TEMA 10º: AXIOMAS DE NUMERABILIDAD. ESPACIOS SEPARABLES

1. ESPACIOS AN1 o espacios que satisfacen el primer axioma de numerabilidad

DEFINICION: Diremos que un espacio topológico es AN1 o satisface el primer axioma de numerabilidad si para cada $x\in X$ existe un sistema fundamental de entornos numerable.

EJEMPLOS: ① Todo espacio métrico es AN1, pues $\forall x\in E$ la familia de bolas $\{B(x,\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema fundamental de entornos numerable de x.

② Todo espacio discreto es AN1, pues para cada $x\in X$ el conjunto $\{x\}$ es un sistema fundamental de entornos de x, por ser abierto, y es numerable pues se trata de un solo conjunto.

* PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS AN1:

① Si A es una parte no vacía de X, espacio topológico AN1, entonces $x\in\bar{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)_n / \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset A \wedge (x_n)_n \longrightarrow x$.
(NOTA: La condición suficiente se da en cualquier espacio topológico; la necesaria solo se da en los espacios AN1).

② Un punto α es valor de adherencia de una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de un espacio topológico AN1 sii existe un sucesión parcial $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ tal que $(x_{n_k})_k \to \alpha$.

③ Sea X un espacio topologico AN1 y $f: X\to Y$ una aplicación. Es condición necesaria y suficiente para que f sea continua en un punto $x_0\in X$, que para toda sucesión (x_n) en X convergente hacia x_0, la sucesión $(f(x_n))_n$ converja hacia $f(x_0)$.
Este hecho se conoce con el nombre de continuidad secuencial. La condición necesaria es cierta en cualquier espacio topológico, pero la suficiente solo se verifica en espacios AN1.

OBSERVACION: Estos resultados se han demostrado anteriormente (excepto el ③) para espacios métricos en el TEMA 8º, utilizando las bolas abtas de centro $1/n$ como SFE de cada punto del espacio. Para espacios AN1 la demostración es enteramente análoga, con la excepción de que no podemos considerar bolas, sino un SFE numerable de cada punto. Es más, podemos tomar un SFE numerable de x, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $U_1\supset U_2\supset\ldots\supset U_n\supset\ldots$ Probémoslo.
Sabemos que $\forall x\in X$, $\exists (V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ SFE numerable de x

Vamos a construir a partir de estos una nueva familia de entornos de x, (U_n), de la siguiente forma:

$U_1 = V_1$, $U_2 = U_1 \cap V_2$, $U_3 = U_2 \cap V_3$, ..., $U_n = U_{n-1} \cap V_n$, ...

La familia $\{U_n\}$ es evidentemente numerable. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \mathcal{V}(x)$, pues $U_1 \in \mathcal{V}(x)$ y si $U_{n-1} \in \mathcal{V}(x)$ como $V_n \in \mathcal{V}(x)$ por hipótesis, entonces $U_n = U_{n-1} \cap V_n \in \mathcal{V}(x)$.

Además $(U_n)_n$ constituye un SFE del punto x, pues $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists n \in \mathbb{N} / V_n \subset V$, por ser $(V_n)_n$ SFE de x.

Como $U_n \subset V_n$, $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists n \in \mathbb{N} / U_n \subset V$.

Por último se verifica que $U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$

pues $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n \cap V_{n+1} \Rightarrow U_n \supset U_{n+1}$.

* Vamos a dar una demostración de la propiedad 2 para comprender el método de demostración en espacios AN1.

- La condición suficiente es cierta en todo espacio topológico (TEMA 8º, proposición 4.2)
- Condición necesaria: Si $\alpha \in X$, podemos considerar un SFE de α numerable $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_n \supset \dots$

Por ser α valor de adherencia de (x_n)

$\forall K \in \mathbb{N}$, $\exists n_K \geq K / x_{n_K} \in V_K$

Consideremos $\forall K \in \mathbb{N}$, $n_K \geq \max(K, n_{K-1}+1)$

Entonces tenemos una sucesión parcial $(x_{n_K})_K$ de (x_n), pues $\forall K \in \mathbb{N}$, $n_K \geq n_{K-1}+1 > n_{K-1}$.

