TEMA 8º: LIMITES DE APLICACIONES. SUCESIONES.

1. Concepto de límite

DEFINICIÓN: Sean X e Y espacios topológicos, A un subespacio de X y x_0 un punto de acumulación de A. Sea $f: A \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que un punto l de Y es valor límite de f en x_0 si se verifica que

$$\forall U \in \mathcal{V}(l), \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / f(V^* \cap A) \subset U$$

siendo $V^* = V - \{x_0\}$

La condición de que $x_0 \in A'$ es para garantizar que $V^* \cap A \neq \emptyset$.

- En espacios métricos la definición queda así:

Sean $M = (E, d)$ y $M' = (E', d')$ dos espacios métricos, A un subespacio de E y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff [\forall B(l, \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) / f(B^*(x_0, \delta)) \subset B(l, \varepsilon)]$$

Y también, por definición de bola:

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff [\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \underset{x \in A, x \neq x_0}{d(x, x_0)} < \delta \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon].$$

OBSERVACION: Téngase en cuenta que en un espacio topológico el límite de una función no tiene porque ser único, por eso se utilizará, cuando se hable de límites en espacios topológicos, la notación $l \in \lim_{x \to x_0} f(x)$

Sin embargo, en espacios métricos, como se probará después, el límite es único; por eso se puede escribir $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

1.1. PROPOSICION: Sean X e Y espacios topológicos, A un subconjunto de X y $f: A \longrightarrow Y$ una aplicación. Supongamos que B es un subconjunto de A y x_0 un punto de acumulación de B. Entonces si $l \in \lim_{x \to x_0, x \in A} f(x)$ se tiene que $l \in \lim_{x \to x_0, x \in B} f(x)$

Demostr.: Si $l \in \lim_{x \to x_0, x \in A} f(x) \overset{df}{\Rightarrow} \forall U \in \mathcal{V}(l), \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / f(V^* \cap A) \subset U$

Si $x_0 \in B'$ entonces $V^* \cap B \neq \emptyset$. Ademas $V^* \cap B \subset V^* \cap A$.

Luego $f(V^* \cap B) \subset f(V^* \cap A) \subset U$

Luego $l \in \lim_{x \to x_0, x \in B} f(x)$. c.s.q.d.

El recíproco, en general, no es cierto.

1.2. PROPOSICION: Sea $f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces si existe $l = \lim_{x \to x_0} f(x)$, existe y los límites $\lim_{x\to x_0,\, x>x_0} f(x)$ y $\lim_{x\to x_0,\, x<x_0} f(x)$ y coinciden con l.

Demostr.: Es suficiente considerar el subespacio $B=\{x\in A / x>x_0\}$ y $(x<x_0)$ de A y aplicar el teorema anterior.

<u>1.3. PROPOSICIÓN</u>: Sean X un espacio topológico, Y un espacio separado, A un subespacio de X, $f: A \to Y$ una aplicación y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, es único.

Demostr.: Supongamos que l y l' son dos límites distintos de f en x_0. Siendo Y espacio de Hausdorf

$$\exists\, \mathcal{U}(l) \in \mathcal{V}(l) \wedge \exists\, \mathcal{U}(l') \in \mathcal{V}(l') / \mathcal{U}(l) \cap \mathcal{U}(l') = \emptyset$$

Por ser l límite, $\exists V_1 \in \mathcal{V}(x_0) / f(V_1^* \cap A) \subset \mathcal{U}(l)$

Por ser l' límite, $\exists V_2 \in \mathcal{V}(x_0) / f(V_2^* \cap A) \subset \mathcal{U}(l')$

tomemos $V = V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x_0)$

Siendo $x_0 \in A'$, $V^* \cap A \neq \emptyset$. Luego $f(V^* \cap A) \neq \emptyset$.

Además $V^* \subset V_1^* \Rightarrow V^* \cap A \subset V_1^* \cap A \Rightarrow f(V^* \cap A) \subset f(V_1^* \cap A) \subset \mathcal{U}(l)$

y también $V^* \subset V_2^* \Rightarrow V^* \cap A \subset V_2^* \cap A \Rightarrow f(V^* \cap A) \subset f(V_2^* \cap A) \subset \mathcal{U}(l')$

Luego $f(V^* \cap A) \subset \mathcal{U}(l) \cap \mathcal{U}(l')$

lo cual es absurdo pues $\mathcal{U}(l) \cap \mathcal{U}(l') = \emptyset$.

