TEMA 11º: ESPACIOS COMPLETOS

1. Sucesiones de Cauchy. Espacios completos

DEFINICION: Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de E se dice que es una sucesión de Cauchy si y solo si
$$\forall \varepsilon>0, \exists \nu\in\mathbb{N} / p,q\geq \nu \Rightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon$$

DEFINICION: Un espacio métrico $M=(E,d)$ se dice completo si toda sucesión de Cauchy en E es convergente.

Ejemplos: $(\mathbb{R},|\,.\,|)$ es un espacio métrico completo, pues toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ converge hacia un punto de $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\mathbb{Q}$ con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$ es un espacio métrico incompleto, pues existen sucesiones de números racionales de Cauchy que convergen hacia un número irracional.
Analogamente, el subespacio $]0,1]$ es incompleto pues la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de puntos de $]0,1]$ que no converge en $]0,1]$, pues $\left(\frac{1}{n}\right)_n \longrightarrow 0$.

OBSERVACION: • El "carácter de Cauchy" de una sucesión no es una propiedad topológica, en el sentido de que no se mantiene por homeomorfismos. Veamos un contraejemplo:

Sabemos que
$$h:]0,1] \longrightarrow [1,+\infty[$$
$$x \longmapsto h(x)=\frac{1}{x}$$
es un homeomorfismo. La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $]0,1]$, sin embargo la sucesión de las imágenes no es una sucesión de Cauchy de $[1,+\infty[$ pues
$$\left(h\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}=(n)_{n\in\mathbb{N}}$$
que evidentemente no es de Cauchy.
Análogamente, la completitud de un espacio métrico no es una propiedad topológica.

• Aunque el "caracter de Cauchy" y la completitud se conservan por isometrías (isomorfismos de la estructura métrica), no son propiedades inherentes a la estructura métrica, según veremos después.

• Estas dos propiedades sí pueden ser consideradas invariantes uniformes, en el sentido de que se mantienen por homeomorfismos uniformes, como luego probaremos.

1.1. PROPOSICION: El "carácter de Cauchy" de una sucesión y la completitud se mantienen por isometrías. (*)

Demostr.: * Sean $M_1=(E_1, d_1)$ y $M_2=(E_2, d_2)$ dos espacios métricos y $h: M_1 \longrightarrow M_2$ una isometría. Se trata de probar que toda sucesión de Cauchy en M_1 se transforma por h en una sucesión de Cauchy de M_2, y recíprocamente, que toda sucesión de Cauchy de M_2 se transforma por h^{-1} en una sucesión de Cauchy de M_1.

Si h es una isometría se tiene que

$$\forall x, y \in E_1, \quad d_1(x,y) = d_2(h(x), h(y)) \quad \text{(I)}$$

Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E_1. Se trata de ver que $(h(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en E_2, o bien, que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p, q \geq \nu \Rightarrow d_2(h(x_p), h(x_q)) < \varepsilon.$$

Siendo $(x_n)_n$ de Cauchy, dado $\varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p, q \geq \nu \Rightarrow d_1(x_p, x_q) < \varepsilon$

Entonces, según (I) $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p, q \geq \nu \Rightarrow d_2(h(x_p), h(x_q)) = d_1(x_p, x_q) < \varepsilon.$

Análogamente, si (y_n) es una sucesión de Cauchy en E_2, $(h^{-1}(y_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en E_1, pues h^{-1} también es una isometría.

** Supongamos que M_1 es completo y $h: M_1 \to M_2$ una isometría. Probemos, entonces, que M_2 es completo.

Hemos de probar que toda sucesión de Cauchy en M_2 es convergente.

Sea $(y_n)_n$ una sucesión de Cauchy en M_2. Entonces, según *, $(h^{-1}(y_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en M_1. Siendo E_1 completo, $\exists x \in E_1 \; / \; (h^{-1}(y_n))_n \xrightarrow{E_1} x$.

Siendo h continua transforma sucesiones convergentes en sucesiones convergentes; luego:

$$(h[h^{-1}(y_n)])_n \xrightarrow{E_2} h(x) \in E_2$$

Pero h es biyectiva, luego $h(h^{-1}(y_n)) = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Luego $(y_n)_n \longrightarrow h(x) \in E_2$, lo cual prueba que E_2 es completo.