Además $(x_{n_K})_K \longrightarrow \alpha$, pues

$\forall V \in \mathcal{V}(\alpha)$, $\exists K \in \mathbb{N} / V_K \subset V$, por ser (V_n) SFE de α.

Luego $\forall V \in \mathcal{V}(\alpha)$, $\exists K \in \mathbb{N} / x_{n_K} \in V$, pues $x_{n_K} \in V_K \subset V$.

Además si $p \geq K$, $x_{n_p} \in V_p \subset V_K \subset V$.

Luego $\forall V \in \mathcal{V}(\alpha)$, $\exists K \in \mathbb{N} / p \geq K \Rightarrow x_{n_p} \in V$, es decir $(x_{n_K})_K \to \alpha$. c.q.d.

2. ESPACIOS AN2 o espacios que verifican el segundo axioma de numerabilidad

DEFINICION: Un espacio topológico X es AN2 o satisface el segundo axioma de numerabilidad si podemos encontrar una base numerable de abiertos $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n, \dots\}$.

* Una consecuencia inmediata de la definición es que todo espacio topológico AN2 es un espacio AN1, pues para cada $x \in X$ (AN2)

la familia $\mathcal{B}_x$ formada por los abtos de la base que contienen al punto x es un SFE de x y además es numerable, pues $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{B}$.

EJEMPLOS: ① $\mathbb{R}$ con la topología usual es AN2 pues la familia $\mathcal{B} = \{]a,b[\ / \ a,b \in \mathbb{Q}, a<b \}$ es una base de abtos de $\mathbb{R}$, y es numerable, pues existe una biyección entre $\mathcal{B}$ y una parte de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, que es numerable $(a,b) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} - \{(0,0)\} \longleftrightarrow]a,b[\in \mathcal{B}$, $(0,0) \longleftrightarrow \emptyset$.

② Todo espacio métrico no es AN2. Sea $\mathbb{R}$ con la topología discreta; este espacio no es AN2 pues la base "más pequeña" de esta topología es $\mathcal{B} = \{\{x\} / x \in \mathbb{R}\}$ que no es numerable.

2.1 TEOREMA: La imagen continua y abierta de un espacio topológico X AN2 es también un espacio AN2. Es decir, si $f: X \to Y$ es una aplicación sobre, continua y abierta y X es AN2 entonces Y es AN2.

Demostr.: Sea $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de abtos de X.
Probemos que $f(\mathcal{B}) = (f(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de abtos de Y, es decir, probaremos que la subfamilia $f(\mathcal{B})$ que contiene a un punto y de Y es un SFE de y.
Sea $y \in Y$ y $V \in \mathcal{V}(y)$, hay que probar que $\exists n \in \mathbb{N} / y \in f(B_n) \subset V$
Que $f(B_n)$ es abto, $\forall n \in \mathbb{N}$, es claro, pues f es abta.
Además, si $y \in Y$, siendo f sobre, $\exists x \in X / y = f(x)$.
Si $V \in \mathcal{V}(y)$, siendo f continua, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$.
Siendo $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base de X, $\exists n \in \mathbb{N} / x \in B_n \subset f^{-1}(V)$
Luego, $\exists n \in \mathbb{N} / f(x) = y \in f(B_n) \subset f(f^{-1}(V)) = V$, pues f es sobre
Luego $f(\mathcal{B}) = \{f(B_n) / y \in f(B_n)\}$ es sistema fundamental de entornos de y, para cada $y \in Y$. c.s.q.d.

2.2. TEOREMA: Si X es un espacio AN2, todo subespacio suyo es AN2.

Demostr.: Sea A un subespacio de X, y $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de abtos numerable de X. Entonces $\mathcal{B}_A = (B_n \cap A)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de abtos numerable de A. Que es numerable es evidente; se prueba fácilmente que para cada $x \in A$, la subfamilia $\mathcal{B}_{A_x} = \{B_n \cap A / x \in B_n \cap A\}$ es SFE de x en A.

