TEMA 6º: ESPACIOS PRODUCTOS

1. PRODUCTO DE ESPACIOS TOPOLÓGICOS

Sea $(X_i, \tau_i)_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos. Consideremos el producto cartesiano $X = \prod_{i\in J} X_i$; si $\bar{x}$ es un elemento de X, es de la forma: $\bar{x} = (x_i)_{i\in J}$.

Se trata de dotar a X de una topología τ, para formar el espacio topológico producto (X, τ). Para cada $j\in J$ podemos considerar la aplicación proyección pr_j

$$pr_j : X \longrightarrow X_j$$
$$(x_i)_{i\in J} \longmapsto x_j$$

Entonces:

DEFINICION: Definimos la topología τ producto de las τ_i sobre X como la topología inicial asociada a las aplicaciones proyección.

τ es la topología menos fina sobre X que hace continuas las aplicaciones pr

Entonces, una base de τ está formada por intersecciones finitas de contragenes de abtos: $\mathcal{B} = \{pr_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \ldots \cap pr_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) / i_1, \ldots, i_k \in J$ y U_{i_r} abto de $X_{i_r}\}$

Por definición, $pr_K^{-1}(U_K) = \{\bar{x} \in \prod_{i\in J} X_i \;/\; pr_K \bar{x} \in U_K\}$

Es decir, la contraimagen por pr_K de U_K es el conjunto de elementos de $X = \prod_{i\in J} X_i$ cuya componente K-ésima pertenece a U_K, es decir:

$$pr_K^{-1}(U_K) = \{\bar{x} \in X \;/\; x_K \in U_K\}.$$

Podemos, entonces, considerar $pr_K^{-1}(U_K)$ como un producto cartesiano de los conjuntos $(X_i)_{i\in J}$, sustituyendo el conjunto X_K por U_K, pues en todo elemento de este producto la componente K-ésima pertenece a U_K.

Podemos escribir: $pr_K^{-1}(U_K) = \prod_{i<K} X_i \times U_K \times \prod_{j>K} X_j$.

Podemos poner $pr_K^{-1}(U_K) = \prod_{i\neq K} X_i \times U_K$ (aunque esto es un abuso de notación, pues en el producto cartesiano influye el orden de los factores).

Si tenemos en cuenta una propiedad conjuntista que dice que:

$$\prod_{i\in J} A_i \cap \prod_{i\in J} B_i = \prod_{i\in J} (A_i \cap B_i)$$

podremos escribir que, para $k \neq j$:

$$pr_K^{-1}(U_K) \cap pr_j^{-1}(U_j) = \left(\prod_{i\neq K} X_i \times U_K\right) \cap \left(\prod_{i\neq j} X_i \times U_j\right) = \prod_{j,K\neq i} X_i \times U_j \times U_K$$

Como β es un conjunto de intersecciones finitas de contraimágenes de abiertos, podemos considerar los elementos β como un producto cartesiano de conjuntos U_i tales que $U_i = X_i$, excepto para un número finito de índices. Es decir, si $B \in \beta$, $B = pr_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap pr_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$, con $i_1, \dots, i_k \in J$ y con U_{i_r} abto de X_{i_r}. Entonces B lo podemos escribir en la forma:

$$B = \prod_{j \notin \{i_1,\dots,i_k\}} X_j \times U_{i_1} \times \dots \times U_{i_k}$$

es decir, como un producto cartesiano de conjuntos U_i, con $U_i = X_i$ $\forall i \in J$ excepto para los índices $i_1, \dots, i_k$, para los cuales U_{i_r} es abto de X_{i_r}.

A los abtos de β se les llama abtos elementales.

Los abiertos de $\mathcal{T}$ serán uniones de abiertos elementales

Hemos dicho que los abiertos de β los podemos escribir como producto cartesiano de conjuntos U_i donde $U_i = X_i$ excepto para un número finito de ellos; este número finito de conjuntos U_i que son distintos de X_i, son abtos de X_i, para cada i. Luego si β_i es una base de la topología $\mathcal{T}_i$ sobre X_i, podemos hallar los abtos de la base β de la topología producto en función de los abtos de las bases β_i.

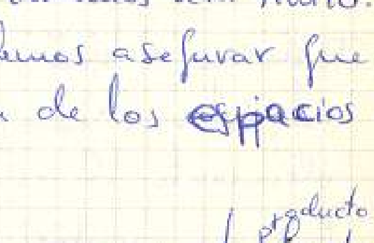
Si el conjunto de índices J es finito, los abtos elementales se forman como productos cartesianos de abtos de los $\{X_i\}_{i=1}^n$.

$$U \in \beta \Rightarrow U = \prod_{i=1}^n U_i \quad , U_i \in \mathcal{T}_i .$$

Sobra la condición de que para un número finito de índices i_j los U_{i_j} son distintos del espacio X_{i_j} correspondiente, pues tenemos un conjunto finito de índices, y cualquier subconjunto de índices que tomemos será finito. Para un conjunto de índices J cualquiera no podemos asegurar que los abtos de β sean productos de abtos cualesquiera de los espacios $\{X_i\}_{i \in J}$

Ejemplo: Los abiertos elementales en $\mathbb{R}^n$, por tratarse de un conjunto producto de finitos términos, serán productos de abtos de $\mathbb{R}$. U abto elemental de $\mathbb{R}^n \Rightarrow U = \prod_{i=1}^n U_i$, donde U_i es abto de $\mathbb{R}$. A un abto elemental U de la forma

$U = \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[$ se le llama pavé abto.