(*) Aunque el "carácter de Cauchy" y la completitud se mantienen por isometrías, no

1.2. PROPOSICIÓN: Sean $M_1=(E_1,d_1)$ y $M_2=(E_2,d_2)$ dos espacios métricos y $f: E_1 \longrightarrow E_2$ una aplicación uniformemente continua. Entonces la sucesión de los transformados por f de una sucesión de Cauchy en E_1 es una sucesión de Cauchy en E_2.

Demostr: Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E_1. Veamos que $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en E_2.

Si f es uniformemente continua, se tiene, por definición, que

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0 \,/\, d_1(x,y)<\delta \Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon \qquad (\mathrm{I})$$

Siendo $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy

$$\text{dado } \delta>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} \,/\, p,q\geq\nu \Rightarrow d_1(x_p,x_q)<\delta \qquad (\mathrm{II})$$

Entonces según (I) y (II):

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} \,/\, p,q\geq\nu \Rightarrow d_1(x_p,x_q)<\delta \Rightarrow d_2(f(x_p),f(x_q))<\varepsilon$$

lo cual prueba que $(f(x_n))_n$ es de Cauchy. csqd.

1.3. PROPOSICIÓN: Sean $M_1=(E_1,d_1)$ y $M_2=(E_2,d_2)$ dos espacios métricos y $f: E_1 \longrightarrow E_2$ un homeomorfismo y uniformemente continua. Entonces, si $M_2=(E_2,d_2)$ es un espacio completo, $M_1=(E_1,d_1)$ también es completo. (El recíproco, en general, no es cierto)

Demostr.: Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E_1.

Entonces, siendo f uniformemente continua, $(f(x_n))_n$ es de Cauchy en E_2.

Siendo E_2 completo, $(f(x_n))_n$ converge hacia un punto y de E_2.

Si $y\in E_2$, siendo f biyectiva, $\exists x\in E_1 \,/\, y=f(x)$.

Pero f es homeomorfismo, luego f^{-1} es continua y transforma sucesiones convergentes de E_2 en sucesiones convergentes de E_1.

Luego: $(f(x_n))_n \xrightarrow{E_2} f(x) \Rightarrow (f^{-1}(f(x_n)))_n \xrightarrow{E_1} f^{-1}(f(x))=x$

Siendo f biyectiva, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f^{-1}(f(x_n))=x_n$. Luego:

$$(x_n)_n \xrightarrow{E_1} x$$

Por tanto, E_1 es completo. csqd.

1.4. TEOREMA: Si $f: E_1 \longrightarrow E_2$ es un homeomorfismo uniforme f y f^{-1} transforman sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy y los espacios métricos E_1 y E_2 son simultáneamente completos o incompletos, es decir, si E_1 es completo, E_2 es completo y si E_2 es completo, entonces E_1 también lo es.

Demostr.: Si f es homeomorfismo uniforme, f es homeomorfismo y uniformemente continua, entonces, según las proposiciones 1.2 y 1.3, f transforma sucesiones de Cauchy de E_1 en sucesiones de Cauchy en E_2, y si E_2 es completo entonces E_1 también lo es. Análogamente, f^{-1} es homeomorfismo y uniformemente continua, luego transforma sucesiones de Cauchy de E_2 en sucesiones de Cauchy de E_1, y si E_1 es completo, entonces E_2 también lo es. c.s.q.d.

② PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES DE CAUCHY

P.1 Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy.

Demostr.: Sea (E,d) un espacio métrico y $(x_n)_n$ una sucesión convergente hacia un punto $x\in E$. Entonces:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} / n\geq \nu \Rightarrow d(x_n,x)<\varepsilon/2.$$

Entonces $\forall \varepsilon>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} / p,q\geq\nu \Rightarrow d(x_p,x_q)\leq d(x_p,x)+d(x,x_q)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$

P.2 Toda sucesión parcial de una sucesión de Cauchy es de Cauchy.