NOTA: Algo sobre teoría de cardinales: Con $\aleph_0$ (ale sub cero) representamos el cardinal de $\mathbb{N}$. Cuando se ponga $\overline{\overline{X}}$ se entenderá que $\overline{\overline{X}} = \text{card}\, X$.
Entonces, si $\overline{\overline{X}} = \aleph_0 \Rightarrow \overline{\overline{\mathcal{P}_F(X)}} = \aleph_0$, siendo $\mathcal{P}_F(X)$ el conjunto de las partes finitas de X
(Si $A_1, \dots, A_n$ son tales que $\overline{\overline{A_i}} = \aleph_0 \Rightarrow \overline{\overline{A_1 \times \dots \times A_n}} = \aleph_0$) $\wedge$ $\overline{\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i}} = \aleph_0$, si $\overline{\overline{A_i}} = \aleph_0$

2.3. TEOREMA: a) Sea $(X_i)_{i\in I}$ es una familia de espacios topológicos y $X=\prod_{i\in I} X_i$ el espacio producto. Entonces si $X=\prod_{i\in I}X_i$ es AN2, para todo $i\in I$, X_i es AN2. Si además cada X_i es separado entonces card $X_i = 1$ salvo para un conjunto numerable de índices es decir: $\prod_{i\in I} X_i$ es AN2 $\Rightarrow \forall i\in I$, X_i es AN2.

$\left(\prod_{i\in I} X_i \text{ es AN2}\right) \wedge (\forall i\in I, X_i \text{ es separado}) \Rightarrow \overline{\overline{X_i}}=1, \forall i\in I-J$, siendo $\overline{\overline{J}}\leq \aleph_0$.

b) Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de espacios topológicos AN2. Entonces $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ es AN2.

Demostr.: a) $\prod_{i\in I} X_i$ es AN2. $\forall i\in I$, $pr_i: \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_i$ es sobre, abierta y continua, luego $\forall i\in I$, X_i es AN2 (TEOREMA 2.1).

Si $\forall i\in I$, X_i es separado, entonces, probaremos que $\overline{\overline{X_i}}=1$ $\forall i\in I-J$, donde J es un conjunto numerable, es decir, los espacios X_i son "singletones" salvo, quizás, para una infinidad numerable de índices.

Sea $\mathcal{B}=\{B_1,\dots,B_n,\dots\}$ una base numerable de abtos, que podemos tomar elementales, de $X=\prod X_i$.

Dado un n fijo, consideremos el abto elemental $B_n\in\mathcal{B}$. Entonces $pr_i(B_n)=X_i$, excepto para un conjunto finito de índices $J_n\subset I$. Variando n, y haciendo $J=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$, se tiene que J es, a lo sumo, numerable, es decir, se verifica que $\overline{\overline{J}}\leq\aleph_0$.

Además si $i\in I-J \Rightarrow i\notin J_n, \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall i\notin J$, $pr_i(B_n)=X_i$.

Si $\mathcal{B}$ es una base de $X=\prod X_i$, $pr_i(\mathcal{B})$ es base de X_i. Luego si $i\notin J$, $pr_i(\mathcal{B})=X_i \Rightarrow \{X_i\}$ es una base de abtos de X_i, es decir, $\forall i\in I-J$, X_i es un espacio grosero.

Si X_i $(i\notin J)$ es separado, debe contener un solo elemento (debe ser singletón) pues si tuviese dos elementos distintos x e y, deberían existir dos abtos, uno de x y otro de y, disjuntos, lo cual es absurdo pues el único abto de X_i, si $i\notin J$, es X_i. Luego $\forall i\in I-J$, $\overline{\overline{X_i}}=1$, siendo $\overline{\overline{J}}\leq\aleph_0$. c.q.d.

b) Si $\forall n\in\mathbb{N}$, X_n es AN2, podemos considerar para cada $n\in\mathbb{N}$ una base $\mathcal{B}_n=\{B_n^1, B_n^2,\dots,B_n^p,\dots\}$ numerable, en X_n.

Queremos construir en $X=\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ una base $\mathcal{B}$ de abtos numerable de X.

Sea J una parte finita de $\mathbb{N}$, $J=\{n_1,\dots,n_k\}=\{n_r\}_{r=1}^{k}$.

