TEMA 12: ESPACIOS COMPACTOS

1. Definición

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice compacto si es separado y verifica el siguiente axioma, llamado de **Borel-Lebesgue**:
"Todo recubrimiento abierto de X admite un subrecubrimiento finito."

Ejemplos: ① Todo espacio topológico finito es compacto, pues cualquier recubrimiento del mismo es finito.

② $\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto. Evidentemente la familia $\{]-n, n[\,/\, n\in\mathbb{N}\}$ constituye un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$. Sin embargo de él no podemos extraer un subrecubrimiento finito, pues si existiesen naturales $n_1, \dots, n_k$ tal que $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{k}]-n_i, n_i[$, siempre podemos considerar el natural $N = \max_{1\le i\le k} n_i$ y tendríamos trivialmente que $\bigcup_{i=1}^{k}]-n_i, n_i[=]-N, N[$; luego debería ser $\mathbb{R} =]-N, N[$, lo cual es absurdo pues $N\in\mathbb{R}$ y $N\notin]-N, N[$.

DEFINICION: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y A un subconjunto de X; decimos que A es un compacto en X si el subespacio $(A, \mathcal{T}_A)$ es compacto, siendo $\mathcal{T}_A$ la topología de subespacio inducida por $\mathcal{T}$ en A.

1.1. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico separado y A un subespacio de X. Entonces A es compacto si y solo si todo recubrimiento de A por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.

Demostr.: $\Rightarrow$) Supuesto que A es compacto probemos que todo recubrimiento de A por abiertos de X admite un subrecubrimiento finito.
Sea $R = (U_i)_{i\in J}$ un recubrimiento de A por abiertos de X:

$$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i \Rightarrow A = \bigcup_{i\in J}(U_i\cap A)$$

La familia $R_A = (U_i\cap A)_{i\in J}$ es un recubrimiento abierto de A, del cual, por ser A compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito.
Luego $\exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset J \,/\, A = \bigcup_{j=1}^{n}(U_{i_j}\cap A) \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$$

Por tanto hemos extraído de R un subrecubrimiento finito.

$\Leftarrow$) Sea $R_A = (U_i^A)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de A (...)
Entonces $A = \bigcup U_i^A$.

$\forall i \in J$, $\mathcal{U}_i^A \in \mathcal{T}_A \Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_i \in \mathcal{T} \,/\, \mathcal{U}_i^A = \mathcal{U}_i \cap A$. Luego

$$A = \bigcup_{i\in J} (\mathcal{U}_i \cap A) = A \cap \left(\bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i\right) \Rightarrow A \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i$$

Tenemos entonces un recubrimiento de A por abiertos de X, del cual, por hipótesis, podemos extraer un subrecubrimiento finito. Luego $\exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset J \,/\, A \subset \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}$

Luego $A = A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}\right) = \bigcup_{j=1}^{n} (\mathcal{U}_{i_j} \cap A) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{i_j}^A$

Hemos extraído de $\mathcal{R}_A$ un subrecubrimiento finito, lo cual prueba que $(A, \mathcal{T}_A)$ es compacto, pues además, siendo X separado, A es separado. csqd.

En general, no todo subespacio de un espacio compacto es compacto; sin embargo:

1.2. PROPOSICION: Todo subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto

Demostr.: Sea F un subespacio cerrado de un espacio topológico compacto X. Entonces $\complement F$ es abierto.

Sea $\mathcal{R} = (\mathcal{U}_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de F, $F \subset \bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i$.

Entonces $X = \left(\bigcup_{i\in J} \mathcal{U}_i\right) \cup \complement F$. Tenemos, por tanto, un recubrimiento abierto de X, del cual, por ser X compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito. Sea

$$X = \mathcal{U}_{i_1} \cup \mathcal{U}_{i_2} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n} \cup \complement F$$

Entonces $F = X \cap F = [\mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n} \cup \complement F] \cap F =$

$= [\mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}] \cap F$, pues $F \cap \complement F = \emptyset$. Luego:

$$F \subset \mathcal{U}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{U}_{i_n}.$$

Además si X es compacto, es separado; luego F es separado. Por tanto, F es compacto. csqd.

1.3. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico separado. Entonces todo subespacio topológico compacto de X es cerrado.

Demostr.: Sea F un compacto de X. Probemos que F es cerrado o bien que $\complement F$ es abierto. Probaremos que $\complement F$ es entorno de todos sus puntos.

Sea x_0 un punto de $\complement F$. Entonces, $\forall y \in F$, $y \neq x_0$.

Siendo X separado, $\forall y \in F, \exists U_y \in \mathcal{V}(x_0) \wedge \exists V_y \in \mathcal{V}(y) / U_y \cap V_y = \emptyset$.

Los entornos V_y los podemos considerar abiertos. Entonces, la familia $(V_y)_{y\in F}$ es un recubrimiento abierto de F, del cual, por ser F compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, es decir:

$$\exists \{y_1, \dots, y_n\} \subset F \ / \ F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$$

Sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. Entonces, V es un abierto que contiene a F.

Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. U es una intersección finita de entornos de x_0. Luego $U \in \mathcal{V}(x_0)$.

Además $U \cap V = \emptyset$, pues

$$U \cap V = U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (V_{y_i} \cap U)$$

Pero $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $V_{y_i} \cap U \subset V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$. Luego $U \cap V = \emptyset$.

Por tanto, $U \subset \complement V$. Además, $V \supset F \Rightarrow \complement V \subset \complement F$.

Luego $U \subset \complement F$. Por tanto

$\forall x_0 \in \complement F, \exists U \in \mathcal{V}(x_0) / U \subset \complement F \Rightarrow \complement F$ es abierto $\Rightarrow F$ cerrado. c.s.q.d.

1.4. LEMA: Si X es un espacio topológico separado y F es un compacto de X entonces $\forall x \notin F$, $\exists U \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists V \in \mathcal{V}(F) / U \cap V = \emptyset$.

La demostración es análoga a la de la proposición anterior.

1.5. COROLARIO: Todo espacio topológico compacto es regular.

Demostr.: Sea X un espacio topológico compacto, F un cerrado de X y x un punto que no pertenezca a F. Hay que probar que

$$\exists U \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists V \in \mathcal{V}(F) / U \cap V = \emptyset.$$

Si F es cerrado y X es compacto, entonces F es compacto. Entonces el corolario queda probado por el lema anterior.

1.6. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico separado, A y B dos conjuntos compactos de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces

$$\exists V \in \mathcal{V}(A) \wedge \exists W \in \mathcal{V}(B) / V \cap W = \emptyset.$$

Demostr.: Siendo $A \cap B = \emptyset$, $\forall x \in A$, $x \notin B$. Como B es compacto, en virtud del lema 1.4.

$$\exists V_x \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists W_x \in \mathcal{V}(B) / W_x \cap V_x = \emptyset.$$

No se pierde ninguna generalidad si consideramos V_x abiertos

Como $A \subset \bigcup_{x\in A} V_x$ $\wedge$ A es compacto, entonces

$\exists \{x_1,\dots,x_n\} \subset A \,/\, A \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$.

Sea $V = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n}$. Luego V es abierto $\wedge$ $V \supset A$; por tanto, $V \in \mathcal{V}(A)$.
Además, $B \subset W_{x_1} \cap \dots \cap W_{x_n} = W$. W es una intersección finita de entornos de B, luego $W \in \mathcal{V}(B)$.

Como $V \cap W = \emptyset$, queda probada la proposición. ∎

1.7 TEOREMA: Todo espacio compacto es un espacio normal, es decir,
Si X es compacto y F y G son dos cerrados disjuntos de X entonces existen $U \in \mathcal{V}(F)$ $\wedge$ $V \in \mathcal{V}(G)$ tal que $U \cap V = \emptyset$.