Demostr.: Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en E y $(x_{n_K})_K$ una subsucesión de ella. Siendo $(x_n)_n$ de Cauchy:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} / p,q\geq\nu \Rightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon. \quad (I)$$

Siendo $\forall K\in\mathbb{N}$, $n_K\geq K$, pues $(n_K)_K$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} / p,q\geq\nu \Rightarrow n_p,n_q\geq\nu \overset{(I)}{\Longrightarrow} d(x_{n_p},x_{n_q})<\varepsilon$$

lo cual prueba que $(x_{n_K})_K$ es de Cauchy.

P.3 Dada una sucesión de Cauchy en E o bien es convergente o no converge ninguna sucesión parcial suya.

Demostr.: Probemos que si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en E y $(x_{n_K})_K$ es una subsucesión suya que converge hacia un punto $x\in E$, entonces $(x_n)_n$ también converge.

Hay que probar que $\forall\varepsilon>0,\ \exists\nu\in\mathbb{N} / K\geq\nu \Rightarrow d(x_K,x)<\varepsilon$.

dado $\varepsilon/2>0$, $\exists \nu_1\in\mathbb{N} / p,q\geq\nu_1 \Rightarrow d(x_p,x_q)<\varepsilon/2$

y también $\exists \nu_2\in\mathbb{N} / K\geq\nu_2 \Rightarrow d(x_{n_K},x)<\varepsilon/2$, pues $(x_{n_K})_K\to x$

Sea $\nu=\max(\nu_1,\nu_2)$. Entonces:

$$\forall K\geq\nu, \begin{cases} K\geq\nu_1 \wedge n_K\geq K\geq\nu_1 \Rightarrow d(x_K,x_{n_K})<\varepsilon/2 \\ K\geq\nu_2 \Rightarrow d(x_{n_K},x)<\varepsilon/2 \end{cases}$$

Luego:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / k \geq \nu \Rightarrow d(x_k, x) \leq d(x_k, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
Luego $(x_n)_n \longrightarrow x$. c.s.q.d.

$\boxed{P.4}$ El conjunto de puntos de una sucesión de Cauchy, en un espacio métrico, es acotado.

Demostr.: Sea $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, queremos probar que el diametro de A, $\delta(A) = \sup_{p,q \in \mathbb{N}} d(x_p, x_q)$, es finito.

Tratemos de hallar un $M > 0$ tal que $d(x_p, x_q) \leq M$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$ con lo cual $\delta(A) \leq M$.

Sea $\varepsilon > 0$ un número fijo; por ser $(x_n)_n$ de Cauchy
$\exists \nu \in \mathbb{N} / p, q \geq \nu \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$

En el subconjunto de A $\{x_p \in A / p \geq \nu\}$ la distancia está acotada por ε.

Sea $A_2 = \{x_1, \ldots, x_\nu\}$. Por tratarse de un conjunto finito, A_2 está acotado. Sea $\delta(A_2) = M < +\infty$.

Luego $\forall i, j \in \{1, \ldots, \nu\}$, $d(x_i, x_j) \leq M = \sup_{p,q \in \{1,\ldots,\nu\}} d(x_p, x_q)$

Queda probar que $\forall i \in \{1, \ldots, \nu-1\} \wedge \forall q \geq \nu$, $d(x_i, x_q) \leq N$, siendo N una constante positiva fija, pero:
$d(x_i, x_q) \leq d(x_i, x_\nu) + d(x_\nu, x_q) \leq M + \varepsilon$

Luego $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $d(x_p, x_q) \leq M + \varepsilon$, lo cual prueba que $\delta(A)$ es finito. c.s.q.d.

3. TEOREMA DE CANTOR

Th: Un espacio métrico $M = (E, d)$ es completo si y solo si para toda sucesión decreciente de cerrados de E no vacíos, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, con $(\delta(F_n))_n \longrightarrow 0$ su intersección es no vacía.

Demostr.: $\Longrightarrow$ Supongamos que $M = (E, d)$ es un espacio completo. Sea $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ una sucesión decreciente de cerrados no vacíos de E de modo que la sucesión de los diámetros tiende a cero. Probemos que la intersección de dichos cerrados es no vacía.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos un $x_n \in F_n$.

