TEMA 13º: ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS

1. DEFINICION. CARACTERIZACION DE ESPACIOS LOCALMENTE COMPACTOS

DEFINICION: Un espacio topológico X separado se dice que es localmente compacto si cada punto de X admite un entorno compacto.

Ejemplos: – $\mathbb{R}$ es localmente compacto, pues $\forall x \in \mathbb{R}, \exists a, b \in \mathbb{R} / x \in [a,b]$.
– Todo espacio compacto es localmente compacto; basta tomar como entorno de cada punto el espacio topológico total.

1.1. TEOREMA: Caracterización de espacios localmente compactos.

Sea X un espacio separado. Las proposiciones siguientes son equivalentes:
a) X es localmente compacto.
b) Cada punto x de X admite un sistema fundamental de entornos compactos.
c) Cada compacto K de X admite un SFE compactos.
d) Cada compacto K de X admite un entorno compacto.

Demostr.: a) $\Rightarrow$ b) Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{V}(x)$. Probemos que existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tal que $V \subset U$ y V es compacto.
Por ser X localmente compacto, $\exists W \in \mathcal{V}(x) / W$ es compacto.
Sea $V' = U \cap W \in \mathcal{V}(x)$.
Siendo W compacto, es regular. Como $V' \in \mathcal{V}(x) \wedge V' \subset W \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_W(x)$ es decir, V' es entorno de x en el subespacio W.
Como W es regular, los entornos cerrados de x constituyen un SFE de x en W. Luego
$\exists V \in \mathcal{V}_W(x) / V \subset V' \wedge V$ cerrado en W.
Si V es cerrado en W, como W es compacto, V es compacto.
Probemos que $V \in \mathcal{V}(x)$, con lo cual quedará probado que
$\exists V$ compacto $\in \mathcal{V}(x) / V \subset U$ pues $V \subset V' \wedge V' \subset U$.
Pero que $V \in \mathcal{V}(x)$ es trivial pues $W \in \mathcal{V}(x) \wedge V \in \mathcal{V}_W(x)$.

b) $\Rightarrow$ c) Sea K un compacto de X y $U \in \mathcal{V}(K)$.
Entonces $\forall x \in K, U \in \mathcal{V}(x)$. Entonces, por b), $\exists V_x \in \mathcal{V}(x) / V_x \subset U \wedge V_x$ compacto.
Luego $\exists W_x$ abierto $/ x \in W_x \subset V_x$.
$(W_x)_{x \in K}$ es un recubrimiento abierto de K. Como K es compacto:
$\exists \{x_1, \dots, x_n\} \subset K / K \subset \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \subset U$.
Sea $V = \bigcup_{i=1}^n V_{x_i}$. V es compacto como unión finita de compactos. Como

$\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$ es abierto, queda probado que

$\forall \mathcal{U} \in \mathcal{V}(K)$, $\exists V \in \mathcal{V}(K) \,/\, V \subset \mathcal{U} \wedge V$ compacto.

c) ⇒ d) Trivial, pues si cada compacto K de X admite un SFE compactos, admite, en particular, un entorno compacto.

d) ⇒ a) Trivial, pues siendo X separado, $\forall x \in X$, $\{x\}$ es compacto pues si $\{x\} \subset \bigcup_{i \in J} U_i \Rightarrow \exists j \in J \,/\, x \in U_j \Rightarrow \{x\} \subset U_j$.

Luego por d), $\{x\}$ admite un entorno compacto. Luego, X es localmente compacto. c.s.q.d.

1.2. TEOREMA: Sea X un espacio topológico **localmente** compacto (*). Un subespacio A de X es localmente compacto si y solo si A es intersección de un abierto y un cerrado de X.

Demostr.: ⇒ Por definición de subespacio localmente compacto

(A localmente compacto) $\Leftrightarrow [\forall x \in A, \exists V_A(x) \in \mathcal{V}_A(x) \,/\, V_A(x)$ es compacto $]$

$V_A(x) \in \mathcal{V}_A(x) \Rightarrow \exists V(x) \in \mathcal{V}(x) \,/\, V_A(x) = V(x) \cap A$.