Demostr.: Si X es compacto, es separado. Además, si F y G son cerrados de X, F y G son compactos de X. Luego, el teorema queda probado por la proposición 1.6. csqd.

1.8. PROPOSICION: La imagen continua de un compacto es compacto, es decir
Sea X un espacio topológico, Y un espacio topológico separado y $f: X \to Y$ una aplicación continua. Entonces, si A es un compacto de X, $f(A)$ es un compacto de Y.

Demostr.: $f(A)$ es un subespacio de Y. Siendo Y separado, $f(A)$ es separado. Veamos que verifica el axioma de Borel-Lebesgue.
Sea $(V_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de $f(A)$; $f(A) \subset \bigcup_{i\in J} V_i$

Entonces $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in J} V_i) = \bigcup_{i\in J} f^{-1}(V_i)$

Siendo f continua y V_i abto de Y, $\forall i \in J$, entonces $f^{-1}(V_i)$ es abto de X.
Tenemos entonces un recubrimiento abierto de A, del cual, por ser A compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito.

$\exists \{i_1,\dots,i_n\} \subset J \,/\, A \subset \bigcup_{r=1}^{n} f^{-1}(V_{i_r})$

Luego $f(A) \subset f(\bigcup_{r=1}^{n} f^{-1}(V_{i_r})) = \bigcup_{r=1}^{n} f(f^{-1}(V_{i_r})) \subset \bigcup_{r=1}^{n} V_{i_r}$.

Por tanto, $f(A)$ es compacto. csqd.

1.9. COROLARIO: Sea X un espacio compacto, Y un espacio separado y $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces, f es una aplicación cerrada.

Demostr.: Sea F un cerrado de X. Como X es compacto, F es compacto. Por la proposición anterior, $f(F)$ es compacto en Y

Como Y es separado, $f(F)$ es un cerrado en Y. Luego f es cerrada. csqd.

1.10. COROLARIO: Sea X un compacto, Y un espacio separado y $f: X \to Y$ una aplicación continua y biyectiva. Entonces f es homeomorfismo e Y es compacto.

Demostr.: Por el corolario anterior, f es cerrada. Luego, f es cerrada, continua y biyectiva. Por tanto, f es homeomorfismo.
Si f es biyectiva, $f(X) = Y$. Como X es compacto y f continua, Y es compacto. csqd.

PROPIEDAD DE LA INTERSECCION FINITA. CARACTERIZACION DE COMPACTOS.

DEFINICION: Diremos que una familia de conjuntos $(A_i)_{i \in J}$ tiene la propiedad de la intersección finita si cada subfamilia finita de ella tiene intersección no vacía.

1.10. TEOREMA: CARACTERIZACION DE COMPACTOS.
Un espacio topológico es compacto si y solo si toda familia de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía. Es decir:

$$[X \text{ compacto}] \Leftrightarrow [\forall (F_i)_{i \in J}, F_i \text{ cerrado, tal que } \forall I \in \mathcal{P}_F(J), \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset] \quad (*)$$

Demostr.: $\Rightarrow$ Sea $(F_i)_{i \in J}$ una familia de cerrados con la propiedad de la intersección finita. Probamos que $\bigcap_{i \in J} F_i \neq \emptyset$.
Supongamos que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.
Entonces $X = \complement \bigcap_{i \in J} F_i = \bigcup_{i \in J} \complement F_i$
Por tanto $(\complement F_i)_{i \in J}$ es un recubrimiento abierto de X. Siendo X compacto, $\exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset J / \quad X = \bigcup_{r=1}^{n} \complement F_{i_r} = \complement \bigcap_{r=1}^{n} F_{i_r}$
Luego $\bigcap_{r=1}^{n} F_{i_r} = \emptyset$, lo cual contradice que la familia $(F_i)_{i \in J}$ posee la propiedad de la intersección finita.
$\Leftarrow$ Sea $(U_i)_{i \in J}$ un recubrimiento abierto de X: $X = \bigcup_{i \in J} U_i$.
Entonces $\emptyset = \complement \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcap_{i \in J} \complement U_i$
Consideremos la familia de cerrados $(\complement U_i)_{i \in J}$. Esta familia no satisface la propiedad de la intersección finita, pues si la verificase debería ser, por hipótesis, $\bigcap_{i \in J} \complement U_i \neq \emptyset$. Si no verifica la

propiedad debe existir una subfamilia finita cuya intersección sea vacía, es decir, $\exists \{i_1, \dots, i_n\} \subset J \,/\, \bigcap_{r=1}^{n} \complement U_i = \emptyset$

Luego $\complement \bigcup_{r=1}^{n} U_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{r=1}^{n} U_i = X$.

Hemos extraído, entonces, un subrecubrimiento finito de $(U_i)_{i\in J}$; Luego X es compacto. c.s.q.d.

1.11. COROLARIO: Todo espacio métrico compacto es completo.

Demostr.: Sea $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de cerrados tal que $(\delta(F_n)) \to 0$ de un espacio métrico compacto E. Esta familia verifica la propiedad de la intersección finita trivialmente, pues $\forall I \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N}),\ \exists m_I = \max I$ entonces $\bigcap_{i\in I} F_i = F_{m_I} \neq \emptyset$, por ser una sucesión decreciente. Por ser E compacto, en virtud del teorema anterior se tiene que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_i \neq \emptyset$. Entonces por el teorema de Cantor, E es completo. c.s.q.d.

2. ESPACIOS NUMERABLEMENTE COMPACTOS

DEFINICION: Un espacio topológico X se dice numerablemente compacto si es separado y todo recubrimiento abierto y numerable de X admite un subrecubrimiento finito.

* Una consecuencia inmediata de la definición es que todo espacio compacto es numerablemente compacto.

* Antes de ver un teorema de caracterización de espacios numerablemente compactos vamos a establecer un resultado que ya hemos probado en espacios métricos y que se verifica también en espacios de Hausdorff.

"Sea X un espacio separado y A un subconjunto de X. Entonces un punto a de X es de acumulación de A si y solo si todo entorno de a contiene infinitos puntos de A".

$\Rightarrow$) Sea $a \in A'$. Supongamos que $\exists U \in \mathcal{V}(a) \,/\, U \cap A - \{a\} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Como X es separado, $\exists U_0 \in \mathcal{V}(a) \,/\, \forall i \in \{1, \dots, n\},\ a_i \notin U_0$.

Luego $(U_0 \cap U) \cap A \subset \{a\}$. Como $U_0 \cap U \in \mathcal{V}(a)$, se deduciría que $a \notin A'$ contra la hipótesis. Luego
$\forall U \in \mathcal{V}(a)$, $U \cap A$ es infinito.

$\Leftarrow$) Trivial, pues si cada entorno de a posee infinitos puntos de A, contiene al menos un punto distinto de a

2.1. TEOREMA: Sea X un espacio topológico separado. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) X es numerablemente compacto.

b) Cada conjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.

c) Cada sucesión de puntos de X tiene un valor de adherencia.

Demostr.: a) $\Rightarrow$ b)| Sabemos que todo conjunto infinito B de X contiene un subconjunto B_0 infinito numerable. Como $B_0' \subset B'$, es suficiente que probemos todo conjunto infinito numerable de X posee un punto de acumulación.

Sea A un subconjunto infinito numerable de X. Supongamos que $A' = \emptyset$. Entonces, A es cerrado, pues $\bar{A} = A \cup A' = A$.

Sea $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Siendo $A' = \emptyset$, todos los puntos de A son aislados. Luego

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists U_i \text{ abto} \in \mathcal{V}(a_i) / U_i \cap A = \{a_i\}. \quad (I)$$

Como $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \Rightarrow X = \complement A \cup (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i)$.