Tenemos entonces una sucesión $(x_n)_n$ de puntos de F

Veamos que esta sucesión es de Cauchy

Siendo $(\delta(F_n))_n \longrightarrow 0$, dado $\varepsilon>0$, $\exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow \delta(F_n) < \varepsilon$

Sean p y q dos naturales cualesquiera tales que $p > q \geq \nu$

Si $p > q \Rightarrow F_p \subset F_q$. Luego $x_p \in F_q \wedge x_q \in F_q$

Entonces $d(x_p, x_q) \leq \delta(F_q) = \sup\limits_{x_i, x_j \in F_q} d(x_i, x_j)$

Siendo $q \geq \nu \Rightarrow \delta(F_q) < \varepsilon$. Luego:

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N} / p, q \geq \nu \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Luego $(x_n)_n$ es una sucesion de Cauchy en E, y, por tanto, convergente, pues (E,d) es completo. Luego:

$$\exists x \in E \;/\; (x_n)_n \longrightarrow x$$

Probemos que $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con lo cual quedará probado que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

Veamos que x es adherente a F_r, $\forall r \in \mathbb{N}$.

Si $(x_n)_n \longrightarrow x$, $\forall U \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow x_n \in U$.

Además $\forall r \in \mathbb{N}$, $\exists m \in \mathbb{N} / m \geq r \wedge m \geq \nu$, por ejemplo $m = \max(\nu, r)$.

Entonces $(m \geq r \Rightarrow x_m \in F_r) \wedge (m \geq \nu \Rightarrow x_m \in U)$.

Luego $x_m \in U \cap F_r \Rightarrow U \cap F_r \neq \emptyset$, y esto $\forall r \in \mathbb{N} \wedge \forall U \in \mathcal{V}(x)$.

Luego $\forall r \in \mathbb{N} \wedge \forall U \in \mathcal{V}(x)$, $U \cap F_r \neq \emptyset \Rightarrow \forall r \in \mathbb{N}$, $x \in \overline{F_r}$

Siendo F_r cerrado, deducimos que

$$\forall r \in \mathbb{N},\ x \in F_r.$$

Luego $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$. ~~cqd~~.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $(x_n)_n$ una sucesion de Cauchy en E. Probemos que es convergente.

Consideremos los conjuntos:

$A_1 = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $A_2 = \{x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, ..., $A_K = \{x_r / r \geq K\}$, ...

Evidentemente:

$$A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_K \supset \ldots$$

Y tambien:

$$\overline{A}_1 \supset \overline{A}_2 \supset \ldots \supset \overline{A}_K \supset \ldots$$

$\forall K \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_K \neq \emptyset$.

Tenemos entonces una sucesión decreciente de cerrados de E, no vacios. Probemos que $(\delta(\overline{A}_n))_n \longrightarrow 0$

Siendo $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy tenemos que:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p, q \geq \nu \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon$.

Sea entonces $n \geq \nu$, entonces $\delta(A_n) \leq \varepsilon$, pues:

$\forall x_p, x_q \in A_n \Rightarrow p, q \geq n \geq \nu \Rightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_{x_p, x_q \in A_n} d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$.

Luego $(\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow \delta(A_n) \leq \varepsilon) \Rightarrow (\delta(A_n))_n \longrightarrow 0$

Sabemos que $\delta(A_n) = \delta(\bar{A}_n)$.

Luego $(\delta(\bar{A}_n))_n \longrightarrow 0$.

Entonces, por hipótesis, $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n \neq \emptyset$.

Esta intersección se reduce a un punto, pues:

$\forall k \in \mathbb{N}, F \subset \bar{A}_k \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \delta(F) \leq \delta(\bar{A}_k)$.

Como $(\delta(\bar{A}_n))_n \to 0$, se deduce que $\delta(F) = 0$. Luego F se reduce a un punto, pues de haber más de un punto $\delta(F) = \sup_{x, y \in F} d(x, y)$ sería distinto de 0.

Sea $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{A}_k = \{x\}$.

Veamos que $(x_n)_n \longrightarrow x$.

Si $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bar{A}_k$, x es un valor de adherencia de $(x_n)_n$. Entonces debe existir una sucesión parcial de $(x_n)_n$ que converge hacia x. Según la propiedad $\boxed{P.3}$ del apartado 2, siendo (x_n) de Cauchy y admitir una sucesión parcial convergente hacia x debe ser $(x_n)_n \xrightarrow{E} x$. Luego, toda sucesión de Cauchy en E es convergente, lo cual prueba que E es completo. c.s.q.d.