Luego el límite debe ser único. csqd.

<u>1.4. COROLARIO</u>: Sean E y F dos espacios métricos, A un subespacio de E, $f: A \to F$ una aplicación y $x_0 \in A'$. Entonces si existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, es único.

Es suficiente considerar que todo espacio métrico es separado.

<u>1.5. TEOREMA</u>: Sean $M=(E,d)$ y $M_1=(F,d_1)$ dos espacios métricos. Sea A un subespacio de E y x_0 un punto de acumulación de A perteneciente a A. Sea $f: A \to F$ una aplicación. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que f sea continua en x_0 es que exista $\lim_{x\to x_0} f(x)$ y coincida con $f(x_0)$.

Demostr. $\Rightarrow$ | Si f es continua en x_0, entonces

$$\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{V}(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / f(V \cap A) \subset \mathcal{U}$$

Siendo $V^* \cap A \subset V \cap A$, $f(V^* \cap A) \subset f(V \cap A) \subset \mathcal{U}$

Luego $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

$\Leftarrow$ | Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Entonces $\forall\, \mathcal{U} \in \mathcal{V}(f(x_0)),\ \exists V \in \mathcal{V}(x_0) / f(V^* \cap A) \subset \mathcal{U}$

Además como $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f(x_0) \in \mathcal{U}$. Luego $f(V \cap A) \subset \mathcal{U}$

Por tanto, f es continua en x_0. c.s.q.d.

OBSERVACION: El concepto de límite lo hemos definido para puntos de acumulación. Si x_0 es un punto aislado se define

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si x_0 es aislado, f es continua en x_0, pues

x_0 aislado $\Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \,/\, V \cap A = \{x_0\}$. Luego:

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(f(x_0)), \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \,/\, f(V \cap A) = \{f(x_0)\} \subset \mathcal{U}$

pues si $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f(x_0) \in \mathcal{U}$.

2. SUCESIONES.

DEF: Sea X un espacio topológico. Una sucesión en X es una aplicación φ de $\mathbb{N}$ en X que a cada natural n le asocia un punto x_n de X:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto \varphi(n) = x_n \end{aligned}$$

DEFINICION: Subsucesión o sucesión parcial.

Sea h una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente. Una subsucesión de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la aplicación $\varphi \circ h : \mathbb{N} \to X$.

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\xrightarrow{h} \mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} X \\ k &\longrightarrow i_k \longrightarrow x_{i_k} \end{aligned}$$

La sucesión parcial $\varphi \circ h$ la representaremos por $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

El hecho de que h sea estrictamente creciente indica que

$\forall k, p \in \mathbb{N}, \quad k > p \Rightarrow i_k > i_p$.

Si $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\forall k \in \mathbb{N}, \; k \leq i_k$. Lo probaremos por inducción.

Evidentemente, si $k = 1$, como $i_1 \in \mathbb{N}$, $1 \leq i_1$.

Probemos que si $i_k \geq k$ entonces $i_{k+1} \geq k+1$.

Siendo $k < k+1$ se tiene que $i_k < i_{k+1}$.

Por tratarse de números naturales $i_k < i_{k+1} \Rightarrow i_k + 1 \leq i_{k+1}$.

Entonces $k \leq i_k \Rightarrow k+1 \leq i_k + 1 \leq i_{k+1}$. c.s.q.d.

3. Sucesiones convergentes

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de un espacio topológico X. Se dice que $(x_n)_n$ converge hacia "a" $\in X$ o que $a \in \lim_{n\to\infty} x_n$ (*) si se verifica que:

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(a), \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in \mathcal{U}$.

(*) [illegible]

Para un espacio métrico $M=(E,d)$, la definición de convergencia de una sucesión queda como sigue:

$((x_n)_n \to a\in E) \iff (\forall B(a,\varepsilon), \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in B(a,\varepsilon)) \iff$
$\iff (\forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a)<\varepsilon)$.

3.1. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico separado y $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de X. Entonces si existe $\lim_{n\to\infty} x_n$, es único.

