TEMA 7º: ESPACIOS SEPARADOS O DE HAUSDORF

1. Definición

* Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice que es un espacio separado, de Hausdorf o un espacio T_2 si verifica el axioma $\boxed{H}$ de separación de Hausdorf:

$\boxed{H}$ $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists U \in V(x) \wedge \exists V \in V(y) \,/\, U \cap V = \emptyset$.

Ejemplos: ① Todo espacio métrico es separado, según se probó en el tema 2º. En particular, $\mathbb{R}^n$ es un espacio separado.

② Todo espacio topológico discreto es separado, pues
$\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = \emptyset$
Siendo $\{x\}$ e $\{y\}$ abtos se deduce que $\{x\} \in V(x) \wedge \{y\} \in V(y)$.
Luego se verifica $\boxed{H}$

③ $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es separado, pues la intersección de dos abtos cualesquiera, no vacios, es no vacía, ya que si
$A \cap B = \emptyset$, A y B abtos $\Rightarrow \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B = \mathbb{R}$, lo cual es absurdo pues si A y B son abtos, $\complement A$ y $\complement B$ son finitos, y, por tanto, la unión es finita.

* **1.1. TEOREMA**: (de caracterización de espacios separados).

Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico separado.

b) $\forall x \in X$, la intersección de todos los entornos cerrados de x es $\{x\}$. es decir, $\bigcap_{V \in V_c(x)} V = \{x\}$

c) La diagonal $\Delta = \{(x,y) \in X^2 \,/\, x = y\}$ es un cerrado de X^2.

Demostr.: $\boxed{a) \Leftrightarrow b)}$ a) $\Rightarrow$ b)] Sean x e y dos puntos distintos de X.
Probemos que $\exists U \in V_c(x) \,/\, y \notin U$

$x \neq y \Rightarrow \exists W \in V(x) \wedge \exists V \in V(y) \,/\, W \cap V = \emptyset$

Como $V \in V(y) \wedge V \cap W = \emptyset \Rightarrow y \notin \overline{W}$, pues si $y \in \overline{W}$ todo entorno de y cortaría a W.

Si $W \in V(x)$, como $W \subset \overline{W}$, $\overline{W} \in V(x)$. Además $\overline{W}$ es cerrado, luego $\overline{W} \in V_c(x)$. Haciendo $U = \overline{W}$ queda probado que $\exists U \in V_c(x) \,/\, y \notin U$.

Entonces $y \notin \bigcap_{V \in V_c(x)} V$, pues $U \in V_c(x)$ e $y \notin U$.

Luego $\forall y \in X$, $y \neq x \Rightarrow y \notin \bigcap_{V \in V_c(x)} V$. Luego $\bigcap_{V \in V_c(x)} V = \{x\}$

b) ⇒ a)] Por hipótesis $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_c(x)} V = \{x\}$

Luego si $y \neq x$, $y \notin \{x\} \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}_c(x) / y \notin U = \overline{U}$

Si $y \notin \overline{U}$, $\exists\, V \in \mathcal{V}(y) / V \cap U = \emptyset$.

Luego $\forall x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists\, V \in \mathcal{V}(y) / U \cap V = \emptyset$.

$\boxed{a) \Leftrightarrow c)}$ a) ⇒ c)] Probemos que si X es separado, $\complement\Delta$ es un abto de $X \times X$.

$\forall (x,y) \in \complement\Delta \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists\, V \in \mathcal{V}(y) / U \cap V = \emptyset$.

$(x,y) \in U \times V$. Veamos $U \times V \subset \complement\Delta$

Supongamos que $\exists\, z \in X / (z,z) \in U \times V$.

Entonces $z \in U \wedge z \in V \Rightarrow z \in U \cap V$. Contra la hipótesis de que $U \cap V = \emptyset$.

Luego $\Delta \cap U \times V = \emptyset \Rightarrow U \times V \subset \complement\Delta$

Como $U \times V \in \mathcal{V}((x,y))$, $(x,y) \in \overset{\circ}{\complement\Delta}$, $\forall (x,y) \in \complement\Delta$. Luego $\complement\Delta$ es abto y, por tanto, Δ es cerrado.

c) ⇒ a)] Si Δ es cerrado $\Rightarrow \complement\Delta$ es abto

Luego $\forall (x,y) \in \complement\Delta$, $\exists\, U \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists\, V \in \mathcal{V}(y) / (x,y) \in U \times V \subset \complement\Delta$

Entonces $\forall x, y \in X$, si $x \neq y \Rightarrow (x,y) \in \complement\Delta$

Luego $\exists\, U \times V \in \mathcal{V}((x,y)) / (x,y) \in U \times V \subset \complement\Delta$

Veamos que $U \cap V = \emptyset$

Sea $z \in U \cap V \Rightarrow z \in U \wedge z \in V \Rightarrow (z,z) \in U \times V \Rightarrow$
$\Rightarrow (z,z) \in \complement\Delta$, lo cual es absurdo pues $(z,z) \in \Delta \Rightarrow (z,z) \notin \complement\Delta$.