Los pavés abtos en $\mathbb{R}^2$ son rectángulos (los contornos no pertenecen al rectángulo). En $\mathbb{R}^3$ los pavés abtos son prismas abiertos

NOTA: Queda claro entonces que los abtos elementales son productos de unos U_i siendo $U_i = X_i$, excepto para un nº finito de índices, $i_1, \dots, i_k$, para los cuales tomaremos, $U_{i_j} \in \beta_{i_j}$, siendo β_{i_j} una base del espacio X_{i_j}.

Veamos como son los entornos en el espacio producto.

1.1. PROPOSICION: Sea $\overline{x}$ un punto del espacio producto $X=\prod_{i\in J} X_i$, tal que $\overline{x}=(x_i)_{i\in J}$. Para cada $i\in J$ podemos considerar la familia $\mathcal{V}_i$ como sistema fundamental de entornos de $x_i\in X_i$. Entonces la familia

$$\mathcal{V}=\left\{\prod_{i\in J} V_i \;/\; V_i=X_i, \text{ excepto para un nº finito de índices } i_1,\dots,i_n, \text{ para los cuales } V_{i_k}\in\mathcal{V}_{i_k}\right\}$$

es un sistema fundamental de entornos del punto $\overline{x}$.

Demostr.: * Veamos primero que $\prod_{i\in J}V_i$ es entorno de $\overline{x}\in X$.

Si $i\notin\{i_1,\dots,i_n\}$, $V_i=X_i$ y $V_{i_1}\in\mathcal{V}_{i_1}$, $V_{i_2}\in\mathcal{V}_{i_2},\dots, V_{i_n}\in\mathcal{V}_{i_n}$.

Si $V_{i_1}\in\mathcal{V}_{i_1}$, $\exists O_{i_1}$ abto $/ x_{i_1}\in O_{i_1}\subset V_{i_1}$;

así sucesivamente, si $V_{i_n}\in\mathcal{V}_{i_n}$, $\exists O_{i_n}$ abto de X_{i_n} $/ x_{i_n}\in O_{i_n}\subset V_{i_n}$.

Sea $U=\prod_{i\in J}U_i$ con $U_i=X_i$ si $i\notin\{i_1,\dots,i_n\}$, y $U_{i_1}=O_{i_1},\dots, U_{i_n}=O_{i_n}$.

Evidentemente U es un abto elemental en X.

Además $\overline{x}\in U$, pues si $i\notin\{i_1,\dots,i_n\}$, $x_i\in X_i=U_i$

y $x_{i_1}\in O_{i_1}=U_{i_1},\dots, x_{i_n}\in O_{i_n}=U_{i_n}$.

Luego $\overline{x}=(x_i)_{i\in J}\in\prod_{i\in J}U_i=U$

Y además, $U\subset\prod_{i\in J}V_i$, pues $\forall i\in J$, $U_i\subset V_i$.

Luego $\forall\overline{x}\in X$, $\exists U$ abto elemental $/ \overline{x}\in U\subset\prod_{i\in J}V_i$; luego: $\prod_{i\in J}V_i\in\mathcal{V}(\overline{x})$.

* Veamos ahora que $\mathcal{V}$ es un sistema fundamental de entornos de $\overline{x}$.

Habrá que probar que para cualquier V entorno de $\overline{x}$ existe algun $\prod_{i\in J}U_i\in\mathcal{V}$ contenido en V.

Si $V\in\mathcal{V}(\overline{x})$, $\exists O$ abto elemental $/ \overline{x}\in O\subset V$.

Si O es abto elemental, $O=\prod_{i\in J}O_i$, con $O_i=X_i$ si $i\notin\{i_1,\dots,i_k\}$

y con O_{i_j} abto de X_{i_j}, $\forall j\in\{1,\dots,k\}$.

Como $\overline{x}\in O \Rightarrow x_{i_j}\in O_{i_j}$, $\forall j\in\{1,\dots,k\}$, el cual, por ser abierto, es entorno de x_{i_j}. Siendo $\mathcal{V}_{i_j}$ un SFE de x_{i_j} y O_{i_j} un entorno de x_{i_j}, se deduce que $\exists V_{i_j}\in\mathcal{V}_{i_j} / x_{i_j}\in V_{i_j}\subset O_{i_j}$.