Tenemos entonces un recubrimiento abierto y numerable de X, el cual no admite un subrecubrimiento finito, pues si

$$\exists J \in \mathcal{P}_F(\mathbb{N}) / X = (\bigcup_{j\in J} U_j) \cup \complement A$$

será $A = X \cap A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$, pues $A \cap \complement A = \emptyset$.

Como A es infinito, debe existir un índice $j \in J$ tal que U_j contiene infinitos puntos de A, pues si todos los U_j fuesen finitos sería $\bigcup_{j\in J} U_j$ finito, lo cual contradice que A es infinito. Luego existe $j \in J$ tal que U_j tiene infinitos puntos de A, pero esto es de nuevo absurdo, pues cada U_i contiene un solo punto de A: el a_i, según (I).

Entonces X no será numerablemente compacto contra la hipótesis. Entonces $A' \neq \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ c)| Sea

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{N} &\longrightarrow X \\ n &\longmapsto \varphi(n) = x_n \end{aligned}$$

una sucesión de puntos de X. El conjunto de puntos de la sucesión es $\varphi(\mathbb{N})$.

- Si $\varphi(\mathbb{N})$ es finito, debe existir un punto x_0 de X que se repite infinitas veces en la sucesión, es decir

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n / x_k = x_0$$

Entonces, x_0 es un valor de adherencia de la sucesión, pues:
como $\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x_0)$, $x_0 \in \mathcal{U}$, se tiene que

$(\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x_0)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}), \exists K \geq n / x_K = x_0 \in \mathcal{U}$.

– Supongamos que $\varphi(\mathbb{N})$ es infinito. Entonces card$(\varphi(\mathbb{N})) = \aleph_0$.
Entonces, según b), $\varphi(\mathbb{N}) = A$ posee un punto de acumulación, es decir

$\exists x_0 \in X / x_0 \in A'$.

Probemos que x_0 es un valor de adherencia de la sucesión, es decir, que $(\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x_0)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}), \exists K \geq n / x_K \in \mathcal{U}$.

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x_0)$, $\mathcal{U} \cap A$ es infinito, pues $x_0 \in A'$, y X es separado.
Entonces $\forall n \in \mathbb{N}, \exists K \geq n / x_K \in \mathcal{U}$, pues si $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall K \geq n_0, x_K \notin \mathcal{U}$ se tendría que $\mathcal{U} \cap A$ contiene a lo máximo los $n_0 - 1$ primeros términos de la sucesión, lo cual contradice que $\mathcal{U} \cap A$ es infinito. Entonces debe verificarse que:

$(\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x_0)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}), \exists K \geq n / x_K \in \mathcal{U}$.

c) $\Rightarrow$ a) Procederemos por reducción al absurdo.
Si X no es numerablemente compacto, existe un recubrimiento abierto y numerable $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X tal que no admita un subrecubrimiento finito.
Entonces $X - \mathcal{U}_1 \neq \emptyset$, pues si $X - \mathcal{U}_1 = \emptyset \Rightarrow X \subset \mathcal{U}_1$, en contra de que $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no admite un subrecubrimiento finito.
Sea $x_1 \in X - \mathcal{U}_1$
Análogamente $X - (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2) \neq \emptyset$, sea $x_2 \in X - (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$.
En general, $\forall K \in \mathbb{N}, \exists x_K \in X - (\bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{U}_i)$. Consideremos la sucesión $(x_n)_n$
Probemos que esta sucesión no posee ningún valor de adherencia, es decir, que

$\forall x \in X, \exists \mathcal{U} \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists n_x \in \mathbb{N} / \forall K > n_x, x_K \notin \mathcal{U}_{n_x}$.

Sea $x \in X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n \Rightarrow \exists n_x \in \mathbb{N} / x \in \mathcal{U}_{n_x}$ abto. Luego $\mathcal{U}_{n_x} \in \mathcal{V}(x)$

Entonces $\forall K > n_x$, $x_K \notin \mathcal{U}_{n_x}$, pues $K > n_x \Rightarrow n_x \in \{1, \dots, K\}$
Como $x_K \in X - \bigcup_{i=1}^{K} \mathcal{U}_i \Rightarrow x_K \notin \mathcal{U}_{n_x}$.

Luego $\forall x \in X, \exists \mathcal{U}_{n_x} \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists n_x \in \mathbb{N} / \forall K > n_K, x_K \notin \mathcal{U}_{n_x}$.
Luego $(x_n)_n$ no posee ningún valor de adherencia, en contra de que se verifica c). Luego la tesis es cierta. c.s.q.d.

3. Espacios métricos precompactos

DEFINICION: Un espacio métrico $M=(E,d)$ se dice precompacto o totalmente acotado si para cada $\varepsilon>0$ el recubrimiento $E=\bigcup_{x\in E} B(x,\varepsilon)$ admite un subrecubrimiento finito

$$E = B(x_1,\varepsilon)\cup\ldots\cup B(x_n,\varepsilon)$$

- Un recubrimiento de la forma $\{B(x_i,\varepsilon)\}_{i=1}^n$ se llama un ε-recubrimiento finito de E. Luego, se deduce inmediatamente de la definición, que

(E es precompacto) $\Leftrightarrow$ (E admite, para cada $\varepsilon>0$, un ε-recubrimiento finito).

Los puntos $\{x_i\}_{i=1}^n$ dependen de ε. Para cada $\varepsilon>0$, llamamos ε-red de E al conjunto $D_\varepsilon=\{x_1,\ldots,x_n\}$.

- Se deduce inmediatamente que todo espacio métrico compacto es precompacto.

DEFINICION: Un subespacio A de un espacio métrico E se dice precompacto si $\forall\varepsilon>0$, el recubrimiento $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in A}$ admite un ε-recubrimiento finito.

3.1. PROPOSICION: Sea (E,d) un espacio métrico y A un subespacio de E. Entonces, si A es precompacto o totalmente acotado, es acotado. Además, $\bar{A}$ es precompacto.

Demostr.: * Si A es precompacto, $\forall\varepsilon>0, \exists D_\varepsilon=\{x_i\}_{i=1}^n / A\subset\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$.
$\forall i\in\{1,\ldots,n\}$, $\delta(B(x_i,\varepsilon))\leq 2\varepsilon$ (PROPOSICION 3.1., TEMA 2°).
Luego, para cada i, $B(x_i,\varepsilon)$ es acotada.
Luego $\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$ es acotado, como unión finita de conjuntos acotados.
Por tanto A es acotado.

* Hay que probar que $\forall\varepsilon>0, \exists D_\varepsilon=\{x_i\}_{i=1}^n / \bar{A}\subset\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$.
Siendo A precompacto, dado $\varepsilon/2>0$ existe un ~~ex~~ $\varepsilon/2$-recubrimiento finito de A.
Luego $\exists D_\varepsilon=\{x_i\}_{i=1}^n / A\subset\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon/2)$.
Luego $\bar{A}\subset\overline{\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon/2)}\subset\bigcup_{i=1}^n B'(x_i,\varepsilon/2)\subset\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)$. csqd.

Observación: Se deduce de aquí que $\mathbb{R}$ no es precompacto, pues si fuese precompacto sería acotado, y $\mathbb{R}$ no es acotado.

3.2. TEOREMA: Un espacio métrico $M=(E,d)$ es precompacto sii toda sucesión de puntos de E admite una sucesión parcial de Cauchy.