Para esta parte finita J, definimos un abto B de $\mathcal{B}$ de la siguiente forma: $B=\prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$, con $U_i=X_i$ si $i\in\mathbb{N}-J$ y para cada $r\in\{1,\dots,k\}$, tomamos U_{n_r} como un $B^t_{n_r}\in\mathcal{B}_{n_r}$.

Entonces, para cada $n_r\in J$ podemos formar un conjunto de abtos de cardinal $\leq \aleph_0=\text{card }\mathbb{N}$, pues para cada $n\in\mathbb{N}$, $\overline{\overline{\mathcal{B}_n}}\leq\aleph_0$.

Luego el conjunto de abtos para una parte finita J tiene de cardinal menor o igual que el cardinal de $\mathbb{N}^{\overline{\overline{J}}}=\mathbb{N}\times\overset{\overline{\overline{J}}}{\cdots}\times\mathbb{N}$ que es $\aleph_0$. A cada $J\in\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ le asociamos un conjunto de abtos A_j de $\mathcal{B}$ con $\overline{\overline{A_j}}\leq\aleph_0$.

Variando J en $\mathcal{P}_F(\mathbb{N})$ obtenemos que:

$$\mathcal{B}=\bigcup_{J\in\mathcal{P}_F(\mathbb{N})} A_j$$

que es una unión numerable, pues $\overline{\overline{\mathcal{P}_F(\mathbb{N})}}=\aleph_0$, de conjuntos numerable y por tanto, numerable. Se prueba además que $\mathcal{B}$ es base. Luego $\mathcal{B}$ es una base de abtos, numerable, en X. csqd.

3. ESPACIOS SEPARABLES

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice separable si admite un subespacio A numerable y denso.

EJEMPLO: $\mathbb{R}$ con la topología usual es separable, pues $\mathbb{Q}$ es un subespacio de $\mathbb{R}$ numerable y denso.

3.1. TEOREMA: La imagen continua de un espacio separable es separable.

Demostr.: Sea $f: X\to Y$ una aplicación sobre y continua, y X un espacio separable. Veamos que Y es separable.

Si X es separable, $\exists D\subset X \,/\, \overline{\overline{D}}=\aleph_0 \wedge \overline{D}=X$.

Si f es continua $f(\overline{D})\subset\overline{f(D)}$

Luego $Y=f(X)=f(\overline{D})\subset\overline{f(D)}$.

Además $\overline{f(D)}\subset Y$. Luego $Y=\overline{f(D)}$, es decir, $f(D)$ es denso en Y. Por otro lado, si D es numerable $\overline{\overline{f(D)}}\leq\overline{\overline{D}}\leq\aleph_0$.

Luego $f(D)$ es numerable. csqd.

OBSERVACION: En general, un subespacio de un espacio separable no es separable.

Contraejemplo: Consideremos sobre $\mathbb{R}$ la topología $\mathcal{T}$ definida del siguiente modo:

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow U = \emptyset \vee U \supset \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable y denso, para esta topología, pues todo abto no vacío de $\mathcal{T}$ corta a $\mathbb{Q}$ (no sólo lo corta sino que lo contiene).

Consideremos $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ con la topología inducida por $\mathcal{T}$

Veamos que $\mathcal{T}$ induce sobre $\mathbb{I}$ la topología discreta.

$\forall \alpha \in \mathbb{I}$, $\{\alpha\}$ es abto por $\mathcal{T}_{\mathbb{I}}$ (topología inducida por $\mathcal{T}$ en $\mathbb{I}$)

pues $\forall \alpha \in \mathbb{I}$, $\exists U = \mathbb{Q} \cup \{\alpha\} \in \mathcal{T} / U \cap \mathbb{I} = \{\alpha\}$

$\mathbb{Q} \cup \{\alpha\} \in \mathcal{T}$, pues $\mathbb{Q} \cup \{\alpha\} \supset \mathbb{Q}$.

Sin embargo, $\mathbb{I}$ no es separable, pues cualquier subconjunto D de $\mathbb{I}$, numerable, no es denso en $\mathbb{I}$, ya que $(\mathbb{I}, \mathcal{T}_{\mathbb{I}})$ es un espacio discreto y todo subconjunto de $\mathbb{I}$ es abto y cerrado, a la vez, en $\mathbb{I}$, Luego $\overline{D}_{\mathbb{I}} = D \neq \mathbb{I}$ pues $\mathbb{I}$ no es numerable.