4. Subespacios completos y espacios productos completos

* En general, todo subespacio métrico de un espacio métrico completo no es, necesariamente, completo. Sin embargo:

4.1. Proposición: a) Todo subespacio métrico cerrado de un espacio métrico completo es completo.

b) Si $M = (E, d)$ es un espacio métrico y $N = (A, d)$ es un subespacio métrico de M completo, entonces A es cerrado.

Demostr.: a) Sea A un subespacio cerrado de E, y $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en A, cualquiera. Veamos que $(x_n)_n$ converge ~~en~~ A.

Si $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en A, es también ~~[illegible]~~

sucesión de Cauchy en E. Por ser E completo, $(x_n)_n$ converge hacia un punto $x \in E$. Veamos que $x \in A$ y el teorema estará demostrado.

Siendo $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de A que converge hacia $x \in E$, sabemos que x es un punto adherente a A, $x \in \bar{A}$.

Siendo A cerrado, $A = \bar{A}$. Luego $x \in A$. Por tanto, $(x_n)_n$ converge en A, lo cual prueba que A es completo.

b) Para ver que A es cerrado probaremos que $\bar{A} \subset A$.

Sea x un punto cualquiera de $\bar{A}$. Entonces

$$\exists (x_n)_n / \{x_n\}_n \subset A \wedge (x_n)_n \to x.$$

Si $(x_n)_n$ es convergente, es una sucesión de Cauchy en A.

Pero A es completo, por hipótesis, luego $(x_n)_n$ converge en A.

Es decir, $\exists y \in A / (x_n)_n \to y$.

Por la unicidad del límite en un espacio métrico se deduce que $x = y$. Luego, como $y \in A$, se deduce que $x \in A$.

Por tanto, $\bar{A} \subset A$, lo cual prueba que A es cerrado. c.q.d.

** Antes de estudiar la completitud en los espacios productos vamos a dar unas proposiciones relativas a los límites de funciones y sucesiones en espacios productos

4.2. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico, A un subespacio de X e $Y = \prod_{i \in J} Y_i$ un espacio producto. Sea, además, $f: A \to Y$ una aplicación y x_0 un punto de acumulación de A. Entonces:

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l = (l_i)_{i \in J} \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$$

siendo $f_i = pr_i \circ f$, para cada $i \in J$.

Demostr.: $\Rightarrow$] Supongamos que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l = (l_i)_{i \in J}$.

Veamos que para cada $i \in J$, $\exists \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$.

Sea V_i un entorno cualquiera de l_i en Y_i.

Consideramos el conjunto $U = \prod_{k \in J} U_k$ siendo $U_k = Y_k$ si $k \neq i$ $\wedge$ $U_i = V_i$.

Evidentemente $U \in \mathcal{V}(l)$, en Y.

Siendo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, dado $U \in \mathcal{V}(l)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x_0) / x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in U$.

Si $f(x) \in U = \prod_{k \in J} U_k \Rightarrow f_i(x) \in pr_i(U) = U_i = V_i$

Luego $\forall V_i \in \mathcal{V}(l_i), \exists W \in \mathcal{V}(x_0) / x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f_i(x) \in V_i$

Por tanto, $\exists \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$.

$\Leftarrow$| Supongamos que $\forall i \in J$, $\exists \lim_{x \to x_0} f_i(x) = l_i$.

Sea, entonces, $l = (l_i)_{i \in J}$. Veamos que $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Sea $U = \prod_{i \in J} U_i$ un entorno elemental de l; recordemos que lo podemos tomar elemental pues los entornos elementales que contienen a un punto de Y constituyen un sistema fundamental de entornos de dicho punto.

Si U es entorno elemental de l se tiene que:

$$(\forall i \in J - \{i_1, \dots, i_k\}, U_i = Y_i) \wedge (\forall r \in \{1, \dots, k\}, U_{i_r} \in \mathcal{V}(l_{i_r}))$$

Por hipotesis, $\forall r \in \{1, \dots, k\}$, $\exists \lim_{x \to x_0} f_{i_r}(x) = l_{i_r}$, luego:

dado $U_{i_r} \in \mathcal{V}(l_{i_r})$, $\exists W_{i_r} \in \mathcal{V}(x_0) / x \in (W_{i_r} - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f_{i_r}(x) \in U_{i_r}$ (I)

Sea $W = \bigcap_{r=1}^{k} U_{i_r}$. $W \in \mathcal{V}(x_0)$ por ser una intersección finita de entornos de x_0.