Tomando $U=\prod U_i$, con $U_i=X_i$ si $i\notin\{i_1,\dots,i_k\}$ y

$U_{i_j}=V_{i_j}$, $\forall j\in\{1,\dots,k\}$, tenemos que $\overline{x}\in U\subset O\subset V$

con $U\in\mathcal{V}$. Luego $\forall V\in\mathcal{V}(x)$, $\exists U\in\mathcal{V} / U\subset V$ c.s.q.d. ∎

Para formar un entorno de un punto $\overline{x}\in X$, podemos tomar el producto $\prod V_i$, con $V_i=X_i$ excepto para un nº finito de índices $i_1,\dots,i_k$, para los cuales tomaremos $V_i\in\mathcal{V}_i(x_i)$ [illegible]

EJEMPLO: Consideremos $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{R}_i$, siendo $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Sea $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En cada uno de los espacios factores, un sistema fundamental de entornos 0 es el conjunto $\mathcal{V} = \{[-\delta, \delta] / \delta \in \mathbb{R}^{+}\}$.

Entonces $\prod_{i\neq 1} \mathbb{R}_i \times [-\delta, \delta]$ es un entorno de $\bar{0}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Tambien es un entorno de $\bar{0}$ el conjunto producto $\prod_{i\neq 1,2} \mathbb{R}_i \times [-\delta, \delta] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}^{+}$.

1.2. PROPOSICION: Sea $(X_i)_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i\in J} X_i$ el espacio producto. Sea Z un espacio topológico y $f: Z \to X$ una aplicación. Entonces:

$f: Z \to X$ es continua $\iff$ $pr_i \circ f: Z \to X_i$ es continua, $\forall i \in J$.

Demostr.: Hemos definido la topología producto sobre X como la topología inicial asociada a las aplicaciones proyección pr_i. Entonces por el teorema 1.1.ⓒ del tema 4º sobre topologías iniciales, este teorema queda demostrado.

1.3. PROPOSICION: Sea $(X_i)_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos y para cada $i \in J$, A_i una parte de X_i. Sea $X = \prod_{i\in J} X_i$ el espacio producto. Entonces, la adherencia del producto de los A_i es el producto de las adherencias. Es decir:

$$\overline{\prod_{i\in J} A_i} = \prod_{i\in J} \bar{A}_i$$

Demostr.: $\boxed{\subset}$ Por teorema 2.1. (TEMA 3º) sabemos que una aplicación $f: X \to X'$ es continua sii $\forall A \subset X$, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

Si en X tomamos la topología producto, las aplicaciones proyección $pr_i: X \longrightarrow X_i$ son continuas. Entonces si $A = \prod_{i\in J} A_i \subset X$

$pr_i(\bar{A}) \subset \overline{pr_i(A)}$. Entonces: si $\bar{x} = (x_i)_{i\in J}$

$\forall \bar{x} \in \bar{A} = \overline{\prod_{i\in J} A_i}$, $x_i = pr_i(\bar{x}) \in pr_i(\bar{A}) \subset \overline{pr_i(A)} = \bar{A}_i$, $\forall i \in J$.

Luego $\bar{x} \in \prod_{i\in J} \bar{A}_i$, de donde $\overline{\prod_{i\in J} A_i} \subset \prod_{i\in J} \bar{A}_i$

$\boxed{\supset}$ Sea $\bar{x} = (x_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} \bar{A}_i$.

Hay que probar que $\forall V \in \mathcal{V}(\bar{x})$, $V \cap \prod A_i \neq \emptyset$

Si $V \in \mathcal{V}(\bar{x})$, $V = \prod_{i\in J} V_i$, con $V_i = X_i$ si $i \notin \{i_1, \dots, i_n\}$

y $V_{i_k} \in \mathcal{V}_{i_k}(x_{i_k})$, si $k \in \{1, \dots, n\}$.

(~~Para cada índice~~ i, ~~$\exists$ tomamos un $a_i \in A_i$~~)

Si $\bar{x} \in \prod_{i\in J} \bar{A}_i$, entonces $\forall i \in J$, $x_i \in \bar{A}_i$

Si $i_k \in \{i_1, \dots, i_n\}$, $x_{i_k} \in \bar{A}_{i_k}$. Como $V_{i_k} \in \mathcal{V}_i(x_{i_k})$, $V_i \cap A_i \neq \emptyset$. Sea $a_i \in V_i \cap A_i$

Si $i \in J - \{i_1, \dots, i_n\}$, tomamos $a_i \in A_i = A_i \cap X_i = A_i \cap V_i$

Sea $\bar{a} = (a_i)_{i \in J} \in X$

Por la construcción de $\bar{a}$, $\bar{a} \in \prod_{i \in J} (V_i \cap A_i) = \prod_{i \in J} V_i \cap \prod_{i \in J} A_i = V \cap \prod_{i \in J} A_i$

Entonces $V \cap \prod_{i \in J} A_i \neq \emptyset$, $\forall V \in \mathcal{V}(\bar{x})$. Luego $\bar{x} \in \overline{\prod_{i \in J} A_i} \Rightarrow \prod_{i \in J} \bar{A}_i \subset \overline{\prod_{i \in J} A_i}$

Luego: $\prod_{i \in J} \bar{A}_i = \overline{\prod_{i \in J} A_i}$. csqd.

