $U = U'' \cap B \Rightarrow U \in \mathcal{T}_{A_B}$. Luego $\mathcal{T}_B \leq \mathcal{T}_{A_B}$.

- $\mathcal{T}_{A_B} \leq \mathcal{T}_B$: Sea $U$ abto de $\mathcal{T}_{A_B}$. Luego $U \in \mathcal{T}_{A_B}$

  Si $U \in \mathcal{T}_{A_B} \Rightarrow \exists U'' \in \mathcal{T}_A / U = U'' \cap B$.

  Si $U'' \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists U' \in \mathcal{T} / U'' = U' \cap A$

  Luego $U = (U' \cap A) \cap B = U' \cap (A \cap B) = U' \cap B \Rightarrow \exists U' \in \mathcal{T} / U = U' \cap B \Rightarrow U \in \mathcal{T}_B$.

  Luego, en definitiva: $\mathcal{T}_{A_B} = \mathcal{T}_B$. csqd.

1.3. PROPOSICION: (Adherencia en un subespacio).

Sea $X$ un espacio topológico y $A \subset X$, $A$ con la topología de subespacio $\mathcal{T}_A$.

Entonces, si $B \subset A$:

$$\overline{B}_A = \overline{B} \cap A$$

Es decir, la adherencia de $B$ en el subespacio $A$ es la traza de $\overline{B}$ sobre $A$.

Demostr.: Procederemos a demostrarlo por doble inclusión.

- $\overline{B}_A \subset \overline{B} \cap A$: Sea $x \in \overline{B}_A$, como $\overline{B}_A \subset A \Rightarrow x \in A$.

  Veamos que $x$ también pertenece a $\overline{B}$.

  Sea $U' \in \mathcal{V}(x)$, entonces $U = U' \cap A \in \mathcal{V}_A(x)$

  Luego $U \cap B \neq \emptyset$ pues $x \in \overline{B}_A$, luego, como $U \subset U'$, $U' \cap B \neq \emptyset$, $\forall U' \in \mathcal{V}(x)$

  Luego $x \in \overline{B}$. En definitiva $\overline{B}_A \subset \overline{B} \cap A$.

- $\overline{B} \cap A \subset \overline{B}_A$: Sea $x \in \overline{B} \cap A$. Hemos de probar que $\forall U \in \mathcal{V}_A(x)$, $U \cap B \neq \emptyset$.

  $U \in \mathcal{V}_A(x) \Rightarrow \exists U' \in \mathcal{V}(x) / U = U' \cap A$

  Si $x \in \overline{B} \Rightarrow U' \cap B \neq \emptyset \Rightarrow U' \cap B = U' \cap (A \cap B) = U \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{B}_A$

  Luego $\overline{B} \cap A \subset \overline{B} \subset \overline{B}_A$.

  En definitiva $\overline{B}_A = \overline{B} \cap A$ csqd.

OBSERVACIONES: ① Del interior de un conjunto en un subespacio no podemos decir lo mismo. Siempre se verifica que: $\mathring{B} \cap A \subset \mathring{B}_A$, pues $\forall x \in \mathring{B} \cap A$, $x \in \mathring{B} \wedge x \in A \Rightarrow (\exists O \in \mathcal{T} / x \in O \subset B) \wedge x \in A \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in O \cap A \subset O \subset B$. Luego:

$\forall x \in \mathring{B} \cap A$, $\exists O_A = O \cap A \in \mathcal{T}_A / x \in O_A \subset B \Rightarrow x \in \mathring{B}_A$

La inclusión en sentido contrario no se verifica siempre.

Contraejemplo: Sea $A = [a,b]$. $A$ es un abierto de $\mathcal{T}_A$, luego

$\mathring{A}_A = A = [a,b]$. Por otro lado: $\mathring{A} = ]a,b[$, y $\mathring{A} \cap A = ]a,b[$

Como vemos* $\mathring{A}_A \not\subset \mathring{A} \cap A$.

## 2. Subespacios métricos.

**DEFINICION**: Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $E$. El espacio métrico $N=(A,d_A)$ donde $d_A$ es la restricción de la distancia $d$ a $A\times A$ se llama subespacio métrico de $M$.