Demostr.: Supongamos que $(x_n)_n$ converge hacia dos puntos distintos de X, a y a'. Entonces:

$\forall U\in \mathcal{V}(a), \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in U$

$\forall U'\in \mathcal{V}(a'), \exists n_0'\in\mathbb{N} / n\geq n_0' \Rightarrow x_n\in U'$

Siendo X separado, si $a\neq a' \Rightarrow \exists V\in\mathcal{V}(a) \wedge \exists V'\in\mathcal{V}(a') / V\cap V'=\emptyset$.

Si $V\in\mathcal{V}(a)$, $\exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in V$

Si $V'\in\mathcal{V}(a')$, $\exists n_0'\in\mathbb{N} / n\geq n_0' \Rightarrow x_n\in V'$

Sea $N=\max(n_0,n_0')$.

Entonces si $n\geq N \Rightarrow \left.\begin{matrix} n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in V \\ n\geq n_0' \Rightarrow x_n\in V'\end{matrix}\right\} \Rightarrow x_n\in V\cap V'$

lo cual es absurdo pues $V\cap V'=\emptyset$. Luego el límite, de existir, es único.

3.2. PROPOSICION: Si una sucesión $(x_n)_n$ es convergente hacia $a\in X$ entonces toda subsucesión $(x_{i_k})_k$ converge hacia $a\in X$.

Demostr.: Si $(x_n)_n \to a\in X$, $\forall V\in\mathcal{V}(a), \exists n_0\in\mathbb{N} / n\geq n_0 \Rightarrow x_n\in V$.

Dado $n_0\in\mathbb{N}$, si $k\geq n_0 \Rightarrow i_k\geq i_{n_0}\geq n_0$.

Luego, $\forall V\in\mathcal{V}(a), \exists n_0\in\mathbb{N} / k\geq n_0 \Rightarrow i_k\geq n_0 \Rightarrow x_{i_k}\in V$.

Por tanto, $(x_{i_k})_k \to a$. csqd.

4. Valor de adherencia de una sucesión

DEF: Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X. Diremos que un punto $b\in X$ es valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si se verifica

$\forall U\in\mathcal{V}(b) \wedge \forall k\in\mathbb{N}, \exists n>k / x_n\in U$. (*)

4.1. PROPOSICION: Si $(x_n)_n$ es una sucesión de puntos de X que converge hacia un punto $a\in X$, entonces a es el único valor de adherencia de $(x_n)_n$.

4.2. PROPOSICION: Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X y $(x_{n_k})_k$ una subsucesión de $(x_n)_n$. Entonces, si $(x_{n_k})_k \to a \in X$, a es valor de adherencia de $(x_n)_n$.

(El recíproco no es cierto en cualquier espacio topológico).

Demostr.: Si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$ se tiene, por definición, que

$$\forall U \in \mathcal{V}(a),\ \exists K_0' \in \mathbb{N} \,/\, K \geq K_0' \Rightarrow x_{n_K} \in U$$

Siendo la sucesión $(n_k)_k$ en $\mathbb{N}$ estrictamente creciente se tiene que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists K_0'' \in \mathbb{N} \,/\, n_{K_0''} \geq n.$$

Sea $K_0 = \max(K_0', K_0'')$; entonces

$$\forall U \in \mathcal{V}(a) \wedge \forall n \in \mathbb{N},\ \exists m = n_{K_0} \geq n \,/\, x_m \in U,$$

pues $(K_0 \geq K_0' \Rightarrow x_{n_{K_0}} \in U) \wedge (K_0 \geq K_0'' \Rightarrow n_{K_0} \geq n_{K_0''} \geq n)$.

Luego, a es un valor de adherencia de la sucesión $(x_n)_n$. csqd.

4.3. PROPOSICION: Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de E. Entonces a es valor de adherencia de (x_n) si y solo si existe una sucesión parcial $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_n$ que converge hacia a.

Demostr.: S $\Leftarrow$ La condición suficiente es trivial, por la proposición anterior, ya que todo espacio métrico es un espacio topológico.