<u>1.4. COROLARIO</u>: Sea $(X_i)_{i \in J}$ una familia de espacios topológicos y $X = \prod_{i \in J} X_i$ el espacio producto. Entonces

$F = \prod_{i \in J} F_i$ es cerrado de $X \Leftrightarrow \forall i \in J$, F_i es cerrado de X_i

Demostr.: F cerrado $\Leftrightarrow F = \bar{F} = \overline{\prod_{i \in J} F_i} = \prod_{i \in J} \bar{F}_i$

$F_i = pr_i(F) = \bar{F}_i \Rightarrow F_i$ cerrado, $pr_i(F) = pr_i(\bar{F}) = pr_i(\prod \bar{F}_i) = \bar{F}_i$.

<u>1.5. PROPOSICION</u>: Sea $X = \prod_{i \in J} X_i$ un producto de espacios topológicos.

Entonces $\forall K \in J$, $pr_K : \prod_{i \in J} X_i \longrightarrow X_K$ es una aplicación abierta.

Demostr.: Hay que probar que $\forall O$ abto de X, $pr_K(O)$ es abto de X_K.

- Si O es abto elemental, $O = \prod_{i \in J} U_i$, con $U_i = X_i$ salvo para un número finito de índices $i_1, \dots, i_n$ para los cuales $U_{i_1}, \dots, U_{i_n}$ son abtos de los respectivos espacios coordenadas $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$.

  Entonces $pr_K(O) = U_K$ es un abto de X_K, pues o bien $U_K = X_K$ que es abto o bien U_K es un abto de X_K, por construcción.

- Si O es un abto cualquiera de X, es unión de abtos elementales, $O = \bigcup_j O_j$, O_j abtos elementales.

  Entonces $pr_K(O) = pr_K(\bigcup_j O_j) = \bigcup_j pr_K(O_j)$

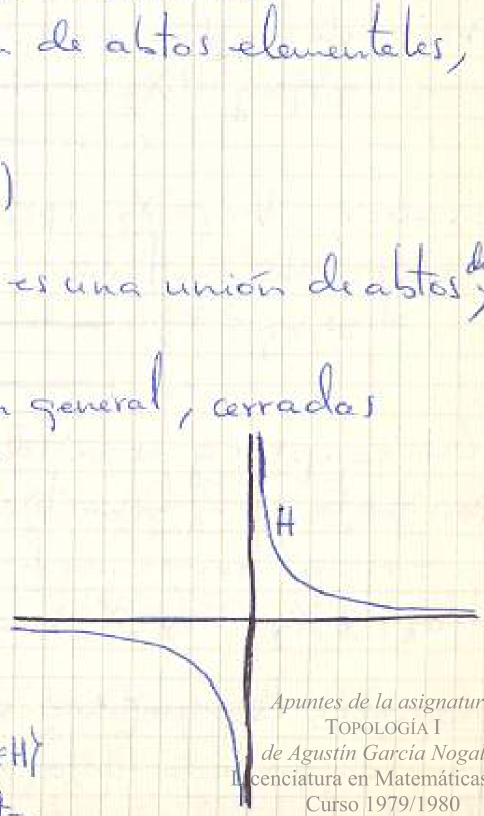
  Pero $pr_K(O_j)$ es abto de X_K, luego $pr_K(O)$ es una unión de abtos de X_K y, por tanto, un abto de X_K. csqd.

* Las aplicaciones proyección pr_K no son, en general, cerradas

Contraejemplo: Sea el conjunto $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy = 1\}$

H es la gráfica de la hipérbola de ecuación $y = \frac{1}{x}$.

H es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$, pues $\complement_{\mathbb{R}^2} H$ es abto ya que $\forall x \in \complement_{\mathbb{R}^2} H$ podemos encontrar una bola $B(x, \delta)$ contenida en $\complement_{\mathbb{R}^2} H$.



Sin embargo, $pr_x(H) = \{x \in \mathbb{R} / \exists y \in \mathbb{R};\ (x,y) \in H\}$ es abto, pues $pr_x(H) = \mathbb{R} - \{0\} = \complement_{\mathbb{R}} \{0\}$ abto.

Luego la aplicación proyección pr_X no es cerrada.

1.6. PROPOSICION: Sean X_1 y X_2 espacios topológicos y a_1 un elemento de X_1. Entonces $\{a_1\} \times X_2 = \{(a_1, x_2) / x_2 \in X_2\}$ es homeomorfo a X_2.

Demostr.: $\{a_1\} \times X_2$ es subespacio de $X_1 \times X_2$. Consideremos la aplicación inclusión (inyección canónica) i de $\{a_1\} \times X_1$ en $X_1 \times X_2$, y la aplicación proyección $pr_2 : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_2$.

$$\begin{tikzcd}
\{a_1\} \times X_2 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "pr_2 \circ i"'] & X_1 \times X_2 \arrow[r, "pr_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Consideremos entonces la aplicación $f = pr_2 \circ i : \{a_1\} \times X_2 \longrightarrow X_2$

$$f = pr_2 \circ i : \{a_1\} \times X_2 \longrightarrow X_2$$
$$(a_1, x_2) \longmapsto x_2$$

Las aplicaciones i y pr_2 son continuas; luego f tambien lo es.

f es biyectiva, trivialmente. Entonces podemos hablar de la función inversa f^{-1}.

$$f^{-1} : X_2 \longrightarrow \{a_1\} \times X_2$$
$$x_2 \longmapsto (a_1, x_2)$$

Para ver que f es homeomorfismo, queda probar que f^{-1} es continua.