Demostr.: $\Rightarrow$] Sea $(x_n)_n$ una sucesión de puntos de E.
Por ser E precompacto, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, existe un $\frac{1}{2}$-recubrimiento finito de E: $E = \bigcup_{i=1}^{n_2} B(z_i^2, \frac{1}{2})$

Al menos una de las bolas $B(z_i^2, \frac{1}{2})$, $1 \leq i \leq n_2$, posee infinitos términos de la sucesión. Con estos términos, ordenando los índices en orden creciente podemos formar una subsucesión (x_{i_2}) de (x_n).
Entonces $\forall i, j$, $d(x_{i_2}, x_{j_2}) \leq \delta(B(z_i^2, \frac{1}{2})) \leq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Dado $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\exists$ $\frac{1}{3}$-recubrimiento finito de E: $E = \bigcup_{i=1}^{n_3} B(z_i^3, \frac{1}{3})$

Tenemos un número finito de bolas, luego, al menos una de ellas contiene infinitos términos de la subsucesión (x_{i_2}). Ordenando los índices convenientemente obtenemos una sucesión parcial de (x_{i_2}), y por tanto, de (x_n), que denotamos por (x_{i_3}). Además se verifica que:

$$d(x_{i_3}, x_{j_3}) \leq \delta(B(z_i^3, \tfrac{1}{3})) \leq 2 \cdot \tfrac{1}{3}$$

Así sucesivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon = \frac{1}{n}$, existe un $\frac{1}{n}$-recubrimiento finito. Una de estas bolas contiene infinitos términos de la sucesión $(x_{i_{n-1}})$. Ordenando crecientemente los índices con estos infinitos términos de $(x_{i_{n-1}})$ construimos una subsucesión (x_{i_n}) de $(x_{i_{n-1}})$ y, por tanto, de (x_n). Se verifica además que: $d(x_{i_n}, x_{j_n}) \leq 2 \cdot \frac{1}{n}$.
Tenemos entonces las sucesiones:

$$\begin{array}{l}
\to x_{1_1}, x_{2_1}, \dots, x_{n_1}, \dots \\
\to x_{1_2}, x_{2_2}, \dots, x_{n_2}, \dots \\
- - - - - - - - - - - - \\
\to x_{1_n}, x_{2_n}, \dots, x_{n_n}, \dots
\end{array}$$

cada una de las cuales es subsucesión de la anterior. Consideremos la sucesión diagonal (x_{i_i}), que es una sucesión parcial de (x_n). Probemos que x_{i_i} es de Cauchy.
Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon$.

Entonces, probemos que $\forall p, q \geq \nu$, $d(x_{p_p}, x_{q_q}) < \varepsilon$.
Si $p = q$, $d(x_{p_p}, x_{p_p}) = 0$.
Supongamos $p < q$. Entonces (x_{i_q}) es subsucesión de (x_{i_p}), luego
$x_{p_p} \in (x_{i_p}) \quad \wedge \quad x_{q_q} \in (x_{i_p})$

$d(x_{p_p}, x_{q_q}) < \frac{2}{p} < \varepsilon$, pues $p \geq \nu$. Luego (x_{ii}) es de Cauchy.

$\Leftarrow$ Supongamos que E no es precompacto. Sea x_1 un punto de E, y $\varepsilon > 0$ un número arbitrario.

Entonces $\exists x_2 \in E \,/\, d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$

pues si $\forall x \in E \,/\, d(x_1, x) < \varepsilon \Rightarrow E = B(x_1, \varepsilon)$, luego E admitiría un ε-recubrimiento finito, en contra de que no es precompacto.

Análogamente $\exists x_3 \in E \,/\, d(x_1, x_3) \geq \varepsilon \wedge d(x_2, x_3) \geq \varepsilon$

pues de suceder lo contrario, $\forall x \in E \,/\, d(x_1, x) < \varepsilon \vee d(x_2, x) < \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow E = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, y E admitiría un ε-recubrimiento finito en contra de que no es precompacto.

Así sucesivamente construimos una sucesión de puntos de E tales que $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $d(x_p, x_q) \geq \varepsilon$. Luego (x_n) no admite ninguna sucesión parcial de Cauchy, en contra de la hipótesis. Entonces, E es precompacto. csqd.

3.3. PROPOSICION: Todo espacio métrico precompacto es separable, es decir, admite un subconjunto numerable y denso.

Demostr.: Siendo E precompacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $\frac{1}{n}$-recubrimiento finito de E, es decir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists D_{\frac{1}{n}} = \{x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{kn}\} \,/\, E = B(x_{1n}, \tfrac{1}{n}) \cup \dots \cup B(x_{kn}, \tfrac{1}{n})$$

Para cada n, la $\frac{1}{n}$-red es finita. Tomemos entonces

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}}$$

D es un subconjunto numerable de E, por ser unión numerable de conjuntos finitos. Probemos que D es denso, es decir, que $E \subset \overline{D}$.

Hemos de probar que $(\forall x \in E) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})$, $B(x, \frac{1}{n}) \cap D \neq \emptyset$

pues las bolas de centro x y radios $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ constituye un sistema fundamental de entornos de x.

Dado $x \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists i \in \{1, \dots, k\} \,/\, x \in B(x_{in}, \frac{1}{n}) \Rightarrow x_{in} \in B(x, \frac{1}{n})$

Luego, como $x_{in} \in D_{\frac{1}{n}} \subset D$, se deduce que $x \in \overline{D}$. csqd.

3.4. COROLARIO: Todo espacio métrico E precompacto es de Lindelöf.

Demostr.: Si E es un espacio métrico precompacto, es separable. Según teorema 4.5, TEMA 10, si E espacio métrico, E separable sii E de Lindelöf. Luego E es de Lindelöf. csqd.

4. Espacios secuencialmente compactos

DEFINICION: Un espacio topológico X separado se dice secuencialmente compacto si toda sucesión de puntos de X admite una sucesión parcial convergente.

4.1. TEOREMA: Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) E es compacto.

b) E es numerablemente compacto.

c) E es secuencialmente compacto.

Demostr.: La equivalencia de b) y c) es trivial, pues según Teorema 2.1, E es numerablemente compacto sii cada sucesión de puntos de E posee un valor de adherencia, y según Proposición 4.3, Tema 8, una sucesión en E posee un valor de adherencia sii existe una sucesión parcial convergente y esto equivale, por definición, a decir que E es secuencialmente compacto. Luego b) ⟺ c).

Además a) ⟹ b) trivialmente. Si probamos que b) ⟹ a), quedará probado el teorema.

b) ⟹ a) Si E es numerablemente compacto, es secuencialmente compacto y, por tanto, precompacto, pues toda sucesión convergente es de Cauchy. Luego si toda sucesión de E admite una sucesión parcial convergente, toda sucesión en E admite una sucesión de Cauchy en E, y, por tanto, E es precompacto.

Si E es precompacto, es de Lindelöf.

Luego si E es numerablemente compacto, es de Lindelöf.

Dado un recubrimiento abierto $(U_i)_{i\in J}$ de E, existe un subrecubrimiento numerable, por ser E de Lindelöf.

$$E=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_{i_n}$$

Siendo E numerablemente compacto, el recubrimiento abierto numerable $(U_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ admite un subrecubrimiento finito:

$$E=U_{i_{n_1}}\cup\ldots\cup U_{i_{n_k}}$$

Luego E es compacto. csqd.

4.2. COROLARIO: Un espacio métrico $M=(E,d)$ es compacto si y sólo si es precompacto y completo.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si E es compacto, es precompacto y completo (corolario 1.11).
$\Leftarrow$] Si E es precompacto, toda sucesión en E admite una sucesión parcial de Cauchy. Siendo E completo, toda sucesión de Cauchy en E es convergente en E. Luego, toda sucesión en E admite una subsucesión convergente en E. Luego E es secuencialmente compacto, y, por el teorema anterior, E es compacto. csqd.