Sin embargo:

3.2 PROPOSICION: Todo subespacio abierto de un espacio separable es separable.

Demostr.: Sea X un espacio separable y A un subespacio abierto de X. Si X es separable, existe un subconjunto D de X tal que $\overline{D} = X$ y card $D = \overline{\overline{D}} \leq \aleph_0$

Consideremos el subconjunto $D \cap A$ de A, que es no vacío pues A es abierto y todo abto corta a D, por ser denso en X.

Como $D \cap A \subset D \wedge \overline{\overline{D}} \leq \aleph_0 \Rightarrow \overline{\overline{D \cap A}} \leq \aleph_0$.

Probemos que $D \cap A$ es denso en A

Sabemos que si U es abto, $U \cap \overline{V} \subset \overline{U \cap V}$ (ver ejercicios TEMA 1º)

Luego $A = A \cap X = A \cap \overline{D} \subset \overline{A \cap D}$

Como $D \cap A \subset A \Rightarrow \overline{D \cap A}_A \subset A$

Luego $\overline{D \cap A}_A = \overline{D \cap A} \cap A \supset A \wedge \overline{D \cap A}_A \subset A \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{D \cap A}_A = A$, que prueba que $D \cap A$ es denso en A. c.s.q.d.

OBSERVACION: El producto de una familia finita de espacios topológicos no vacíos es separable si y sólo si cada espacio coordenado es separable.

4. Espacios de Lindelöf

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice de Lindelöf si de todo recubrimiento abierto de X es posible extraer un subrecubrimiento numerable.

Un recubrimiento abierto $\mathcal{R}$ de X es una familia $\{U_i\}_{i\in J}$ de abiertos de X tales que $X = \bigcup_{i\in J} U_i$.

Entonces X es de Lindelöf si y solo si
$\forall \mathcal{R} = \{U_i\}_{i\in J}$ rec. abto de X, $\exists \mathcal{R}' = \{U_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}} / X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$:

* Si X es un espacio topológico y A un subespacio de X, se dice que A es un espacio de Lindelöf si A con la topología de subespacio inducida por X es un espacio de Lindelöf.

4.1 PROPOSICION: Un subespacio A de un espacio topológico X es un espacio de Lindelöf sii todo recubrimiento $\mathcal{R}$ de A por abiertos de X admite un subrecubrimiento numerable, (es decir, si $(U_i)_{i\in J}$ es una familia cualquiera de abiertos de X tales que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$ entonces es posible extraer una subfamilia numerable $(U_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$, y recíprocamente).

Demostr.: $\Longrightarrow$ Supongamos que A es un espacio de Lindelöf y $\mathcal{R}_A = (V_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abto cualquiera de A (entiendase que es un recubrimientos por abiertos de A, no de X).

Luego $A = \bigcup_{i\in J} V_i$. Entonces, por ser A de Lindelöf, podemos encontrar un subrecubrimiento numerable de A en $\mathcal{R}_A$, es decir, $\exists \mathcal{R}'_A = (V_{i_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R} / A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{i_n}$.

Sea $\mathcal{T}_A$ la topología de subespacio inducida en A por la topología $\mathcal{T}$ sobre X. Entonces, $\forall i \in J$, $V_i \in \mathcal{T}_A$. Luego, por definición de topología de subespacio $\forall V_i \in \mathcal{T}_A$, $\exists U_i \in \mathcal{T} / V_i = U_i \cap A$.

Se verifica, entonces, que $A = \bigcup_{i\in J} V_i \iff A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

pues $A = \bigcup_{i\in J} V_i = \bigcup_{i\in J} (U_i \cap A) = A \cap (\bigcup_{i\in J} U_i) \iff A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

Luego, si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{i_n} \Rightarrow A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$

Esto lo podemos hacer para cualquier recubrimiento abto de A $(U_i)_{i\in J}$ por abtos de X. (Obsérvese que el razonamiento está mal hecho; debería haber partido de cualquier rec. abto de A por abtos de X y extraer un recubrimien-

$\Leftarrow$ El recíproco se hace análogamente. Si $\mathcal{R}_A = (V_i)_{i\in J}$ es un recubrimiento abto de A por abtos de A, trataremos de extraer un recubrimiento numerable.