Si $V(x) \in \mathcal{V}(x)$, $\exists \mathcal{U}(x)$ abierto $/\ x \in \mathcal{U}(x) \subset V(x)$.

Sea $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}(x)$. Entonces $\mathcal{U}$ es un abierto en X

Evidentemente $\mathcal{U} \supset A$. Si probamos que A es cerrado en $\mathcal{U}$ quedará probado que A es intersección de un abierto y un cerrado pues

$[A$ cerrado en $\mathcal{U}] \Rightarrow [\exists F$ cerrado de $X \,/\, A = \mathcal{U} \cap F]$

Recordemos de un ejercicio resuelto del TEMA 5º (Ejercicio 6º) que si $X = \bigcup_{i \in J} \mathring{A}_i$, entonces $B \subset X$ es abierto (cerrado) en X sii $B \cap A_i$ es abierto (cerrado) de A_i, para cada $i \in J$.

Siendo los $\mathcal{U}(x)$ abiertos y $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}(x)$ podemos asegurar que

$[A$ cerrado en $\mathcal{U}] \Leftrightarrow [\forall x \in A,\ A \cap \mathcal{U}(x)$ es cerrado de $\mathcal{U}(x)]$.

Probemos, entonces, que $A \cap \mathcal{U}(x)$ es cerrado en $\mathcal{U}(x)$, para cada $x \in A$.

Siendo $\mathcal{U}(x) \subset V(x)$ se tiene que

$A \cap \mathcal{U}(x) = \mathcal{U}(x) \cap [V(x) \cap A]$

Pero $V(x) \cap A = V_A(x)$ es compacto; siendo X separado se deduce que $V(x) \cap A$ es cerrado en X.

Por tanto $\mathcal{U}(x) \cap [V(x) \cap A]$ es cerrado en $\mathcal{U}(x)$ pues es la traza sobre $\mathcal{U}(x)$ de un cerrado de X. Luego

$\forall x \in A$ $A \cap \mathcal{U}(x)$ ...

Por tanto, según se indicó anteriormente, A es cerrado en $\mathcal{U}$ y $A = \mathcal{U} \cap F$, siendo F cerrado de X y $\mathcal{U}$ abierto en X.

$\Leftarrow$ | Probemos que si $A = \mathcal{U} \cap F$, siendo $\mathcal{U}$ abierto y F cerrado en X, cada punto x de A admite un entorno W_A de x en A que es compacto.

Dado $x \in A = \mathcal{U} \cap F$, se tiene que $x \in \mathcal{U}$. Siendo $\mathcal{U}$ abierto, $\mathcal{U} \in \mathcal{V}(x)$.

Por ser X localmente compacto, existe un entorno compacto W de x tal que $W \subset \mathcal{U}$, según aptdo b) del TEOREMA 1.1.

Probemos que $W_A = W \cap A$ es un entorno de x en A y compacto.

$W \subset \mathcal{U} \Rightarrow W \cap A = W \cap (\mathcal{U} \cap F) = W \cap F$

W es cerrado por ser compacto en un espacio separado; F es cerrado por hipótesis; luego $W \cap F$ es cerrado, y, también, $W \cap A$ es cerrado.

Siendo W compacto y $W \cap A \subset W$ y $W \cap A$ cerrado se tiene que $W \cap A = W_A$ es compacto. Por tanto

$\forall x \in A, \exists W_A \in \mathcal{V}_A(x) / W_A$ es compacto. Luego, A es localmente compacto. csqd.

1.3. COROLARIO: Si X es un espacio localmente compacto, todo abierto y todo cerrado de X es localmente compacto.

Demostr.: Sea $\mathcal{U}$ un abierto de X. Entonces, siendo X cerrado y $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap X$ se deduce por el teorema anterior que $\mathcal{U}$ es localmente compacto. Analogamente, si F es un cerrado de X, siendo X abierto y $F = F \cap X$, F es localmente compacto. csqd.

OBSERVACIONES: ① No todo subespacio de un espacio localmente compacto es localmente compacto.