5. OTRAS PROPIEDADES DE APLICACIONES CONTINUAS SOBRE COMPACTOS

5.1. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico compacto y $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua. Entonces $f(X)$ está acotado y existen dos puntos $x_1, x_2 \in X$ tal que

$$f(x_1) = \inf_{x\in X} f(x) \quad \wedge \quad f(x_2) = \sup_{x \in X} f(x)$$

Además, si $f(x) > 0, \forall x \in X$, entonces $\exists \delta > 0 / f(x) \geq \delta, \forall x \in X$.

Demostr.: Como $\mathbb{R}$ es separado, X compacto y $f: X \to \mathbb{R}$ continua, según 1.8 Proposición, $f(X)$ es compacto en $\mathbb{R}$. Sabemos que en $\mathbb{R}$ los conjuntos compactos son los cerrados y acotados. Entonces $f(X)$ es cerrado y acotado. Si $f(X)$ es acotado, existen $\inf_{x\in X} f(x)$ y $\sup_{x \in X} f(x)$. Estos números reales son puntos adherentes de $f(X)$. Como $f(X)$ es cerrado

$$\exists x_1 \in X / f(x_1) = \inf_{x \in X} f(x) \quad \wedge \quad \exists x_2 \in X / f(x_2) = \sup_{x\in X} f(x)$$

Si $f(x) > 0, \forall x \in X \Rightarrow \delta = \inf_{x \in X} f(x) > 0$, pues $\inf_{x\in X} f(x) \in f(X)$

Luego $\exists \delta > 0 / f(x) \geq \delta, \forall x \in X$. csqd.

CONSECUENCIAS: ① Sea $M = (E, d)$ un espacio métrico. Si A es un compacto de E, entonces A es cerrado y acotado.

Demostr. Sea a_0 un punto fijo de A. Definimos la aplicación

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto f(a) = d(a, a_0)$$

f es continua, es más, es uniformemente continua pues sabemos que $|d(a,a_0) - d(b,a_0)| \leq d(a,b)$.
A es cerrado por ser compacto en un espacio métrico, que siempre es separado.
Además el conjunto $f(A) = \{d(a,a_0) / a \in A\}$ es acotado según la proposición anterior. Por tanto, $\exists m \in \mathbb{R} / d(a,a_0) \leq m, \forall a \in A$.
Luego, $\forall a, b \in A$, $d(a,b) \leq d(a,a_0) + d(b,a_0) \leq 2m$.
Luego $\delta(A) \leq 2m$. Por tanto, A es acotado. csqd.

✱ El recíproco en general no es cierto, pues si A es un s[illegible] de un espacio métrico discreto, es cerrado ($\forall A \in \mathcal{P}(E)$, A cerrado) y ac[illegible] ($\delta(A) \leq 1$)

Sin embargo, A no es compacto pues el recubrimiento abierto $(\{x\})_{x\in A}$ no admite ningún subrecubrimiento finito.

② Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico.

a) Si A es un compacto no vacío de E y $B\neq\emptyset$ una parte de E entonces

$$\exists a_0\in A \,/\, d(A,B)=d(a_0,B).$$

b) Si A es un compacto no vacío de E y $B\neq\emptyset$ es un cerrado de E tales que $A\cap B=\emptyset$, entonces $d(A,B)>0$

Demostr.: a) Consideremos la aplicación

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto f(a)=d(a,B)$$

Sabemos que f es uniformemente continua; en particular, es continua.

Como A es compacto y $\mathbb{R}$ separado, $f(A)$ alcanza el mínimo en A, es decir

$$\exists a_0\in A \,/\, f(a_0)=\min_{a\in A} f(a) \Leftrightarrow \exists a_0\in A\,/\, d(a_0,B)=\min_{a\in A} d(a,B)=\inf_{a\in A} d(a,B)$$

Como $d(A,B)=\inf_{a\in A,\, b\in B} d(a,b)=\inf_{a\in A}\left[\inf_{b\in B} d(a,b)\right]=\inf_{a\in A} d(a,B)$

Luego $\exists a_0\in A\,/\, d(A,B)=d(a_0,B)$.

b) Si A es compacto, $A\neq\emptyset$, por a), $\exists a\in A\,/\, d(A,B)=d(a,B)$

Si fuese $d(A,B)=0 \Rightarrow d(a,B)=0 \Rightarrow a\in\overline{B}=B$, pues B es cerrado.

Sería entonces $A\cap B\neq\emptyset$ en contra de la hipótesis.

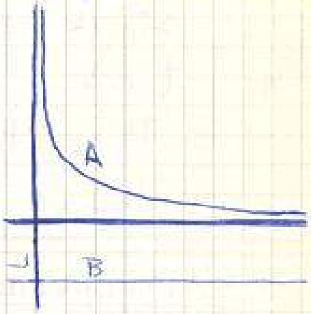
* - Si imponemos la condición, más débil, de que A sea cerrado, a) no tiene porque verificarse. Consideremos los conjuntos

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, \underset{x>0,\, y>0}{xy=1}\}$

$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\, y=-1\}$. A y B son cerrados.

Entonces $d(A,B)=1$, sin embargo

$\forall a\in A,\ d(a,B)>1$.



- Si en b) A es cerrado simplemente, el teorema no se verifica necesariamente. Si $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\, x>0, y>0 \wedge xy=1\}$ y $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\, y=0\}$, A y B son cerrados disjuntos y $d(A,B)=0$.

③ Si A y B son dos compactos no vacíos de un espacio métrico existen $a\in A$ y $b\in B$ tales que $d(a,b)=d(A,B)$

Demostr. A compacto y B subconjunto de E $\overset{a)}{\Rightarrow} \exists a\in A\,/\, d(a,B)=d(A,B)$.

B compacto y $\{a\}$ subconjunto de E $\overset{a)}{\Rightarrow} \exists b\in B\,/\, d(a,b)=d(a,B)$

Luego $\exists (a,b)\in A\times B\,/\, d(a,b)=d(A,B)$. c.s.q.d.

5.2. Lema de Lebesgue

Sea $M=(E,d)$ un espacio métrico compacto. Para cada recubrimiento –

todo abierto $\mathcal{R}=(U_i)_{i\in J}$ de E existe un número $\lambda(\mathcal{R})>0$ tal que si A es un conjunto con $\delta(A)<\lambda$, existe $i\in J / A\subset U_i$ y también, $\forall x\in E$, $\exists i\in J / B(x,\lambda)\subset U_i$.

Demostr.: $E=\bigcup_{i\in J} U_i$. Luego $\forall x\in E$, $\exists i\in J / x\in U_i$

Como U_i es abto, $U_i\in V(x)$. Luego $\exists r_x>0 / B(x,r_x)\subset U_i$

Consideremos el recubrimiento abierto de E

$$E=\bigcup_{x\in E} B(x,\frac{r_x}{2})$$

Siendo E compacto, $\exists \{x_i\}_{i=1}^n\subset E / E=\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\frac{r_{x_i}}{2})$

Sea $\lambda=\min_{1\le i\le n}\frac{r_{x_i}}{2}>0$

Dado $x\in E$, $\exists k\in\{1,\dots,n\} / x\in B(x_k,\frac{r_{x_k}}{2})\subset B(x_k,r_{x_k})\subset U_{i_k}$

Probemos que $B(x,\lambda)\subset B(x_k,r_{x_k})$ con lo cual quedará probado que $\exists i_k\in J / B(x,\lambda)\subset U_{i_k}$.

$\forall z\in B(x,\lambda)$, $d(x_k,z)\le d(x_k,x)+d(x,z)<\frac{r_{x_k}}{2}+\lambda$

pues $x\in B(x_k,\frac{r_{x_k}}{2})$ y $z\in B(x,\lambda)$. Como $\lambda\le\frac{r_{x_k}}{2}$ se tiene que

$$d(x_k,z)<\frac{r_{x_k}}{2}+\frac{r_{x_k}}{2}=r_{x_k}\Rightarrow z\in B(x_k,r_{x_k})$$

Luego $B(x,\lambda)\subset B(x_k,r_{x_k})\subset U_{i_k}$.