Luego $U \cap V = \emptyset$. csqd.

<u>CONSECUENCIAS</u>: ① Todo punto en un espacio separado es cerrado, pues según b), $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_c(x)} V$, es decir, $\{x\}$ es una intersección de cerrados, y, por tanto, cerrado.

② Todo conjunto finito en un espacio de Hausdorff es cerrado, como unión finita de cerrados

<u>1.2. PROPOSICION</u>: Todo subespacio de un espacio separado es separado.

Demostr.: Sea $A \subset X$ un subespacio de X.

Siendo X separado, $\forall x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow x, y \in X \wedge x \neq y \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists\, V \in \mathcal{V}(y) / U \cap V = \emptyset$.

Sea $U_A = U \cap A \in \mathcal{V}_A(x) \wedge V_A = V \cap A \in \mathcal{V}_A(y)$.

Entonces $U_A \cap V_A = (U \cap V) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset$

Luego $\exists\, U_A \in \mathcal{V}_A(x) \wedge \exists\, V_A \in \mathcal{V}_A(y) / U_A \cap V_A = \emptyset$

Luego A es separado. csqd.

1.3. PROPOSICIÓN: Sea $(X_i)_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $X=\prod_{i\in J} X_i$ es separado sii $\forall i\in J$, X_i es separado.

Demostr.: $\boxed{\Leftarrow}$ Sean $\overline{x}=(x_i)$ e $\overline{y}=(y_i)$ elementos distintos de X.
Entonces $\exists K\in J \,/\, x_K\neq y_K$.
Siendo X_K un espacio separado, por hipótesis
$\exists U_K\in \mathcal{V}(x_K) \wedge \exists V_K\in\mathcal{V}(y_K) \,/\, U_K\cap V_K=\emptyset$.
Consideremos los entornos de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ siguientes:
$U=\prod_{i\in J} W_i$, con $W_i=X_i$ si $i\neq K$ y $W_K=U_K$

$V=\prod_{i\in J} N_i$, con $N_i=X_i$ si $i\neq K$ y $N_K=V_K$

$U\cap V=\emptyset$ pues $U\cap V=\prod_{i\in J} W_i\cap\prod_{i\in J} N_i=\prod_{i\in J}(W_i\cap N_i)=\emptyset$

ya que $W_K\cap N_K=\emptyset$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Hemos de probar que $\forall K\in J$, X_K es separado.
De modo análogo a la PROPOSICION 1.6 del Tema 6º se prueba que
$X_K\times\prod_{i\neq K}\{a_i\}$ es homeomorfo a X_K

siendo $\{a_i / i\neq K\}$ un conjunto fijo de elementos de los X_i, $i\neq K$.
Sea $h: X_K\times\prod_{i\neq K}\{a_i\}\longrightarrow X_K$, este homeomorfismo.

Sean x_K e y_K dos elementos distintos de X_K. Entonces, siendo h biyectiva
$\exists \overline{a},\overline{b}\in X_K\times\prod_{i\neq K}\{a_i\}$, $\overline{a}\neq\overline{b} \,/\, h(\overline{a})=x_K \wedge h(\overline{b})=y_K$

Siendo X separado, $\exists U\in\mathcal{V}(\overline{a}) \wedge \exists V\in\mathcal{V}(\overline{b}) \,/\, U\cap V=\emptyset$.
U y V son entornos de $\overline{a}$ y $\overline{b}$ en el subespacio $X_K\times\prod_{i\neq K}\{a_i\}$ que es separado, pues X es separado.
Siendo h homeomorfismo, $h(U)\in\mathcal{V}(x_K) \wedge h(V)\in\mathcal{V}(y_K)$ y además
$h(U)\cap h(V)=h(U\cap V)=\emptyset$. Luego X_K es separado, $\forall K\in J$. c.s.q.d.

1.4. PROPOSICION: Sean X e Y dos espacios topológicos, Y espacio separado. Sean f y g dos aplicaciones continuas de X en Y. Entonces el conjunto $\{x\in X / f(x)=g(x)\}$ es cerrado en X.

Demostr.: Consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} h: X &\longrightarrow Y\times Y \\ x &\longmapsto (f(x),g(x))=h(x)\end{aligned}$$

h es continua, pues $pr_1\circ h=f$ es continua y $pr_2\circ h=g$ también lo es.
Si Δ es la diagonal de $Y\times Y$, por ser Y separado, Δ es cerrado.
Luego $h^{-1}(\Delta)=\{x\in X / h(x)\in\Delta\}=\{x\in X / f(x)=g(x)\}$ es cerrado.

pues h es continua, csqd.

