TEMA 9º: ESPACIOS REGULARES

1. Definición. Caracterización de Espacios Regulares

DEFINICION: Un espacio topológico $(X,\mathcal{T})$ se dice que es regular si verifica que es separado y satisface el axioma siguiente:
"Dado un punto $x\in X$ y un cerrado F tal que $x\notin F$, existe un entorno U de x y un entorno V de F, (*), que son disjuntos"

$\boxed{\text{I}}$ $(X \text{ regular}) \overset{def}{\iff} \begin{cases}(\forall x\in X \wedge \forall F \text{ cerrado de } X,\ x\notin F \Rightarrow \exists U\in\mathcal{V}(x) \wedge \exists V\in\mathcal{V}(F) / U\cap V=\emptyset). \\ X \text{ separado.}\end{cases}$

1.1. TEOREMA: Un espacio topológico separado $(X,\mathcal{T})$ es regular si y solo si para cualquier $x\in X$, los entornos cerrados de x constituyen un sistema fundamental de entornos de x.

Demostr.: $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $V'\in\mathcal{V}(x)$. Vamos a probar que si X es regular existe un entorno cerrado U de x tal que $U\subset V'$

Si $V'\in\mathcal{V}(x)$, $\exists V$ abto de X / $x\in V\subset V'$.

Si V es abierto, $\complement V$ es cerrado y verifica que $x\notin\complement V$, pues $x\in V$.

Entonces $\exists W\in\mathcal{V}(x) \wedge \exists T\in\mathcal{V}(\complement V) / W\cap T=\emptyset$.

No hay ningún problema en considerar T abierto, pues si T no fuese abierto contendría un abierto O que contiene a $\complement V$ y tomaríamos O como T.

$T\in\mathcal{V}(\complement V) \Rightarrow \complement V\subset T \Rightarrow \complement T\subset V$

Además $T\cap W=\emptyset \Rightarrow W\subset\complement T$. Como $W\in\mathcal{V}(x)$, $x\in W\subset\complement T$

Por tanto, $\complement T$ es un entorno de x, y, además, es cerrado pues T es abierto, y se tiene que $\complement T\subset V\subset V'$.

Luego $\forall V'\in\mathcal{V}(x)$, $\exists U=\complement T\in\mathcal{V}_c(x) / U\subset V'$, lo que prueba que $\mathcal{V}_c(x)$ constituye un SFE del punto x, para cada $x\in X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea F un cerrado cualquiera de X, y x un punto de X tal que $x\notin F$. Probemos que si $\mathcal{V}_c(x)$ es SFE de x, $\forall x\in X$, entonces X es regular.

Si $x\notin F \Rightarrow x\in\complement F$ abto $\Rightarrow \complement F\in\mathcal{V}(x)$.

Siendo $\mathcal{V}_c(x)$ SFE de X, $\exists U\in\mathcal{V}_c(x) / U\subset\complement F$.

Luego, $F\subset\complement U$ abto $\Rightarrow \complement U\in\mathcal{V}(F)$.

Luego $U\in\mathcal{V}(x) \wedge \complement U\in\mathcal{V}(F)$ y además $U\cap\complement U=\emptyset$.

Por tanto X es regular. c.s.q.d.

(*) $V\in\mathcal{V}(F) \overset{def}{\iff} \exists O\in\mathcal{T} / F\subset O\subset V$

1.2. PROPOSICION: Todo espacio métrico es regular.

Demostr.: Se demostró en TEMA 2 que todo espacio métrico es separado. Probemos que verifican el axioma $\boxed{I}$. Para ello utilizaremos el teorema de caracterización de espacios regulares dado anteriormente, es decir, probaremos que cada bola abta de centro un punto cualquiera $a \in E$ contiene a un entorno cerrado de a. ($M=(E,d)$ es el espacio métrico).

Sea $B(a,r)$ una bola genérica de centro el punto $a \in E$.