Si A es un subconjunto de E de diámetro menor que λ se tiene que dado $a\in A$, $A\subset B(a,\lambda)$.

Para $B(a,\lambda)$, $\exists j\in J / B(a,\lambda)\subset U_j$, según se ha probado antes

Luego $A\subset U_j$. c.s.q.d.

5.3. TEOREMA: Sean $M=(E,d)$ y $M_1=(E_1,d_1)$ dos espacios métricos. Entonces toda función continua sobre un compacto de E es uniformemente continua en el compacto. O también, si E es compacto y $f: E\to E_1$ es continua, entonces f es uniformemente continua.

Demostr.: Hay que probar que $\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0 / d(x,y)<\delta\Rightarrow d_1(f(x),f(y))<\varepsilon$ $x,y\in E$

ó lo que es equivalente: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta(\varepsilon)>0 / f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$ $\forall x\in E$

Dado $\varepsilon>0$, $E_1=\bigcup_{z\in E_1} B(z,\frac{\varepsilon}{2})$

Entonces $E=f^{-1}(E_1)=\bigcup_{z\in E_1} f^{-1}(B(z,\frac{\varepsilon}{2}))$

Siendo f continua, $f^{-1}(B(z,\frac{\varepsilon}{2}))$ es abierto. Tenemos, entonces, un recubrimiento abierto de E. Entonces, por ser E compacto, podemos aplicar el lema de Lebesgue; luego

$$\exists \lambda > 0 \,/\, \forall x \in E, \exists z \in E_1 \,/\, B(x,\lambda) \subset f^{-1}\left(B\left(z, \tfrac{\varepsilon}{2}\right)\right) \quad (\mathrm{I})$$

El $\delta(\varepsilon)$ que buscamos es precisamente λ (λ depende del recubrimiento, y éste de ε). Probemos que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$

Según (I), $\exists z \in E_1 \,/\, f(B(x,\lambda)) \subset B(z, \frac{\varepsilon}{2})$

Como $x \in B(x,\lambda) \Rightarrow f(x) \in B(z, \frac{\varepsilon}{2}) \Rightarrow d_1(f(x), z) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall y \in B(x,\delta)$, $d_1(f(x), f(y)) \leq d_1(f(x), z) + d_1(z, f(y)) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$

$d_1(z, f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, pues $y \in B(x,\delta) = B(x,\lambda) \Rightarrow f(y) \in B(z, \frac{\varepsilon}{2})$

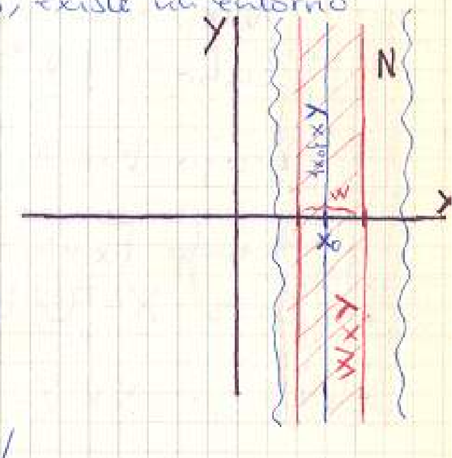
Luego $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. c.s.q.d.

6. Producto de espacios compactos: Teorema de Tychonoff.

Antes de ver el teorema de Tychonoff veamos unos lemas preliminares: el lema de Zorn y el lema del tubo.

6.1. Lema de Zorn: Sea $(X, \leq)$ un conjunto ordenado no vacío en el que toda cadena admite una cota superior. Entonces existe en X al menos un elemento maximal. (*)

6.2. Lema del tubo: Sean X e Y dos espacios topológicos compactos no vacíos y x_0 un punto de X. Supongamos que N es un abierto de $X \times Y$ que contiene a $\{x_0\} \times Y = \{(x_0, y) / y \in Y\}$. Entonces, existe un entorno W de x_0 tal que $W \times Y \subset N$



Demostr.: $\forall y \in Y$, $(x_0, y) \in N$. Como N es abierto existe un entorno de (x_0, y) contenido en N; este entorno lo podemos tomar elemental. Luego

$$\exists\, \mathcal{U}(y) \in \mathcal{V}(x_0) \wedge \exists\, V(y) \in \mathcal{V}(y) \,/\, \mathcal{U}(y) \times V(y) \subset N \quad (\mathrm{I})$$

$\mathcal{U}(y)$ y $V(y)$ los podemos tomar abiertos.

Como $(V(y))_{y \in Y}$ es un recubrimiento abierto de Y e Y es compacto, $\exists \{y_i\}_{i=1}^{n} \subset Y \,/\, Y = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$

Para estos mismos y_i llamamos $W = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}(y_i)$ que es un entorno de x_0, como intersección finita de entornos de x_0.

Como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $W \subset \mathcal{U}(y_i)$ tenemos que

$$W \times Y = W \times \left(\bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (W \times V(y_i)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (\mathcal{U}(y_i) \times V(y_i)) \overset{(\mathrm{I})}{\subset} N. \text{ c.s.q.d.}$$

<u>Observación</u>: $\mathbb{R}$ no es compacto; en $\mathbb{R}^2$ no se verifica el lema del tubo. Dado [illegible] conjunto comprendido entre dos ramas de la función tangente es abierto y contiene a $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$, pero no se puede encontrar un entorno W de $\pi/2$ tal que $W \times \mathbb{R} \subset N$.

Entonces:

6.3 TEOREMA DE TYCHONOFF:

Sea $(X_i)_{i\in J}$ una familia de espacios topológicos separados no vacíos. Entonces el espacio producto $\prod_{i\in J} X_i$ es compacto si y solo si cada X_i es compacto.

Demostr.: $\overset{N}{\Longrightarrow}$ Si $\prod_{i\in J} X_i$ es compacto, como las aplicaciones proyección $pr_j : \prod_{i\in J} X_i \longrightarrow X_j$ son continuas y los X_i separados se tiene que $pr_j(\prod_{i\in J} X_i) = X_j$ es compacto.

$\overset{S}{\Longleftarrow}$ Consideraremos dos casos: a) J es finito, b) J es infinito.

a) CASO FINITO: Probaremos que si X e Y son dos espacios topológicos compactos entonces lo es $X\times Y$. Si tenemos n espacios compactos se prueba que el producto es compacto por inducción.

Sabemos que $\forall x_0\in X$, $\{x_0\}\times Y$ es homeomorfo a Y. Luego si Y es compacto, $\{x_0\}\times Y$ también es compacto.

Sea $\mathcal{R} = (U_i)_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $X\times Y$; como, $\forall x_0\in X$, $\{x_0\}\times Y \subset X\times Y \Rightarrow \{x_0\}\times Y \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

Siendo $\{x_0\}\times Y$ compacto, $\exists \{i_1,\dots,i_n\}\subset I / \{x_0\}\times Y \subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_n} = N(x_0)$

$N(x_0)$ es un abierto de $X\times Y$ que contiene a $\{x_0\}\times Y$. Por el lema del tubo, $\exists W^{x_0}\in \mathcal{V}(x_0) / W^{x_0}\times Y \subset N(x_0)$.

Luego $\forall x\in X, \exists W^x \in \mathcal{V}(x) \wedge \exists N(x) = \bigcup_{j\in F_x} U_j / W^x\times Y \subset N(x)$

siendo F_x un conjunto finito. Los W^x los podemos tomar abiertos.