La distancia $d_A$ induce en $A$ una topología $\mathcal{T}_{d_A}$.

Por otro lado, podemos considerar la topología de subespacio sobre $A$, $\mathcal{T}_A$. Cabe preguntarse si ambas topologías definen los mismos abiertos. Entonces.

**2.1. TEOREMA**: La topología sobre un subespacio $(A,d_A)$ de un espacio métrico $M=(E,d)$ inducida por la distancia, y la topología de subespacio coinciden. Es decir:

$$(A,\mathcal{T}_{d_A})=(A,\mathcal{T}_A)$$

Demostr.: $-\ U_A\in\mathcal{T}_{d_A}\Rightarrow U_A\in\mathcal{T}_A$.

$$U_A\in\mathcal{T}_{d_A}\Leftrightarrow \forall x\in U_A,\ \exists B_A(x,r_x)\subset U_A$$

Luego, como: $U_A=\bigcup_{x\in U_A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U_A}B_A(x,r_x)\subset U_A\Rightarrow U_A=\bigcup_{x\in U_A}B_A(x,r_x)$

Siendo $B_A(x,r_x)=\{y\in A/\ d_A(x,y)=d(x,y)<r_x\}=B(x,r_x)\cap A$, $\forall x\in A$,

se deduce que: $U_A=\bigcup_{x\in U_A}(B(x,r_x)\cap A)=\left(\bigcup_{x\in U_A}B(x,r_x)\right)\cap A$

Sea $U=\bigcup_{x\in U_A}B(x,r_x)$. Entonces $U$ es abierto por $\mathcal{T}$. Por tanto $U_A=U\cap A$ es un abierto de $\mathcal{T}_A$. Luego $\mathcal{T}_{d_A}\leq\mathcal{T}_A$ (menos fina).

$-\ U_A\in\mathcal{T}_A\Rightarrow U_A\in\mathcal{T}_{d_A}$.

Si $U_A\in\mathcal{T}_A$ entonces $U_A\subset A\wedge\exists U\in\mathcal{T}/\ U_A=U\cap A$.

Veamos que $U_A\in\mathcal{T}_{d_A}$.

$\forall x\in U_A$, $x\in A\wedge x\in U$.

Si $x\in U$; $\exists B(x,r_x)\subset U$. Como además $x\in A$, se deduce que:

$x\in B(x,r_x)\cap A$, y también $B(x,r_x)\cap A\subset U\cap A=U_A$.

Pero $B_A(x,r_x)=B(x,r_x)\cap A$ es una bola en el subespacio métrico $(A,d_A)$.

Luego: $\forall x\in U_A$, $\exists B_A(x,r_x)\subset U_A$

Por tanto $U_A\in\mathcal{T}_{d_A}$. De donde: $\mathcal{T}_A\leq\mathcal{T}_{d_A}$.

En definitiva resulta: $\mathcal{T}_A=\mathcal{T}_{d_A}$. csqd.

## 3. Continuidad de funciones respecto a subespacios

**3.1. PROPOSICION**: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $A$ una parte de $X$ dotada con la topología de subespacio $\mathcal{T}_A$. Sea el espacio topológico

$(Y, \mathcal{T}')$ y $B$ una parte de $Y$ dotada con la topología de subespacio $\mathcal{T}'_B$ tal que $B \supset f(X)$, siendo $f: X \longrightarrow Y$ una función. Entonces:

a) Si $f$ es continua entonces $f/A : A \longrightarrow Y$ es continua.
El recíproco, en general no es cierto.

b) $f$ es continua si y solo si lo es la aplicación:

$$q: X \longrightarrow B \supset f(X)$$
$$x \longmapsto q(x) = f(x)$$

Demostr.: a) Hay que probar que $\forall V \in \mathcal{T}'$, $f/A^{-1}(V) \in \mathcal{T}_A$.

Pero $f/A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$

Siendo $f$ continua, $f^{-1}(V)$ es un abierto de $\mathcal{T}$, luego $f/A^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A$ es un abierto de $\mathcal{T}_A$.