Veamos entonces que si $x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in U$.

Si $x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow \forall r \in \{1, \dots, k\}$, $f_{i_r}(x) \in U_{i_r}$, según (I), y si $x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow \forall i \in J - \{i_1, \dots, i_k\}$, $f_i(x) \in U_i$, pues $U_i = Y_i$ y $f_i: X \to Y_i$

Luego $\forall i \in J$, $x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f_i(x) \in U_i$, o bien:

$$x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in U = \prod_{i \in J} U_i$$

Luego $\forall U = \prod_{i \in J} U_i \in \mathcal{V}(l), \exists W \in \mathcal{V}(x_0) / x \in (W - \{x_0\}) \cap A \Rightarrow f(x) \in U$

lo cual significa, por definición de límite, que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. csqd.

4.3. PROPOSICION: Sea $X = \prod_{i \in J} X_i$ un espacio producto, y $(\bar{x}_n)_n$ una sucesión de puntos de X. ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\bar{x}_n = (x_n^i)_{i \in J}$). Entonces la sucesión $(\bar{x}_n)_n$ converge hacia un punto $\bar{x} = (x^i)_{i \in J}$ de X si y solo si las sucesiones coordenadas $(x_n^i)_{n \in \mathbb{N}}$, para cada $i \in J$, convergen al correspondiente x^i.

— La demostración de esta proposición es análoga a la demostración de la proposición anterior. Para la condicion necesaria tomamos para cada $i \in J$ un entorno cualquiera V_i de x^i y construimos, a partir de él un entorno de $\bar{x}$, aplicamos luego que $\lim_{n \to \infty} \bar{x}_n = \bar{x}$ y encontramos un natural n_0 a partir del cual a V_i, con lo cual queda probada la condición necesaria. La suficiente es, también, análoga.

- Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ metrizable, es decir, sobre el cual podemos definir una distancia d de modo que la topología $\mathcal{T}_d$ inducida por d en X coincida con $\mathcal{T}$, puede suceder que existan dos distancias d_1 y d_2, o más, sobre X que induzcan la topología $\mathcal{T}$ y de modo que el espacio métrico (X, d_1) sea completo y el espacio métrico (X, d_2) no lo sea. Es decir, el hecho de que dos distancias sobre X, d_1 y d_2, sean topológicamente equivalentes no implica que los espacios métricos (X, d_1) y (X, d_2) sean simultáneamente completos o incompletos. Entonces:

DEFINICION: Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice topológicamente completo si es metrizable y existe una distancia d sobre X que induce la topología $\mathcal{T}$ y tal que el espacio métrico (X, d) sea completo.

OBSERVACION: Si X e Y son dos espacios topológicos homeomorfos, entonces X e Y son simultáneamente topológicamente completos o incompletos, pues los abiertos de ambos espacios se "comportan del mismo modo". Entonces:

4.4. PROPOSICION: Sea $\{E_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de espacios topológicos. Entonces el espacio producto $E = \prod_{i=1}^n E_i$ es topológicamente completo si y sólo si los espacios coordenadas son topológicamente completos.

Demostr: $\overset{N}{\Rightarrow}$ | Si $E = \prod_{i=1}^n E_i$ es un espacio topológicamente completo existe una distancia d sobre E de modo que el espacio métrico (E, d) es completo. Consideremos para cada i el subespacio de E, $F = \{a_1\} \times \{a_2\} \times \ldots \times \{a_{i-1}\} \times E_i \times \{a_{i+1}\} \times \ldots \times \{a_n\}$, donde $\forall j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$, $a_j \in E_j$. F es un subespacio cerrado de E, por ser un conjunto producto de cerrados de los respectivos espacios coordenadas. Por la PROPOSICION 1.6 del Tema 6º sabemos que F es homeomorfo a E_i. Entonces, por la OBSERVACION anterior, F y E_i son simultáneamente topológicamente completos o incompletos. F, por ser un subespacio cerrado de E, es completo, pues E es completo. Luego $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, E_i es completo. Pero F es, además, topológicamente completo pues la restricción de d a F hace a F completo. Luego, E_i es topológicamente completo.