Pero f^{-1} es continua sii $g : X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ es continua, pues segun Proposicion 3.1. (TEMA 5º), una función φ es continua sii solo si lo es una función definida análogamente a φ pero sobre un conjunto que contiene a $\operatorname{Im} \varphi$.

Pero $g : X_2 \longrightarrow X_1 \times X_2$ es continua si y solo si lo son
$x_2 \longmapsto (a_1, x_2)$

las aplicaciones $pr_1 \circ g$ y $pr_2 \circ g$, segun proposición 1.2.

Pero estas aplicaciones son continuas, pues

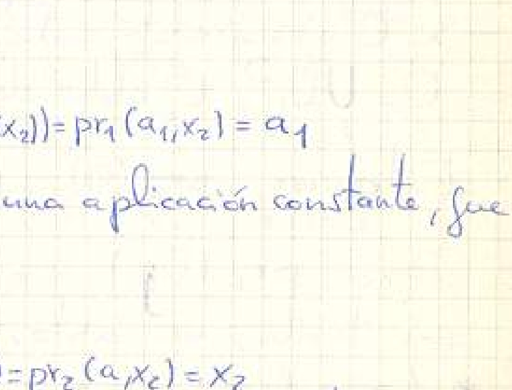
$$pr_1 \circ g : X_2 \longrightarrow X_1$$
$$x_2 \longmapsto (pr_1 \circ g)(x_2) = pr_1(g(x_2)) = pr_1(a_1, x_2) = a_1$$

es decir, $\forall x_2 \in X_2$, $(pr_1 \circ g)(x_2) = a_1$. Se trata de una aplicación constante, que siempre es continua, y

$$pr_2 \circ g : X_2 \longrightarrow X_2$$
$$x_2 \longmapsto (pr_2 \circ g)(x_2) = pr_2(g(x_2)) = pr_2(a_1, x_2) = x_2$$

Luego $pr_2 \circ g$ es la identidad en X_2, que tambien es continua.

Por tanto, f es biyectiva y continua, y f^{-1} es continua; luego f es un homeomorfismo entre $\{a_1\} \times X_2$ y X_2. csqd.



Observacion: Esta proposición se generaliza fácilmente para un producto finito, es decir, si $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia finita de espacios topológicos, $\{a_1\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times X_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}$ es homeomorfo a X_i

1.7. COROLARIO: Sean X_1 y X_2 espacios topológicos y a_1 un elemento de X_1. Sea $\mathcal{U}$ un abto de $X_1 \times X_2$. Llamaremos $\mathcal{U}(a_1)$ al conjunto:

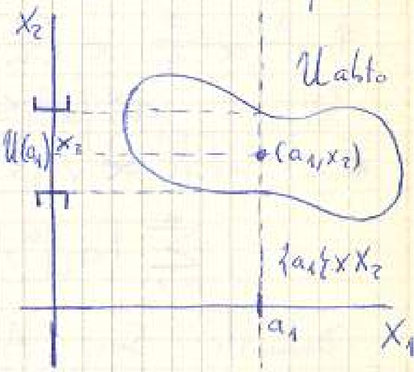
$$\mathcal{U}(a_1) = \{x_2 \in X_2 \,/\, (a_1, x_2) \in \mathcal{U}\}$$

Entonces $\mathcal{U}(a_1)$ es abto de X_2.

($\mathcal{U}(a_1)$ se llama corte paralelo del conjunto $\mathcal{U}$ por un punto a uno de los ejes).

Demostr.: Consideremos el homeomorfismo

$$h : \{a_1\} \times X_2 \longrightarrow X_2$$



entonces $\mathcal{U}(a_1) = h(\mathcal{U} \cap \{a_1\} \times X_2)$

pues $\mathcal{U} \cap \{a_1\} \times X_2 = \{(a_1, x_2) \in \mathcal{U} \,/\, x_2 \in X_2\}$.

Luego $h(\mathcal{U} \cap \{a_1\} \times X_2) = \{x_2 \in X_2 \,/\, (a_1, x_2) \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}(a_1)$

Si $\mathcal{U}$ es abto de $X_1 \times X_2$, por definición de topología de subespacio, $\mathcal{U} \cap \{a_1\} \times X_2$ es abto de $\{a_1\} \times X_2$.

Siendo $h : \{a_1\} \times X_2 \to X_2$ homeomorfismo

Si $\mathcal{U} \cap \{a_1\} \times X_2$ es abto de $\{a_1\} \times X_2$, entonces

$\mathcal{U}(a_1) = h(\mathcal{U} \cap \{a_1\} \times X_2)$ es abto de X_2. csqd.