N $\Rightarrow$ Si a es valor de adherencia de $(x_n)_n$ se tiene que

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \wedge \forall n \in \mathbb{N},\ \exists K \geq n \,/\, x_K \in V.$$

Las bolas abtas de centro a constituyen un sistema fundamental de entornos de a, que además, podemos tomar numerable, cogiendo radios de la forma $1/n$.

Consideremos la bola $B(a,1)$, entonces

$$\exists i_1 \in \mathbb{N} \,/\, x_{i_1} \in B(a,1).$$

Para la bola $B(a, 1/2)$, podemos tomar un $i_2 \in \mathbb{N}$ tal que $i_2 \geq i_1 + 1$ y, de modo que $x_{i_2} \in B(a, 1/2)$

Análogamente, para la bola $B(a, 1/k)$

$$\exists i_K \geq i_{K-1} + 1 \,/\, x_{i_K} \in B(a, 1/k).$$

Hemos construido así una subsucesión $(x_{i_k})_k$ de (x_n), pues $i_1 < \dots < i_K < \dots$

Además se verifica que

$$(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow a$$

pues $\forall k \in \mathbb{N},\ x_{i_k} \in B(a, 1/k) \Rightarrow d(x_{i_k}, a) < \frac{1}{k},\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Luego como $\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_0 \in \mathbb{N} \,/\, \frac{1}{K_0} \leq \varepsilon$ se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_0 \in \mathbb{N} \,/\, K \geq K_0 \Rightarrow d(x_{i_K}, a) < \frac{1}{K} \leq \frac{1}{K_0} \leq \varepsilon. \text{ csqd.}$$

OBSERVACION: Esta demostración la hemos podido hacer pues en un espacio métrico cada punto posee un SFE numerable. A los espacios que verifican esta propiedad se les dice

4.4. PROPOSICION: Sea (x_n) una sucesión en un espacio topológico X. Entonces el conjunto $F = \{x \in X / x$ es valor adherente de $(x_n)\}$ es cerrado.

Demostr.: Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar el conjunto

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$$

Si a es un valor adherente de (x_n) se tiene que

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(a) \wedge \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n / x_k \in \mathcal{U}$.

Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{A_n}$, pues si $x_k \in \mathcal{U} \wedge k \geq n \Rightarrow x_k \in \mathcal{U} \cap A_n$

Luego $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(a)$, $\mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset$, y esto para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces:

$(x \in F) \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x), \exists k \geq n / x_k \in \mathcal{U}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N} \wedge \forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x), \mathcal{U} \cap A_n \neq \emptyset) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, \ x \in \overline{A_n}) \Leftrightarrow (x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n})$

Luego $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$, es un cerrado, como intersección de cerrados. csqd.

4.5. PROPOSICION: Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico y A una parte de E. La condición necesaria y suficiente para que un punto $x \in E$ sea adherente a A es que existe una sucesión de puntos de A que converja hacia x.

Demostr.: N] $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

Entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A / d(x, x_n) < \frac{1}{n}$, pues $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$

Consideremos la sucesión (x_n) de puntos de A.

Además $(x_n)_n \to x$, pues

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Entonces:

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

S] Sea (x_n) una sucesión en A que converge hacia x.

$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in V$.

Como además $x_n \in A$, se deduce que:

$\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A \neq \emptyset$. Luego $x \in \overline{A}$. csqd.

4.6. PROPOSICION: Sea $M = (E, d)$ y A una parte de E. Entonces $x \in E$ es un punto de acumulación de A si y solo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de A, distintos dos a dos, tal que $(x_n) \to x$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si $x \in A' \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap A - \{x\}$ es infinito.

Consideremos la bola $B(x, 1)$: Entonces

$\exists x_1 \in B(x, 1) \cap A - \{x\}$

Para la bola $B(x, 1/2)$ tenemos que

$\exists x_2 \in B(x, \frac{1}{2}) \cap A - \{x, x_1\}$

Lo podemos tomar distinto de x_1, pues $B(x, \frac{1}{2}) \cap A$ es infinito.

Así sucesivamente

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A - \{x, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$

Luego hemos construido una sucesión (x_n) de puntos de A distintos dos a dos, tal que $(x_n) \to x$, pues $\forall n \in \mathbb{N}$, $d(x, x_n) < 1/n$.

$\Leftarrow$] Trivial.