Consideremos la bola cerrada $B'(a, r/2)$. Esta bola es un entorno cerrado de a, trivialmente, y además, se verifica que:

$B'(a, r/2) \subset B(a,r)$, pues

$\forall x \in B'(a, r/2) \Rightarrow d(a,x) \leq \frac{r}{2} < r \Rightarrow x \in B(a,r)$. c.s.q.d.

EJEMPLO: ① La recta real, como espacio métrico, es regular.

- Todos los espacios topológicos no son regulares; sirve de contraejemplo $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, que, como vimos en el TEMA 7º, no es un espacio separado.

1.3. PROPOSICION: Todo subespacio de un espacio topológico regular es regular.

Demostr.: Sea $(A, \mathcal{T}_A)$ un subespacio del espacio regular $(X, \mathcal{T})$. Sea $x \in A$.

Entonces $\forall V_A \in \mathcal{V}_A(x)$, $\exists V \in \mathcal{V}(x) / V_A = V \cap A$.

Siendo X regular, si $V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}_c(x) / W \subset V$

Si W es cerrado de X, $W_A = W \cap A$ es un cerrado de A y además $W_A \in \mathcal{V}(x)$, y se tiene que:

$W_A = W \cap A \subset V \cap A = V_A$.

Luego A es regular. c.s.q.d.

1.4. PROPOSICION: Un producto no vacío de espacios topológicos es regular si y solo si cada espacio coordenada es regular.

Es decir, si $X = \prod_{i \in J} X_i$

X regular $\Longleftrightarrow$ $\forall i \in J$, X_i es regular.

Demostr.: $\overset{N}{\Longrightarrow}$ La regularidad es una propiedad topológica, pues la hemos definido en términos de entornos. Por tanto, los homeomorfismos conservan la regularidad.

Sea $\bar{a} = (a_i) \in X = \prod_{i \in J} X_i$.

El conjunto, $A = X_k \times \prod_{i \neq k} \{a_i\}$ es un subespacio de X homeomor-

fo a X_K, para todo $K \in J$.
Como X es regular, A es regular. Luego X_K, por ser homeomorfo a A, es regular.

$\overset{S}{\Leftarrow}$] Supuesto que $\forall i \in J$, X_i es regular, probemos que $X = \prod_{i \in J} X_i$ es regular.

Sea $\bar{x} = (x_i)$ un punto genérico de X. Probaremos que cada abierto elemental que contiene a $\bar{x}$ contiene un entorno cerrado de $\bar{x}$, ya que los abtos elementales que contienen a $\bar{x}$ constituyen un SFE de $\bar{X}$.
Sea $\mathcal{U} = \prod_{i \in J} \mathcal{U}_i$ abto elemental tal que $\bar{x} \in \mathcal{U}$.

$\mathcal{U}$ sera de la forma, $\mathcal{U}_i = X_i$ excepto para un nº finito de índices $i_1, \ldots, i_n$, para los cuales $\mathcal{U}_{i_r}$ son abtos de X_{i_r}. Entonces $\mathcal{U}_{i_r} \in \mathcal{V}(x_{i_r})$.
Como los espacios coordenadas X_i son regulares, los entornos cerrados de un punto constituyen un SFE de dicho punto. Luego:
$\exists V_{i_1} \in \mathcal{V}_c(x_{i_1}) / x_{i_1} \in V_{i_1} \subset \mathcal{U}_{i_1}, \ldots, \exists V_{i_n} \in \mathcal{V}_c(x_{i_n}) / x_{i_n} \in V_{i_n} \subset \mathcal{U}_{i_n}$.

Consideremos, entonces, el producto:
$W = \prod_{i \in J} W_i$ con $W_i = X_i$ si $i \in J - \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $W_{i_r} = V_{i_r}$, $\forall r \in \{1, \ldots, n\}$.

Entonces $W \in \mathcal{V}(\bar{x})$, segun proposición 1.1. (Tema 6º).
Además $W \subset \mathcal{U}$, pues $\forall i \in J$, $W_i \subset \mathcal{U}_i$.
Queda probar que W es cerrado, pero esto es trivial, pues $\forall i \in J$, W_i es cerrado, luego $\prod_{i \in J} W_i$ es cerrado (Ver COROLARIO 1.4. TEMA 6º).