$\forall i \in J,\ V_i \in \mathcal{T}_A$. Luego $\forall V_i \in \mathcal{T}_A,\ \exists U_i \in \mathcal{T} / V_i = U_i \cap A$

Si $A = \bigcup_{i\in J} V_i \Rightarrow A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

Luego $(U_i)_{i\in J}$ es un recubrimiento de A por abtos de X. Por hipótesis podemos extraer un subrecubrimiento numerable. Es decir:

$\exists (U_{i_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (U_i)_{i\in J} / A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$

Luego tomando $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{i_n} = U_{i_n} \cap A \in \mathcal{R}_A$

tenemos que $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_{i_n}$. Hemos extraído, por tanto, de $\mathcal{R}_A$ un subrecubrimiento numerable. csqd.

4.2. PROPOSICION: La imagen continua de un espacio de Lindelöf es un espacio de Lindelöf. En otras palabras:
Si X es un espacio de Lindelöf y $f: X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es un espacio de Lindelöf (o bien si f es, además, sobre, $Y = f(X)$ es un espacio de Lindelöf).

Demostr.: Sea $\mathcal{R} = (U'_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de $f(X)$. Es decir $f(X) \subset \bigcup_{i\in J} U'_i$, siendo los U'_i abiertos de Y (en virtud de la proposición anterior podemos tomar el recubrimiento por abtos de Y o de $f(X)$, como subespacio de Y).

Entonces $X \subset f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in J} U'_i) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(U'_i)$

Siendo f continua, la contraimagen de un abierto es un abierto. Luego $(f^{-1}(U'_i))_{i\in J}$ es un recubrimiento abierto de X. Siendo X un espacio de Lindelöf, podemos extraer de dicho recubrimiento un recubrimiento numerable. Luego:

$\exists (f^{-1}(U'_{i_n}))_{n\in\mathbb{N}} \subset (f^{-1}(U'_i))_{i\in J} / X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(U'_{i_n})$

Por tanto $f(X) \subset f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(U'_{i_n})) =$

$= f(f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_{i_n})) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_{i_n}$.

Luego $(U'_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto numerable de $f(X)$ extraído del primitivo. csqd

4.3 PROPOSICION: Si A es un subespacio cerrado de un espacio topológico X de Lindelöf, entonces A es de Lindelöf. (*)

Demostr.: Sea $(U_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de A (por abiertos de X).

Luego $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Si A es cerrado, $\complement A$ es abierto. Siendo $X = A \cup \complement A$, se deduce que

$X = \bigcup_{i\in J} U_i \cup \complement A$

Tenemos, entonces, un recubrimiento abierto de X, del cual, por ser X un espacio de Lindelöf, podemos extraer un subrecubrimiento numerable $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $V_n \in \{U_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\complement A\}$

Siendo $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, se deduce que:

$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, pues $A \subset X$.

Podemos considerar dos casos:

a) $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n \neq \complement A$. Entonces $(V_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (U_i)_{i\in J}$; luego hemos extraido de $(U_i)_{i\in J}$ un subrecubrimiento numerable de A.

b) $\exists K\in\mathbb{N} \,/\, V_K = \complement A$

Consideremos, entonces, la familia de abiertos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}-\{K\}}$

Esta familia está contenida en $(U_i)_{i\in J}$, pues $\forall n\in\mathbb{N}-\{K\}$, $V_n \neq \complement A$.

Ademas $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{K\}} V_n$, pues $A \cap \complement A \neq \emptyset$, y como

$A \subset \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{K\}} V_n\right) \cup \complement A \Rightarrow A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}-\{K\}} V_n$

En cualquier caso hemos extraido de $(U_i)_{i\in J}$ un subrecubrimiento numerable de A. c.s.q.d.

4.4. TEOREMA: Si X es un espacio topológico AN2 entonces:

a) X es de Lindelöf

b) X es separable.