El recíproco no es cierto, es decir, si $f$ es continua en un subespacio, no tiene porque serlo en el espacio topológico. Por ejemplo, la función
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 1/x$ es continua en $\mathbb{R}^+$ (subespacio de $\mathbb{R}$), pero no es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\boxed{N}$ $\Rightarrow$ Si $f$ es continua trataremos de probar que si $U_B \in \mathcal{T}'_B$ entonces $q^{-1}(U_B)$ es un abierto en $X$.

Si $U_B \in \mathcal{T}'_B$, $\exists U \in \mathcal{T}' / U_B = U \cap B$

Entonces: $q^{-1}(U_B) = q^{-1}(U \cap B) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(B)$

Tal como se ha definido $q$, $q^{-1}(U) = f^{-1}(U)$ y $q^{-1}(B) = f^{-1}(B)$.

Si $B \supset f(X)$, $f^{-1}(B) \supset f^{-1}(f(X)) \supset X$. Como $X$ es el conjunto inicial:
$$f^{-1}(B) = X.$$

Luego $q^{-1}(U_B) = q^{-1}(U) \cap X = q^{-1}(U) = f^{-1}(U)$

Siendo $U \in \mathcal{T}'$ y $f$ continua se deduce que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$.

Luego $q^{-1}(U_B) \in \mathcal{T}$ y por tanto $f$ es continua.

$\boxed{S}$ $\Leftarrow$ Sea $U$ un abierto de $Y$. Probemos que $f^{-1}(U)$ es abierto de $X$.

Si $U \in \mathcal{T}' \Rightarrow U_B = U \cap B \in \mathcal{T}'_B$. Siendo $q$ continua:

$q^{-1}(U_B)$ es abto en $X$.

Pero $q^{-1}(U_B) = q^{-1}(U \cap B) = q^{-1}(U) \cap q^{-1}(B) = f^{-1}(U) \cap X = f^{-1}(U)$

Luego $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$. c.s.q.d.

## 4. ESPACIOS COCIENTES

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $R$ una relación de equivalencia definida sobre $X$. Se nos forma entonces el conjunto cociente $X/R$ de las clases de equivalencia. Se trata de dotar a $X/R$ de una topología para formar el espacio topológico cociente.

Consideremos la aplicación canónica

$$p : X \longrightarrow X/R$$
$$x \longmapsto p(x) = [x]$$

Siendo $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, podemos dotar a $X/R$ de la topología final asociada a la suprayección canónica $p$ que, como sabemos, es la topología más fina sobre $X/R$ que hace continua la aplicación $p$.

Entonces definimos los abiertos de $X/R$ del siguiente modo:

$U$ es abto de $X/R \iff p^{-1}(U)$ es abto de $X$.

Análogamente, $F$ es cerrado de $X/R \iff p^{-1}(F)$ es cerrado de $X$.

Si $U$ es un abto de $X/R$, $U \subset X/R$, luego $U$ será un conjunto de clases de equivalencia de $X/R$: $U = \{[x_i] / i \in J\}$.

Entonces $p^{-1}(U)$ será el conjunto de elementos de $X$ que se aplican por $p$ en cualquiera de las clases que componen $U$, es decir:

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} [x_i]$$

pues la imagen de cualquier elemento de $\bigcup_{i\in J}[x_i]$ es una clase de $U$, la clase a la cual pertenece dicho elemento, y cualquier elemento $x$ de $p^{-1}(U)$ se aplica en una clase de $U$, es decir $\exists i \in J / p(x) = [x_i] = p(x_i) \Rightarrow$ $\Rightarrow [x] = [x_i] \Rightarrow \exists i \in J / x \in [x_i]$; luego $x \in \bigcup_{i \in J}[x_i]$.

Por tanto, los abiertos de la topología en $X/R$ quedan caracterizados por la siguiente equivalencia:

$U \subset X/R$ es abto $\iff \bigcup_{[x_i] \in U} [x_i]$ es abto de $X$ por $\mathcal{T}$.

Analogamente, $F$ es cerrado de $X/R \iff \bigcup_{[x] \in F} [x]$ es cerrado de $X$.