Como $X = \bigcup_{x\in X} W^x$ y X es compacto, $\exists \{x_i\}_{i=1}^{K} \subset X / X = \bigcup_{i=1}^{K} W^{x_i}$

Luego $X\times Y = (\bigcup_{i=1}^{K} W^{x_i})\times Y = \bigcup_{i=1}^{K} (W^{x_i}\times Y) \subset \bigcup_{i=1}^{K} N(x_i)$

Como para cada $i\in\{1,\dots,K\}$, $N(x_i)$ es una unión finita de abiertos del recubrimiento $\mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{K} N(x_i)$ es una unión finita de abiertos de $\mathcal{R}$. Luego hemos extraído de $\mathcal{R}$ un subrecubrimiento finito de $X\times Y$. Por tanto, $X\times Y$ es compacto.

b) CASO INFINITO: Trataremos de probar que toda familia de cerrados de $X = \prod_{i\in J} X_i$ con la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía.

Sea $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}$ una familia de cerrados de $\prod_{i\in J} X_i$ con la propiedad de la intersección finita.

(*) Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de (la) familias $\mathcal{a}$ de subconjuntos de $X = \prod_{i\in J} X$ tales que $\mathcal{a} \supset \mathcal{F}$ y satisfagan la propiedad de la intersección finita.

Evidentemente, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ pues $\mathcal{F} \in \mathcal{A}$.

Definimos en $\mathcal{A}$ el orden siguiente: dados $\mathcal{a}$ y $\mathcal{a}' \in \mathcal{A}$

$$\mathcal{a} \leq \mathcal{a}' \overset{def}{\iff} \mathcal{a} \subset \mathcal{a}'$$

Probemos que la familia $\mathcal{A}$ verifica las hipótesis del Lema de Zorn.

Sea $(\mathcal{a}_j)_{j\in\Lambda}$ una cadena en $\mathcal{A}$. Probemos que dicha cadena posee una cota superior en $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{a} = \bigcup_{j\in\Lambda} \mathcal{a}_j$.

Si probamos que $\mathcal{a} \in \mathcal{A}$, $\mathcal{a}$ será una cota superior de $(\mathcal{a}_j)_{j\in\Lambda}$ pues $\forall j \in \Lambda$, $\mathcal{a}_j \subset \mathcal{a}$.

Que $\mathcal{a} \supset \mathcal{F}$ es trivial, pues $\forall j \in \Lambda$, $\mathcal{a}_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{a}_j \supset \mathcal{F}$.

Probemos que $\mathcal{a}$ verifica la propiedad de la intersección finita.

Sea $(A_i)_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos de X pertenecientes a $\mathcal{a}$.

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ A_i \in \mathcal{a} = \bigcup_{j\in\Lambda} \mathcal{a}_j$$

Luego $\exists \{j_1, \dots, j_n\} \subset \Lambda \,/\, A_1 \in \mathcal{a}_{j_1}, \dots, A_n \in \mathcal{a}_{j_n}$

Como $(\mathcal{a}_j)_{j\in\Lambda}$ es una cadena, está totalmente ordenado. Podemos suponer, entonces, que $\mathcal{a}_{j_1} \subset \mathcal{a}_{j_2} \subset \dots \subset \mathcal{a}_{j_n}$.

Luego $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{a}_{j_n}$

Como $\mathcal{a}_{j_n} \in \mathcal{A}$, los subconjuntos de X que pertenecen a $\mathcal{a}_{j_n}$ verifican la propiedad de la intersección finita. Luego

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \neq \emptyset.$$

Por tanto, $\mathcal{a} \in \mathcal{A}$.

Luego toda cadena en $\mathcal{A}$ tiene cota superior. Entonces, por el Lema de Zorn existe en $\mathcal{A}$ un elemento maximal, es decir, existe $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ tal que no existe ninguna familia de subconjuntos de X distinta de $\mathcal{M}$ que contenga a $\mathcal{F}$ y satisfaga la propiedad de la intersección finita y que contenga a $\mathcal{M}$.

(**) Veamos ahora que si $(A_i)_{i=1}^n$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{M}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{M}$. Los A_i, $1 \leq i \leq n$, son subconjuntos de X. Como $\mathcal{M}$

satisface la propiedad de la intersección finita, es decir, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$. Sea $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
Consideremos la familia de subconjuntos de X

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cup \{A\}$$

$\mathcal{M}' \supset \mathcal{F}$ pues $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$.

Además $\mathcal{M}'$ satisface la propiedad de la intersección finita, pues, si $(B_k)_{k=1}^{m}$ es una familia finita de elementos de $\mathcal{M}'$ puede suceder que

- $\forall k \in \{1,\dots,m\}, B_k \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{m} B_k \neq \emptyset$, pues $\mathcal{M}$ satisface la propiedad de la intersección finita
- ó $\exists k' \in \{1,\dots,m\} / B_{k'} = A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Entonces $\bigcap_{k=1}^{m} B_k = (\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq k'}}^{m} B_k) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ que es también una intersección finita de elementos de $\mathcal{M}$ y, por tanto, no vacía.

Por tanto, $\mathcal{M}' \in \mathcal{A} \wedge \mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$. Siendo $\mathcal{M}$ un elemento maximal de $\mathcal{A}$ se deduce que $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Luego $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$.

$\boxed{***}$ Probemos que si A es un subconjunto de X tal que $A \cap M \neq \emptyset, \forall M \in \mathcal{M}$ entonces $A \in \mathcal{M}$.

Sea $\mathcal{M}'' = \mathcal{M} \cup \{A\}$. Evidentemente $\mathcal{M}'' \supset \mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{M}''$ satisface la propiedad de la intersección finita. Sea $(B_i)_{i=1}^{n}$ una familia de elementos de $\mathcal{M}''$.

- Si $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $B_i \in \mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} B_i \neq \emptyset$, pues $\mathcal{M}$ satisface la propiedad de la intersección finita.
- Si $\exists j \in \{1,\dots,n\} / B_j = A$ podemos escribir

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = (\bigcap_{r=1}^{m} B_{i_r}) \cap A,$$ donde i_r, $1 \leq r \leq m$, son los únicos índices de $\{1,\dots,n\}$ para los cuales $B_{i_r} \neq A$. Entonces, según lo anterior, $\bigcap_{r=1}^{m} B_{i_r} \in \mathcal{M}$.
Como A corta a todos los elementos de $\mathcal{M}$ se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} B_i = (\bigcap_{r=1}^{m} B_{i_r}) \cap A \neq \emptyset.$$

Luego $\mathcal{M}'' \in \mathcal{A} \wedge \mathcal{M}'' \supset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$, pues $\mathcal{M}$ es maximal en $\mathcal{A}$. Luego $A \in \mathcal{M}$.

$\boxed{****}$ Probemos entonces que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F = \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ con lo cual, según TEOREMA 1.10, quedará probado que $X = \prod_{i \in J} X_i$ es compacto.

Para cada $i \in J$ definimos, $\mathcal{M}_i = pr_i(\mathcal{M}) = \{pr_i(M) / M \in \mathcal{M}\}$. $\mathcal{M}_i$ es una familia de subconjuntos de X_i. Probemos que $\forall i \in J$, $\mathcal{M}_i$ satisface la propiedad de la intersección finita. Sean $(M_j)_{j=1}^{k}$ una familia finita de elementos de $\mathcal{M}$. Se trata de probar que $\forall i \in J$, $\bigcap_{j=1}^{k} pr_i(M_j) \neq \emptyset$

Pero $pr_i(M_1) \cap \dots \cap pr_i(M_k) \supset pr_i(M_1 \cap \dots \cap M_k) \neq \emptyset$ pues

$\bigcap_{j=1}^{k} M_j \neq \emptyset$ ya que $\mathcal{M}$ satisface la propiedad de la intersección finita. Luego: $\bigcap_{j=1}^{k} pr_i(M_j) \neq \emptyset$. Luego $\forall i \in J$, $\mathcal{M}_i$ satisface la propiedad de la intersección finita en X_i. Entonces, con mayor razón, la familia $\overline{pr_i}(\mathcal{M}) = \{\overline{pr_i(M)} / M \in \mathcal{M}\}$ es una familia de cerrados en X_i que satisface la propiedad de la intersección finita, pues $\bigcap_{j=1}^{k} \overline{pr_i(M_j)} \supset \bigcap_{j=1}^{k} pr_i(M_j) \neq \emptyset$.