2. PRODUCTO DE ESPACIOS METRICOS

Nos vamos a limitar al estudio del producto finito de espacios métricos. Se puede demostrar que el producto infinito numerable de espacios métricos es un espacio métrico.

Antes de ver un teorema muy importante, vamos a probar una serie de desigualdades, útiles en dicho teorema.

* 1) Sean a y b números reales positivos y α, β números reales positivos que verifican que $\alpha + \beta = 1$. Entonces se tiene que

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

Demostr.: - Si $a = b$, $a^\alpha b^\beta = a^{\alpha+\beta} = a^1 = a$, y $\alpha a + \beta b = a(\alpha+\beta) = a \cdot 1 = a$.

Luego se verifica que $a^\alpha b^\beta = \alpha a + \beta b$, y la desigualdad $\leq$ es cierta.

- Si $a \neq b$, sea, por ejemplo, $a > b$. Entonces

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \iff \frac{a^\alpha b^\beta}{b} \leq \alpha \frac{a}{b} + \beta \iff$$

$$\iff \frac{a^\alpha b^\beta}{b^{\alpha+\beta}} \leq \alpha \frac{a}{b} + \beta \iff \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \frac{b^\beta}{b^\beta} \leq \alpha \frac{a}{b} + \beta \iff \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \frac{a}{b} + \beta \iff$$

$$\iff \alpha \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + \beta \geq 0 \iff \alpha \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + (1-\alpha) \geq 0, \text{ pues } \alpha + \beta = 1.$$

Consideremos la función $g(x) = \alpha x - x^\alpha + (1-\alpha)$. Su derivada es

$$g'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1}) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right)$$

Entonces si $x \geq 1 \Rightarrow x^{1-\alpha} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x^{1-\alpha}} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^{1-\alpha}} \geq -1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}} \geq 0$

Como $\alpha > 0$, si $x \geq 1$, $g'(x) \geq 0$. Luego la función g es creciente para $x \geq 1$.

Si $a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$, luego $g(\frac{a}{b}) \geq g(1)$

Pero $g(1) = \alpha - 1 + (1-\alpha) = 0$. Luego $g(\frac{a}{b}) \geq 0$. Es decir

$$\alpha \frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + (1-\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \quad \text{c.s.q.d.}$$

* 2) Sean α y β números reales positivos tales que $\alpha + \beta = 1$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha \cdot |b_i|^\beta \leq \left[\sum_{i=1}^n |a_i|\right]^\alpha \cdot \left[\sum_{i=1}^n |b_i|\right]^\beta$$

Demostr.: Sea $A = \sum_{i=1}^n |a_i|$ y $B = \sum_{i=1}^n |b_i|$.

Lo que se trata de probar es equivalente a lo siguiente:

$$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha |b_i|^\beta}{A^\alpha B^\beta} \leq 1$$

Pero: $$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha |b_i|^\beta}{A^\alpha B^\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^\alpha |b_i|^\beta}{A^\alpha B^\beta} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_i|}{A}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{|b_i|}{B}\right)^\beta$$

Por el resultado *1), $\left(\frac{|a_i|}{A}\right)^\alpha \left(\frac{|b_i|}{B}\right)^\beta \leq \alpha \frac{|a_i|}{A} + \beta \frac{|b_i|}{B}$

Luego: $$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha |b_i|^\beta}{A^\alpha B^\beta} \leq \sum_{i=1}^n \left(\alpha \frac{|a_i|}{A} + \beta \frac{|b_i|}{B}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{A} \sum_{i=1}^n |a_i| + \frac{\beta}{B} \sum_{i=1}^n |b_i| = \frac{\alpha}{A} A + \frac{\beta}{B} B = \alpha + \beta = 1$$

Luego $$\frac{\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha |b_i|^\beta}{A^\alpha B^\beta} \leq 1 \quad \text{c.s.q.d.}$$

* 3) De *2) se deduce trivialmente la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}$$, siempre que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

El caso más importante es cuando $p = q = 2$.

Demostr.: $$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n |a_i||b_i| = \sum_{i=1}^n (|a_i|^p)^{1/p} (|b_i|^q)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q\right)^{1/q}$$, esta última desigualdad por *2).

* 4) <u>Desigualdad de Minkowsky</u>

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i + b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^p\right)^{1/p} \quad \text{si } p > 1.$$

Demostr.: $\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1} \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |b_i|\cdot|a_i+b_i|^{p-1} =$

$= \sum_{i=1}^{n} (|a_i|^p)^{1/p}(|a_i+b_i|^p)^{\frac{p-1}{p}} + \sum_{i=1}^{n} (|b_i|^p)^{1/p}(|a_i+b_i|^p)^{p-1/p}$

Podemos aplicar $*2)$, $\alpha = \frac{1}{p} > 0$ $\frac{p-1}{p} = \beta > 0$ pues $p>1$, y $\alpha+\beta = \frac{1}{p}+\frac{p-1}{p} = 1$.

Luego: $\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} =$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}\right]$

Entonces: $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p}{\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{1-\frac{p-1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{1/p}$. csqd.