<u>DEFINICION</u>: Sea un conjunto $X$ dotado con una relación de equivalencia $R$ y $A$ un subconjunto de $X$. Diremos que $A$ es SATURADO por $R$ si y solo si $A$ es la unión de clases de equivalencia de $X/R$

$$A = \bigcup_{i \in J} [x_i]$$

O bien si se verifica la implicación siguiente: $x \in A \wedge y R x \Rightarrow y \in A$.

<u>4.1. TEOREMA</u>: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $R$ una relación de equivalencia sobre $X$ y $X/R$ el conjunto cociente. Entonces la condición necesaria y suficiente para que $U$ sea un abierto de $X/R$ es que sea la imagen por $p$ de un abierto $O$ de $X$ saturado por $R$.

$U$ abto de $X/R \iff \exists\, O$ abto de $X$ y saturado por $R\,/\, U = p(O)$

Demostr.: $\underline{N}\!\!\Rightarrow$ Sea $U$ un abierto de $X/R$.

Si $U \subset X/R \Rightarrow U = \{[x_i]/i\in J\}$

Entonces $p^{-1}(U) = \bigcup_{i\in J}[x_i]$ es un abto de $X$, por ser $U$ abto de $X/R$ y $p$ continua.

Si $O = \bigcup_{i\in J}[x_i]$, $O$ es un abto de $X$ saturado por $R$.

y además $p(O) = \{[x_i]/i\in J\} = U$

pues $\forall x\in O$, $\exists i\in J/\ x\in[x_i] \Rightarrow [x]=[x_i]$

Luego $p(x) = [x_i]\in U \Rightarrow p(O)\subset U$

y $\forall [x_i]\in U$, $\exists x\in[x_i]$, pues $[x_i]\neq\emptyset$. Si $x\in[x_i]\Rightarrow x\in O$, y además

Si $x\in[x_i] \Rightarrow p(x)=[x_i]$. Luego $[x_i]\in p(O) \Rightarrow U\subset p(O)$.

En resumen $\exists\, O$ abto de $X$ saturado por $R\,/\,U = p(O)$.

$\underline{S}\!\!\Leftarrow$ Supongamos que $O$ es un abto de $X$ saturado por $R$ tal que $U = p(O)$.

Se trata de probar que $U$ es abierto de $X/R$.

Por ser $O$ saturado por $R$, $O = \bigcup_{i\in J}[x_i]$

Entonces $p(O) = \{[x_i]/i\in J\}$. Como $U = p(O)$, $U = \{[x_i]/i\in J\}$.

Por definición, $U$ abto de $X/R \iff p^{-1}(U)$ abto de $X$.

Pero $p^{-1}(U) = O$ que es abto de $X$ por hipótesis, luego $U$ es abto de $X/R$.

csqd.

Dada una aplicación $f: X\to Y$ podemos definir en $X$ una relación de equivalencia $R$ compatible con $f$, es decir, tal que si $xRy \Rightarrow f(x)=f(y)$.

Entonces $f$ se puede descomponer en la forma $f = \bar{f}\circ p$ donde $p$ es la aplicación canónica y $\bar{f}$ una aplicación de $X/R$ en $Y$, que a cada $[x]\in X/R$ le asocia $\bar{f}([x]) = f(x)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[rr, bend right, "f=\bar{f}\circ p"'] & X/R \arrow[r, "\bar{f}"] & Y \end{tikzcd}$$

Si $X$ es un espacio topologico y $X/R$ su espacio cociente e $Y$ otro espacio topológico, podemos enunciar el siguiente teorema.

4.2. TEOREMA: $f: X\to Y$ es continua sii $\bar{f}: X/R \to Y$ es continua.

Demostr: Sea $U$ un abto de $Y$. Entonces

$$f^{-1}(U) = (\bar{f}\circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U)).$$

Entonces, por definición, se verifican las siguientes equivalencias:

$f$ continua $\iff \forall U$ abto de $Y$, $f^{-1}(U)$ es abto de $X \iff$

$\iff \forall U$ abto de $Y$, $p^{-1}(\bar{f}^{-1}(U))$ es abto de $X \iff \bar{f}^{-1}(U)$ es abto de $X/R$

$\iff \bar{f}$ continua. csqd.