1.5. COROLARIO: Principio de prolongación de identidades.

Sea X un espacio topológico e Y un espacio separado. Sean f y g dos aplicaciones de X en Y continuas. Supongamos que existe un conjunto denso D en X tal que $\forall x \in D$, $f(x) = g(x)$, entonces $f(x) = g(x)$, $\forall x \in X$.

Demostr.: El conjunto $F = \{x \in X / f(x) = g(x)\}$ es cerrado.
Evidentemente, $D \subset F$. Entonces $\overline{D} \subset \overline{F} = F$.
Si D es denso, $\overline{D} = X$. Luego $X \subset F$. Además $F \subset X$. Luego $F = X$.
Luego $\forall x \in X$, $x \in F \Rightarrow \forall x \in X$, $f(x) = g(x)$.

1.6. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico y f y g dos aplicaciones continuas de X en $\mathbb{R}$. Entonces

a) $\{x \in X / f(x) = g(x)\}$ es cerrado.
b) $\{x \in X / f(x) \neq g(x)\}$ es abto.
c) $\{x \in X / f(x) > g(x)\}$ es abto
d) $\{x \in X / f(x) \geq g(x)\}$ es cerrado.

Demostr.: a) Trivial, por la proposición 1.4, ya que $\mathbb{R}$ es separado.
b) $\{x \in X / f(x) \neq g(x)\}$ es abto pues es el complementario del conjunto de a).
c) Sea $A = \{x \in X / f(x) > g(x)\} = \{x \in X / (f-g)(x) > 0\}$
Si f y g son continuas, entonces $f-g$ es continua, pues:
f continua en $x_0 \in X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{V}(x_0) / x \in U \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$
g continua en $x_0 \in X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / x \in V \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2$
Luego $\forall \varepsilon > 0, \exists W = U \cap V \in \mathcal{V}(x_0) / x \in W \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in U \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2 \\ x \in V \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon/2 \end{array} \right\} \Rightarrow |(f-g)(x) - (f-g)(x_0)| =$$

$$= |f(x) - f(x_0) - g(x) + g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x_0) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Entonces $A = (f-g)^{-1}(]0, +\infty[)$ es abto de X, pues $]0, +\infty[$ es abto en $\mathbb{R}$.

d) $B = \{x \in X / f(x) \geq g(x)\} = \{x \in X / (f-g)(x) \geq 0\}$
Pero $B = (f-g)^{-1}([0, +\infty[)$. Siendo $[0, +\infty[$ cerrado en $\mathbb{R}$ y $f-g$ continua, se deduce que B es cerrado de X. csqd.

Consecuencia: $\{x \in X / f(x) > c \in \mathbb{R}\}$ es abto. Basta hacer $g(x) = c$, $\forall x \in X$ que es una aplicación constante y, por tanto, continua.

1.7. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico separado y $\{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito de puntos de X. Entonces existen entornos $V_1, \dots, V_n$ de $x_1, \dots, x_n$, respectivamente, disjuntos dos a dos.

Demostr.: Procederemos por inducción sobre n.
Si $n = 2$, el teorema es trivial, pues X es separado.

Supongamos que existen entornos $W_1, \ldots, W_{n-1}$ entornos de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ disjuntos dos a dos. Veamos que también se verifica para n. Sea x_n un punto de X distinto de $x_1, \ldots, x_{n-1}$

Para cada $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $\exists H_i \in \mathcal{V}(x_i) \wedge \exists N_i \in \mathcal{V}(x_n) / H_i \cap N_i = \phi$.

Tomemos, entonces, $V_i = H_i \cap W_i \in \mathcal{V}(x_i)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

y $V_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} N_i \in \mathcal{V}(x_n)$

$V_1, \ldots, V_{n-1}$ son disjuntos dos a dos, pues $V_i \cap V_j =$
$= (H_i \cap W_i) \cap (H_j \cap W_j) = (H_i \cap H_j) \cap (W_i \cap W_j) = \phi$ si $i \neq j$, pues $W_i \cap W_j = \phi$, por hipótesis de inducción.

Además, V_n es disjunto con $V_1, \ldots, V_{n-1}$, pues si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$,
$V_i \cap V_n = (W_i \cap H_i) \cap (\bigcap_{j=1}^{n-1} N_j) = \phi$, pues $H_i \cap N_i = \phi$. c.s.q.d.

<u>1.8. COROLARIO</u>: Todo espacio finito y separado es discreto.

- La demostración es trivial si tenemos en cuenta, por el teorema anterior, que cada punto es aislado.