2.1. TEOREMA: Sean $M_1 = (E_1, d_1), \ldots, M_n = (E_n, d_n)$ n espacios métricos. Sea E el conjunto producto $E_1 \times \ldots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$. Entonces:

a) Sean $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ dos elementos de E. Las aplicaciones d_∞ y d_p, como se definen debajo, son distancias en E, es decir, dotan a E de estructura de espacio métrico:

$$d_\infty : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{x},\bar{y}) \longmapsto d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = \max\{d_i(x_i,y_i) \,/\, i\in\{1,\ldots,n\}\}$$

$$d_p : E\times E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{x},\bar{y}) \longmapsto d_p(\bar{x},\bar{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i)^p\right]^{1/p}, \quad p\in\mathbb{N}.$$

b) Las distancias d_p y d_∞ son equivalentes.

c) La topología sobre E asociada a d_∞ (ó d_p, pues son equivalentes) coincide con la topología producto asociada a $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$.

Demostr: a) $*$ $d_\infty(\bar{x},\bar{y}) \geq 0$, pues $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $d_i(x_i,y_i)\geq 0$.

$d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\}, d_i(x_i,y_i)=0 \Leftrightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\}, x_i = y_i \Leftrightarrow \bar{x}=\bar{y}$.

$d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = \max_{1\leq i\leq n}\{d_i(x_i,y_i)\} = \max_{1\leq i\leq n} d_i(y_i,x_i) = d_\infty(\bar{y},\bar{x})$.

$\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in E$, $d_\infty(\bar{x},\bar{z})+d_\infty(\bar{z},\bar{y})=\max\limits_{1\le i\le n}[d_i(x_i,z_i)]+\max\limits_{1\le i\le n}[d_i(z_i,y_i)]\geq$

$\geq d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}$.

Pero $\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)\geq d_i(x_i,y_i)$

Luego $d_\infty(\bar{x},\bar{z})+d_\infty(\bar{z},\bar{y})\geq\max\limits_{1\le i\le n}d_i(x_i,y_i)=d_\infty(\bar{x},\bar{y})$.

* Las propiedades $d_p(\bar{x},\bar{y})\geq 0$, $d_p(\bar{x},\bar{y})=0\Leftrightarrow\bar{x}=\bar{y}$ y $d_p(\bar{x},\bar{y})=d_p(\bar{y},\bar{x})$ son triviales.

Probemos la desigualdad triangular: $d_p(\bar{x},\bar{y})\leq d_p(\bar{x},\bar{z})+d_p(\bar{z},\bar{y})$.

$$d_p(\bar{x},\bar{y})=\left[\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^p\right]^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^n[d_i(x_i,z_i)+d_i(z_i,y_i)]^p\right)^{1/p}\overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq\left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,z_i)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n d_i(z_i,y_i)^p\right)^{1/p}=d_p(\bar{x},\bar{z})+d_p(\bar{z},\bar{y})$$

La desigualdad (1) es cierta según la desigualdad de Minkowsky.

b) Veamos que las distancias d_p y d_∞ son equivalentes. Es suficiente probar que $\exists a,b>0$ / $a\,d_\infty(\bar{x},\bar{y})\leq d_p(\bar{x},\bar{y})\leq b\,d_\infty(\bar{x},\bar{y})$.

$$d_p(\bar{x},\bar{y})=\left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i,y_i)^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^n(\max_{1\le i\le n}d_i(x_i,y_i))^p\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^n d_\infty(\bar{x},\bar{y})^p\right)^{1/p}=\left(n\,d_\infty(\bar{x},\bar{y})^p\right)^{1/p}=\sqrt[p]{n}\,d_\infty(\bar{x},\bar{y}).$$

Luego para $b=\sqrt[p]{n}$, $d_p(\bar{x},\bar{y})\leq b\,d_\infty(\bar{x},\bar{y})$.

$$d_p(\bar{x},\bar{y})=\sqrt[p]{d_1(x_1,y_1)^p+\dots+d_n(x_n,y_n)^p}\geq$$

$$\geq\sqrt[p]{d_i(x_i,y_i)^p}=d_i(x_i,y_i),\ \forall i\in\{1,\dots,n\}.$$

Luego $d_p(\bar{x},\bar{y})\geq\max\limits_{1\le i\le n}d_i(x_i,y_i)=d_\infty(\bar{x},\bar{y})$; $(a=1)$.

Por tanto, las distancias d_p y d_∞ son equivalentes; luego inducen la misma topología $\mathcal{T}$ en $E=\prod\limits_{i=1}^n E_i$.

c) Veamos que la topología $\mathcal{T}$ que induce d_∞ (ó d_p) en E coincide con la topología producto sobre E de las topologías $\mathcal{T}_{d_i}$ inducidas por la distancia d_i en E_i: $\mathcal{T}=\prod\limits_{i=1}^n\mathcal{T}_{d_i}$

Veamos que para la distancia d_∞ las bolas son de la forma

$B(\bar{a},r)=B(a_1,r)\times\dots\times B(a_n,r)$.