Demostr.: a) Si X es AN2 admite una base $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n, \dots\}$ de abiertos de X.

Sea $R = (U_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de X, es decir, $X = \bigcup_{i\in J} U_i$

Entonces $\forall x\in X, \exists i\in J \,/\, x\in U_i$.

Siendo U_i abto, $U_i \in \mathcal{V}(x)$. Sea $\mathcal{B}_x$ la familia de abiertos de $\mathcal{B}$ que contiene al punto x. Siendo $\mathcal{B}$ base de X, $\mathcal{B}_x$ es base

fundamental de entornos de x. Como $U_i \in V(x)$,
$\exists B_x \in \beta_x \,/\, x \in B_x \subset U_i$

Como $\beta_x \subset \beta$, se deduce que β_x es numerable, $\forall x \in X$.
Si a cada $x \in X$ le asociamos un único $B_{x_{i_n}} \in \beta_x$, y a cada $B_{x_{i_n}}$ un único U_{i_n}, tal que $x \in B_{x_{i_n}} \subset U_{i_n}$, se deduce que
$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{x_{i_n}} \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{i_n}$

Luego $(U_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ es un subrecubrimiento numerable abto de X extraido de $(U_i)_{i \in J}$; lo que prueba que X es de Lindelöf.

b) Sea $\beta = \{B_1, \dots, B_n, \dots\}$ una base numerable de abtos de X, que existe por ser X un espacio AN2. Se trata de encontrar en X un conjunto D denso y numerable.
Supongamos que $\overline{\overline{\beta}} = \aleph_0$ (Si $\overline{\overline{\beta}} < \aleph_0$, β será finito y el razonamiento es análogo que si β es infinito numerable).
Para cada $i \in \mathbb{N}$ tomaremos un $x_i \in B_i$.
Construimos el conjunto $D = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.
Evidentemente, D es numerable.
Además, D es es denso, pues todo abto B_i de la base corta a D en el punto x_i. Como todo abierto de X es unión de abiertos de β, se deduce que $\forall U$ abto de X, $U \neq \emptyset$, $U \cap D \neq \emptyset$.
Luego D es denso y numerable. c.q.d.

45. TEOREMA: Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:
a) E es AN2
b) E es de Lindelöf
c) E es separable.

Demostr.: Que a) $\Rightarrow$ b) $\wedge$ a) $\Rightarrow$ c) está probado en el teorema anterior, para un espacio topologico cualquiera. Probemos entonces que b) $\Rightarrow$ a) $\wedge$ c) $\Rightarrow$ a).

b) $\Rightarrow$ a) Hay que probar que si E es un espacio de Lindelöf, admite una base de abtos numerable.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos considerar la familia
$$R_n = \left(B\left(x, \tfrac{1}{n}\right)\right)_{x \in E}$$
Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E = \bigcup_{x \in E} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Tenemos entonces un recubrimiento abierto de E, del cual, por ser A de Lindelöf, podemos extraer un subrecubrimiento numerable. Es decir, $\exists \mathcal{R}'_n \subset \mathcal{R}_n$ / $\mathcal{R}'_n$ es un subrecubrimiento numerable de E.

Sea $\mathcal{R}'_n = \{B(x_{i_n}, \frac{1}{n}) / i_n \in \mathbb{N}\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $E = \bigcup_{i_n \in \mathbb{N}} B(x_{i_n}, \frac{1}{n})$ (I)

Consideremos, entonces, la familia

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\mathcal{R}'_n\}$$

Evidentemente, $\mathcal{B}$ es una familia de abtos, pues está formada por bolas abiertas, y es numerable, como unión numerable de conjuntos numerables. Veamos que $\mathcal{B}$ es base de E. Probaremos que todo abierto $\mathcal{U}$ de E que contenga a un punto $x \in E$ contiene a un elemento B de $\mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$, con lo cual se probará que, para cada $x \in E$, $\mathcal{B}_x$ es SFE de x (*), lo que significa que $\mathcal{B}$ es base.

Sea $x \in E$ y $\mathcal{U}$ abto de E tal que $x \in \mathcal{U}$. Entonces

$\exists \varepsilon > 0 / x \in B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$.