Luego $\forall \mathcal{U}$ abto elemental, con $\bar{x} \in \mathcal{U}$, $\exists W \in \mathcal{V}_c(x) / W \subset \mathcal{U}$.
Como cada entorno de $\bar{x}$, contiene un abto elemental que contiene a $\bar{x}$ y cada abto elemental que contiene a $\bar{x}$, contiene un entorno cerrado de $\bar{x}$, se deduce que para cada entorno de $\bar{x}$ existe al menos un entorno cerrado de $\bar{x}$ contenido en él, lo que prueba que X es regular. c.q.d.

2. Espacios normales

DEFINICION: Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es normal si es separado y dados dos cerrados F y G de X disjuntos, existen $V \in \mathcal{V}(F)$ y $W \in \mathcal{V}(G)$ disjuntos.

$$(X \text{ normal}) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} X \text{ es separado.} \\ \forall F, G \in \mathcal{P}(X), F \text{ y } G \text{ cerrados}, F \cap G = \emptyset \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists V \in \mathcal{V}(F) \wedge \exists W \in \mathcal{V}(G) / V \cap W = \emptyset. \end{cases}$$

Observ.: ① En general, un subespacio de un espacio normal no tiene porque ser normal. Lo mismo ocurre con el producto de espacios normales.

② Una consecuencia inmediata de la definición es que todo espacio normal es regular.

2.1. TEOREMA: Todo subespacio cerrado de un espacio normal es normal.

Demostr.: Sean $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico normal y F un subespacio cerrado de X.

Sean H y K cerrados disjuntos de F. Siendo F cerrado, H y K son cerrados de X. Como X es normal y H, K son cerrados disjuntos de X, $\exists V\in\mathcal{V}(H) \wedge \exists W\in\mathcal{V}(K) / V\cap W=\emptyset$.

$V\in\mathcal{V}(H) \Rightarrow V\cap F\in\mathcal{V}_F(H)$

$W\in\mathcal{V}(K) \Rightarrow W\cap F\in\mathcal{V}_F(K)$

y además $(V\cap F)\cap(W\cap F) = V\cap W=\emptyset$, pues $V, W\subset F$.

Luego F es normal. c.s.q.d.

2.2. TEOREMA: a) Todo espacio métrico $M=(E,d)$ es normal.

b) Todo subespacio A de un espacio métrico es normal.

Demostr.: a) Sean F y G dos cerrados disjuntos de E. Trataremos de encontrar dos abtos de E, U y V tales que $U\supset F$, $V\supset G$ y $U\cap V=\emptyset$.

Consideremos los conjuntos

$$U=\{x\in E / d(x,F) < d(x,G)\}$$
$$V=\{x\in E / d(x,G) < d(x,F)\}$$

y las aplicaciones

$$f: E\longrightarrow \mathbb{R} \qquad g: E\longrightarrow\mathbb{R}$$
$$x\longmapsto f(x)=d(x,F) \qquad x\longmapsto g(x)=d(x,G)$$

Según la proposición 6.2, (TEMA 3º), f y g son uniformemente continuas, y, por tanto, continuas. Siendo $\mathbb{R}$ separado, entonces según PROPOSICION 1.6. (TEMA 7º), los conjuntos $U=\{x\in E / f(x) < g(x)\}$ y $V=\{x\in E / g(x) < f(x)\}$ son abiertos de E.

- $F\subset U$: $\forall x\in F$, $d(x,F)=0$. Veamos que $d(x,G)>0$, con lo cual $x\in U$. Si $d(x,G)=0 \Rightarrow x\in\overline{G}=G$, pues G es cerrado, lo cual es absurdo pues $F\cap G=\emptyset$.

Análogamente, $G\subset V$.

- Por último, U y V son disjuntos, pues si $x\in U\cap V \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,F) < d(x,G) \wedge d(x,G) < d(x,F) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x,F) < d(x,F)$, lo cual es absurdo. Luego $U \cap V = \emptyset$.

b) Trivial, pues todo subespacio de un espacio métrico es, a su vez, un espacio métrico.