Si $\bar{x}\in B(\bar{a},r)\Rightarrow d_\infty(\bar{a},\bar{x})<r\Rightarrow\max\limits_{1\le i\le n}d_i(a_i,x_i)<r\Rightarrow$

$\Rightarrow\forall i\in\{1,\dots,n\}$, $d_i(a_i,x_i)<r\Rightarrow x_i\in B(a_i,r)$, $\forall i\in\{1,\dots,n\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\bar{x}\in B(a_1,r)\times\dots\times B(a_n,r)$.

Si $\bar{x}\in B(a_1,r)\times\dots\times B(a_n,r)\Rightarrow\forall i$, $d_i(a_i,x_i)<r\Rightarrow\max\limits_{1\le i\le n}d_i(a_i,x_i)<r\Rightarrow\bar{x}\in B(\bar{a},r)$.

Las bolas abtas respecto a d_∞ constituyen una base de $\mathcal{T}$. Probemos entonces que $\forall\bar{a}\in E$, $B(\bar{a},r)$ es abto de $\prod\limits_{i=1}^n\mathcal{T}_{d_i}$

Como $B(\bar{a},r) = B(a_1,r)\times\ldots\times B(a_n,r)$, $B(\bar{a},r)$ es un producto finito de abiertos de $\mathcal{T}_{d_1},\ldots,\mathcal{T}_{d_n}$. Luego $B(\bar{a},r)\in\prod\mathcal{T}_{d_i}$.

Sea U un abto elemental de $\prod\mathcal{T}_{d_i}$:

$U = B(a_1,r_1)\times\ldots\times B(a_n,r_n)$

Veamos que U es abto de $\mathcal{T}$ viendo que es entorno de todos sus puntos.

$\bar{x}=(x_i)\in U \Rightarrow \forall i\in\{1,\ldots,n\}, \ x_i\in B(a_i,r_i)$

Pero $B(a_i,r_i)$ es abto en E_i, luego

$\forall i\in\{1,\ldots,n\}, \exists \delta_i>0 / B(x_i,\delta_i)\subset B(a_i,r_i)$

Sea $\delta = \min_{1\leq i\leq n}\delta_i>0$. Entonces $B(\bar{x},\delta) = B(x_1,\delta)\times\ldots\times B(x_n,\delta)$ es una bola abta por d_∞ que verifica que

$\bar{x}\in B(\bar{x},\delta) = B(x_1,\delta)\times\ldots\times B(x_n,\delta)\subset$

$\subset B(x_1,\delta_1)\times\ldots\times B(x_n,\delta_n)\subset B(a_1,r_1)\times\ldots\times B(a_n,r_n) = U$

Luego $\forall\bar{x}\in U$, $U\in\mathcal{V}(\bar{x})$ que prueba que $U\in\mathcal{T}$.

Luego $\mathcal{T}\leq\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_{d_i}$ $\wedge$ $\prod\mathcal{T}_{d_i}\leq\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{T}=\prod_{i=1}^n\mathcal{T}_{d_i}$. c.s.q.d.

<u>Ejemplo</u>: Bases de la topología producto sobre $\mathbb{R}^2$ son los círculos abiertos (abtos elementales respecto a d_2), los rectángulos abto (respecto a d_∞), los rombos abtos (resp. a d_1).

<u>3. Funciones de varias variables</u>

Sea $(X_i)_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos y $X=\prod_{i\in J}X_i$ el espacio producto. Sea Y otro espacio topológico. Una aplicación o función de varias variables es una aplicación $f: X=\prod X_i \longrightarrow Y$. Análogamente se definen las funciones de varias variables sobre espacios métricos.

Veamos cuando una función de varias variables $f(x_1,\ldots,x_n)$ definida sobre espacios métricos, es continua en un punto $\bar{a}=(a_i)\in\prod_{i=1}^n E_i$.

Si $f:\prod_{i=1}^n E_i\longrightarrow(F,d)$, podemos tomar en F y en $\prod E_i$ un sistema fundamental de entornos (bolas abtas) de $f(\bar{a})$ y $\bar{a}$. Entonces f continua en $\bar{a}$ sii: $\forall B(f(\bar{a}),\varepsilon), \exists B(\bar{a},\delta) / f(B(\bar{a},\delta))\subset B(f(\bar{a}),\varepsilon)$

Si en E consideramos la distancia d_∞, $B(\bar{a},\delta) = B(a_1,\delta)\times\ldots\times B(a_n,\delta)$.

Podemos escribir entonces que f continua en $\bar{a}$ sii

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / d_\infty(\bar{x},\bar{a})<\delta (\Leftrightarrow d_i(x_i,a_i)<\delta, \forall i) \Rightarrow d(f(\bar{a}),f(\bar{x}))<\varepsilon$.

En $\mathbb{R}^2$ sería:

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ continua en $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \left.\begin{matrix}|x-x_0|<\delta\\ |y-y_0|<\delta\\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\end{matrix}\right\} \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

Si en lugar de la d_∞ utilizamos la distancia d_2, sería:

f continua en $(x_0,y_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0 / \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$.