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} / \frac{1}{m} < \varepsilon$. En definitiva:

$x \in \mathcal{U}$ abto $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} / x \in B(x, \frac{1}{m}) \subset \mathcal{U}$. (II)

Consideremos el subrecubrimiento de E $\mathcal{R}'_{2m}$.

Se tiene que $E = \bigcup_{i_{2m} \in \mathbb{N}} B(x_{i_{2m}}, \frac{1}{2m})$, según (I).

Si $x \in E$, $\exists B(y, \frac{1}{2m}) \in \mathcal{R}'_{2m} / x \in B(y, \frac{1}{2m})$; $y \in \{x_{i_{2m}}\}_{i_{2m} \in \mathbb{N}}$

Veamos que $B(y, \frac{1}{2m}) \subset B(x, \frac{1}{m})$

$\forall z \in B(y, \frac{1}{2m})$, $d(y, z) < \frac{1}{2m}$

Además $x \in B(y, \frac{1}{2m}) \Rightarrow d(x, y) < \frac{1}{2m}$. Entonces

$\forall z \in B(y, \frac{1}{2m})$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m} \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in B(x, \frac{1}{m})$. Por tanto $B(y, \frac{1}{2m}) \subset B(x, \frac{1}{m})$ (III)

Luego $\exists B(y, \frac{1}{2m}) \in \mathcal{R}'_{2m} / x \in B(y, \frac{1}{2m}) \subset \mathcal{U}$, según (II) y (III).

Hemos probado, entonces, que

$\forall \mathcal{U}$ abto de E $\wedge$ $\forall x \in \mathcal{U}$, $\exists B_x \in \mathcal{B}_x / x \in B_x \subset \mathcal{U}$.

siendo $B_x = B(y, \frac{1}{2m}) \in \mathcal{R}'_{2m} \in \mathcal{B}'_x$. c.s.q.d.

c) $\Rightarrow$ a)] Hay que probar que si E es separable, es AN2.
Si E es separable, existe un subconjunto D de E que es numerable y denso en E. Sea $D = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$
Consideremos la familia

$$\mathcal{B} = \{B(x_n, \tfrac{1}{m}) / x_n \in D \wedge m \in \mathbb{N}\}$$

Evidentemente, $\mathcal{B}$ es numerable pues se corresponde biyectivamente con una parte de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ya que dar una bola $B(x_n, \frac{1}{m})$ equivale a dar un par $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$; (hemos puesto que se corresponde biyectivamente con una parte de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pues puede darse el caso de que D sea finito, es decir, $\overline{\overline{D}} < \aleph_0$).
Probemos que $\mathcal{B}$ es base de E, por el mismo procedimiento utilizado anteriormente, es decir, viendo que $\mathcal{B}_x$ es SFE de x, $\forall x \in E$.
Sea U un abto cualquiera de E y x un punto genérico de U.
Se trata de probar que $\exists (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / x \in B(x_n, \frac{1}{k}) \subset U$.

Si $x \in U$ abto, $\exists m \in \mathbb{N} / B(x, \frac{1}{m}) \subset U$. (I)

Siendo D denso, todo abto de E corta a D; en particular $B(x, \frac{1}{2m})$ es abto de E, luego: $B(x, \frac{1}{2m}) \cap D \neq \emptyset$. Es decir $\exists n \in \mathbb{N} / x_n \in B(x, \frac{1}{2m})$, x_n es un punto de D.
Vamos a probar las siguientes inclusiones:

$$x \in B(x_n, \tfrac{1}{2m}) \subset B(x, \tfrac{1}{m})$$

con lo cual, según (I), $\forall x \in U, \exists B(x_n, \frac{1}{2m}) \in \mathcal{B} / x \in B(x_n, \frac{1}{2m}) \subset U$.

Si $x_n \in B(x, \frac{1}{2m}) \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{2m} \Rightarrow x \in B(x_n, \frac{1}{2m})$

Además $\forall y \in B(x_n, \frac{1}{2m})$, $d(x, y) \leq$
$\leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m} = \frac{1}{m}$
Luego $y \in B(x, \frac{1}{m})$. c.q.d.