$\Leftarrow$ | Si $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, E_i es topológicamente completo, existe para cada i una distancia d_i sobre E_i de modo que (E_i, d_i) es completo.
Consideremos sobre E la distancia d_∞, que, como sabemos, es

nida del siguiente modo:

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, $d_\infty(\bar{x},\bar{y}) = \max_{1\leq i\leq n} d_i(x^i, y^i)$, siendo $\bar{x} = (x^i)_{i=1}^n \wedge \bar{y} = (y^i)_{i=1}^n$

La distancia d_∞ induce sobre E la topología producto. Probemos que (E, d_∞) es completo, con lo cual E será topológicamente completo.

Sea $(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en (E, d_∞).

Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / p,q \geq \nu \Rightarrow d_\infty(\bar{x}_p, \bar{x}_q) < \varepsilon$.

Siendo $d_\infty(\bar{x}_p,\bar{x}_q) = \max_{1\leq i\leq n} d_i(x_p^i, x_q^i)$ se deduce que

si $d_\infty(\bar{x}_p,\bar{x}_q) < \varepsilon \Rightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\}, d_i(x_p^i, x_q^i) < \varepsilon$.

Entonces, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_i.

Siendo (E_i, d_i) completo, por hipótesis, se deduce que

$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \exists x^i \in E_i / (x_k^i)_k \longrightarrow x^i$

Si llamamos $\bar{x} = (x^i)_{i=1}^n$ se deduce fácilmente que:

$(\bar{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow \bar{x} \in E$.

Luego, toda sucesión de Cauchy en E es convergente. Por tanto, E es completo. c.q.d.

OBSERVACION: Para demostrar la condición suficiente hemos considerado sobre E la distancia d_∞; la proposición sigue siendo cierta si consideramos sobre E cualquier distancia sobre E que sea uniformemente equivalente (o simplemente, equivalente) a d_∞, como son, por ejemplo, las distancias d_p.

Basta probar que existe un homeomorfismo uniforme entre (E, d_∞) y (E, d_p).

La identidad $i: (E, d_\infty) \longrightarrow (E, d_p)$ es una biyección. Veamos que i e i^{-1} son uniformemente continuas.

Siendo d_∞ y d_p u-equivalentes (Tema 3º), $\exists a, b > 0 / a\, d_p(\bar{x},\bar{y}) \leq d_\infty(\bar{x},\bar{y}) \leq b\, d_p(\bar{x},\bar{y})$.

Hay que ver que, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / d_\infty(\bar{x},\bar{y}) < \delta \Rightarrow d_p(i(\bar{x}), i(\bar{y})) = d_p(\bar{x},\bar{y}) < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, es suficiente tomar $\delta = a\varepsilon$. Entonces, si $d_\infty(\bar{x},\bar{y}) < a\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow a\, d_p(\bar{x},\bar{y}) < a\varepsilon \Rightarrow d_p(\bar{x},\bar{y}) < \varepsilon$.

Análogamente, i^{-1} es uniformemente continua, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{b}$.

Entonces, por TEOREMA 1.4, si (E, d_∞) es completo $\Rightarrow (E, d_p)$ es completo.

Como d_p induce en E la topología producto, (E, d_p) es topológicamente completo.

5. APLICACIONES CONTRACTIVAS. TEOREMA DEL PUNTO FIJO EN ESPACIOS COMPLETOS

* DEFINICION: Una aplicación f entre dos espacios métricos $M_1 = (E_1, d_1)$ y $M_2 = (E_2, d_2)$ se dice que es contractiva si es lipschitziana de constante

te $K<1$. Es decir:

$[f:(E_1,d_1)\longrightarrow(E_2,d_2)$ es contractiva$]\overset{def}{\Longleftrightarrow}[\exists \underset{K>0}{K<1} / d_2(f(x),f(y))\leq K d_1(x,y), \forall x,y\in E_1]$

5.1. PROPOSICION: Toda aplicación contractiva es uniformemente continua.

Demostr.: Hay que probar que $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 / \underset{x,y\in E_1}{d_1(x,y)<\delta} \Rightarrow d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Dado $\varepsilon>0$ tomamos $\delta=\frac{\varepsilon}{K}>0$; entonces:

$$\underset{x,y\in E_1}{d_1(x,y)<\frac{\varepsilon}{K}} \Rightarrow d_2(f(x),f(y))\leq K d_1(x,y)<K\cdot\frac{\varepsilon}{K}=\varepsilon. \text{ csqd.}$$

*5.2. TEOREMA: Teorema del punto fijo en espacios completos.

Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico completo y $T:E\to E$ una aplicación contractiva. Entonces la aplicación T tiene un único punto fijo, es decir $\dot{\exists} x\in E / Tx = x$. (*)

Demostr.: Sea x_0 un punto de E. Consideremos la sucesión:

$x_1=Tx_0,\ x_2=Tx_1=T^2x_0, \ldots, x_n=Tx_{n-1}=T^nx_0, \ldots$

Probemos que la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy.

La aplicación T es contractiva, luego $\forall y,z\in E$, $d(Ty,Tz)\leq c\,d(y,z)$, $0<c<1$.

Sean p y q dos naturales cualesquiera. Supongamos $p<q$, entonces:

$d(x_p,x_q)\leq d(x_p,x_{p+1})+d(x_{p+1},x_{p+2})+\ldots+d(x_{q-1},x_q)$, por la desigualdad triangular aplicada repetidamente.

Vamos a acotar, para cada $K\in\mathbb{N}$, la distancia $d(x_K,x_{K+1})$:

$$d(x_K,x_{K+1})=d(Tx_{K-1},Tx_K)\leq c\,d(x_{K-1},x_K)=$$
$$=c\,d(Tx_{K-2},Tx_{K-1})\leq c^2 d(x_{K-2},x_{K-1})\leq\ldots\leq$$
$$\leq c^K d(x_0,x_1)$$

Entonces $d(x_p,x_q)\leq c^p d(x_0,x_1)+c^{p+1}d(x_0,x_1)+\ldots+c^{q-1}d(x_0,x_1)=$

$$=c^p(1+c+c^2+\ldots+c^{q-p-1})\,d(x_0,x_1)$$

Pero $1+c+c^2+\ldots+c^{q-p-1}\leq\sum_{n=0}^{\infty}c^n=\frac{1}{1-c}$

Luego $d(x_p,x_q)\leq c^p\frac{1}{1-c}d(x_0,x_1)$

El número $\frac{d(x_0,x_1)}{1-c}=M$ es constante, luego:

$$d(x_p,x_q)\leq M c^p.$$

Siendo $c<1$, $(Mc^p)_{p\in\mathbb{N}}\longrightarrow 0$. Luego tomando p suficiente mente avanzado podemos hacer $d(x_p, x_q) < \varepsilon$, dado un $\varepsilon > 0$ fijo. Luego $(x_n)_n$ es una sucesión de Cauchy en $M = (E, d)$, el cual, por hipótesis, es completo. Luego $(x_n)_n$ es convergente en **E** hacia un punto x. Probemos que x es punto fijo de T.

Siendo T continua, por ser contractiva, si $(x_n)_n \longrightarrow x$, entonces $(Tx_n)_n \to Tx$. Pero $\forall n \in \mathbb{N}$, $Tx_n = x_{n+1}$. Luego $(Tx_n)_n$ es una sucesión parcial de $(x_n)_n$ obtenida de esta al suprimir el primer término. Por tanto

$$(Tx_n)_n \longrightarrow x.$$

Por la unicidad del límite en un espacio métrico debe ser $Tx = x$. Por tanto, existe al menos un punto fijo x de T. Veamos que es único.

Supongamos que existe otro punto y de E tal que $Ty = y$. Entonces $d(Tx, Ty) \leq c\, d(x,y)$, por ser T contractiva. Pero $Tx = x$ y $Ty = y$. Luego:

$$d(x,y) \leq c\, d(x,y)$$

Entonces debe ser $d(x,y) = 0$, pues si fuese $d(x,y) > 0$, siendo $c < 1$ sería $c\, d(x,y) < d(x,y) \Rightarrow d(x,y) < d(x,y)$ lo cual es absurdo. Luego $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. c.s.q.d.