Como cada X_i es compacto, por hipótesis, se tiene, por teorema 1.10 que:

$$\bigcap_{M\in\mathcal{M}} \overline{pr_i(M)} \neq \emptyset$$

Para cada $i\in J$ tomamos un $x_i \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}} \overline{pr_i(M)}$

Sea $\bar{x} = (x_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} X_i$

Probemos que $\bar{x} \in \overline{M}$, $\forall M\in\mathcal{M}$.

$(\forall M\in\mathcal{M})\wedge(\forall i\in J)$, $x_i \in \overline{pr_i(M)}$. Entonces dado $M\in\mathcal{M}$ e $i\in J$ se tiene que:

$\forall U_i \in \mathcal{V}(x_i)$, $U_i \cap pr_i(M) \neq \emptyset$.

Luego dado $U_i \in \mathcal{V}(x_i)$ y

$\forall M \in\mathcal{M}$, $M\cap pr_i^{-1}(U_i)\neq\emptyset$. Luego, según $\boxed{***}$, $pr_i^{-1}(U_i)\in\mathcal{M}$.

Entonces, según $\boxed{**}$, para cualquier familia finita de índices $\{i_r\}_{r=1}^{k} \subset J$

$pr_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap pr_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \in \mathcal{M}$

Entonces dado un entorno elemental cualquiera de $\bar{x}$, $\prod_{i\in J} U_i$, tenemos que $U_i = X_i$ salvo para un nº finito de índices $\{i_1,\dots,i_k\}$ para los cuales $U_{i_r}\in\mathcal{V}(x_{i_r})$

Entonces según lo anterior, como $\prod_{i\in J} U_i = pr_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap\dots\cap pr_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ (ver Teorema 6) se tiene que $\prod_{i\in J} U_i\in\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ satisface la propiedad de la intersección finita

$\forall M\in\mathcal{M}$, $(\prod_{i\in J} U_i)\cap M\neq\emptyset$, y esto para cualquier entorno elemental de $\bar{x}=(x_i)_{i\in J}$. Luego

$\forall M\in\mathcal{M}$, $\bar{x}\in\overline{M} \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{M\in\mathcal{M}} \overline{M}$

Pero $\mathcal{F} = (F_i)_{i\in I}\subset\mathcal{M} \Rightarrow \forall i\in I$, $F_i\in\mathcal{M} \Rightarrow \bigcap_{i\in I}F_i \supset \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M$ y también $\bigcap_{i\in I} F_i \supset \bigcap_{M\in\mathcal{M}} \overline{M}$, pues $\forall i\in I$, F_i es cerrado. Luego $\bar{x}\in \bigcap_{i\in I} F_i$

prueba que $\bigcap_{i\in I} F_i = \bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Luego, cualquier familia de cerrados de X que satisfaga la propiedad de la intersección finita tiene intersección no vacía, lo cual prueba que $X=\prod_{i\in J} X_i$ es compacto. csqd.

6.4. COROLARIO: En $\mathbb{R}^n$ un conjunto es compacto si y solo si es cerrado y acotado.

Demostr.: $\Rightarrow$] $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico con las distancias d_∞ ó las d_p. Entonces si A es un compacto de $\mathbb{R}^n$, según apartado ⑤, consecuencia ①, A es cerrado y acotado.

$\Leftarrow$] Supongamos que sobre $\mathbb{R}^n$ tenemos la distancia d_2 definida así:

$$d_2(\bar{x},\bar{y})=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\dots+(x_n-y_n)^2}\text{ , siendo } \bar{x}=(x_1,\dots,x_n) \text{ e } \bar{y}=(y_1,\dots,y_n).$$

Entonces, sea A un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y acotado por la distancia d_2

Si A es acotado, $\exists K\in\mathbb{R} / \delta(A)\leq K$.

Sea $\bar{x}^o\in A$, $\bar{x}^o=(x_1^o,x_2^o,\dots,x_n^o)$ y llamemos para cada $i\in\{1,\dots,n\}$

$$I_i=[x_i^o-K, x_i^o+K]\subset\mathbb{R}$$

Probemos que $A\subset\prod_{i=1}^n I_i$

$$\forall \bar{x}=(x_i)_{i=1}^n\in A,\ d_2(\bar{x},\bar{x}^o)\leq K \Rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-x_i^o)^2}\leq K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},\ |x_i-x_i^o|\leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-x_i^o)^2}\leq K \Rightarrow \forall i\in\{1,\dots,n\},\ x_i\in[x_i^o-K, x_i^o+K]$$

Luego $\bar{x}\in\prod_{i=1}^n I_i$; portanto, $A\subset\prod_{i=1}^n I_i$.

Como I_i, $1\leq i\leq n$, es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, es compacto. Luego, por el teorema de Tychonoff, $\prod_{i=1}^n I_i$ es compacto.

Luego A es un subconjunto cerrado de un compacto y, portanto, compacto. csqd.

7. Otras consideraciones sobre conjuntos compactos

7.1. PROPOSICION: Sea X un espacio separado. Si K es un compacto en un subespacio V de X, K es compacto en X, y recíprocamente, si $K\subset V$ y K es compacto en X, entonces K es compacto en V.

Demostr.: $\Rightarrow$] Sea $(U_i)_{i\in J}$ un recubrimiento de K por abiertos de X. Entonces $(U_i\cap V)_{i\in J}$ es un recubrimiento de K por abtos de V. Siendo K compacto en V, $\exists\{i_1,\dots,i_n\}\subset J / K\subset\bigcup_{r=1}^n (U_{i_r}\cap V)=(\bigcup_{r=1}^n U_{i_r})\cap V\Rightarrow K\subset\bigcup_{r=1}^n U_{i_r}$.

$\Leftarrow$] Sea $(U_i')_{i\in J}$ un recubrimiento de K por abiertos de V.

$K\subset\bigcup_{i\in J} U_i'$

Para cada $i\in J$, $\exists U_i$ abto de X / $U_i'=U_i\cap V$.

Como $K\subset V$, $K\subset\bigcup U_i \wedge K$ compacto en $X \Rightarrow \exists\{i_1,\dots,i_n\}\subset J / K\subset\bigcup^n U_{i_r}$ ⇒ $K\subset\bigcup U_{i_r}'$

Luego K es compacto en V. c.s.q.d.

7.2. PROPOSICION: Sea X un espacio separado. La unión finita de compactos de X es compacto.

Demostr.: Lo probaremos para dos y para un número finito de compactos se prueba fácilmente por inducción.

Sean A y B dos compactos de X

Sea $(U_i)_{i\in J}$ un recubrimiento abierto de $A\cup B$: $A\cup B \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Entonces $A\subset \bigcup_{i\in J} U_i \wedge B \subset \bigcup_{i\in J} U_i$

Siendo A y B compactos, $\exists \{i_1,\dots,i_n\}\subset J / A\subset \bigcup_{r=1}^{n} U_{i_r} \wedge \exists \{j_1,\dots,j_m\}\subset J / B\subset \bigcup_{s=1}^{m} U_{j_s}$

Luego $A\cup B \subset \left(\bigcup_{r=1}^{n} U_{i_r}\right) \cup \left(\bigcup_{s=1}^{m} U_{j_s}\right)$. Por tanto, $A\cup B$ es compacto c.s.q.d.