② Todo espacio discreto es localmente compacto, trivialmente, pues cada punto x de dicho espacio admite como entorno el conjunto $\{x\}$, por ser abierto, que, además, es compacto pues de todo recubrimiento abierto $(\mathcal{U}_i)_{i \in J}$ de $\{x\}$ podemos extraer un $\mathcal{U}_j$ tal que $\{x\} \subset \mathcal{U}_j$.

③ La imagen continua de un espacio localmente compacto no tiene por que ser localmente compacto.

Consideremos la aplicación identidad $i : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_d) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ siendo $\mathcal{T}_d$ la topología discreta y $\mathcal{T}_u$ la usual en $\mathbb{R}$. i es continua pues la contraimagen de todo abierto de $\mathcal{T}_u$ es abierto de $\mathcal{T}_d$, ya que $\mathcal{T}_d$ es más fina que $\mathcal{T}_u$. $\mathbb{R}$ con la topología inducida por $\mathcal{T}_d$ es trivialmente localmente compacto (②). ...

la topología inducida por τ_u no es localmente compacto, con lo cual habremos encontrado un contraejemplo para lo que hemos dicho anteriormente. (Obsérvese que este mismo contraejemplo sirve para ①).

Si $\mathbb{Q}$ fuese localmente compacto, se podría poner como intersección de un abierto y un cerrado de $(\mathbb{R}, \tau_u)$: $\mathbb{Q} = U \cap F$, $U \in \tau_u$ y F cerrado. Entonces $F \supset \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{F} \supset \bar{\mathbb{Q}} \Rightarrow F \supset \mathbb{R} \Rightarrow F = \mathbb{R}$. Luego $\mathbb{Q} = U$, lo cual no es cierto pues $\mathbb{Q}$ no es abierto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$.

Luego $\mathbb{Q}$ es localmente compacto en $(\mathbb{R}, \tau_d)$ pero $i(\mathbb{Q})$ no es localmente compacto en $(\mathbb{R}, \tau_u)$. Sin embargo:

1.4. PROPOSICION: Sea X un espacio localmente compacto e Y un espacio separado. Entonces, si $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación continua y abierta, $f(X)$ es localmente compacto.

Demostr.: $\forall y \in f(X)$, $\exists x \in X \,/\, y = f(x)$

Siendo X localmente compacto, $\exists V \in \mathcal{V}(x) \,/\, V$ es compacto.

$V \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \exists U$ abto $/\, x \in U \subset V$. Luego $f(x) \in f(U) \subset f(V)$

Como f es abierta, $f(U)$ es abierto en Y. Por otro lado V es compacto en X e Y es separado, luego, siendo $f: X \rightarrow Y$ continua, $f(V)$ es compacto en Y (Proposición 1.8.).

Luego $f(V)$ es un entorno compacto de $y = f(x)$, lo cual prueba que $f(X)$ es localmente compacto, pues, además:

$$f(V) = f(V) \cap f(X) \Rightarrow f(V) \in \mathcal{V}_{f(X)}(f(x)) \text{ y } f(V) \text{ es compacto. c.q.d.}$$

1.5. TEOREMA: Sea $(X_i)_{i \in J}$ una familia de espacios topológicos separados no vacíos. Entonces, el espacio producto $X = \prod_{i \in J} X_i$ es localmente compacto si y sólo si cada X_i es localmente compacto y, además, X_i es compacto salvo para un número finito de índices.

Demostr.: $\Rightarrow]$ Supongamos que $X = \prod_{i \in J} X_i$ es localmente compacto.

$\forall i \in J$, $pr_i : X \longrightarrow X_i$ es una aplicación continua y abierta. Como X_i es separado, según la proposición anterior, $pr_i(X)$ es localmente compacto. Pero $pr_i(X) = X_i$, pues pr_i es sobre. Luego, X_i es localmente compacto, para cada $i \in J$.

Probemos ahora que "casi" todos los X_i son compactos.

Sea $\bar{a}$ un punto de $X = \prod_{i \in J} X_i$. Siendo X localmente compacto, $\bar{a}$ admite un entorno compacto V. V es cerrado por ser compacto en X, que es separado por ser un producto de espacios separados. Si $V \in \mathcal{V}(\bar{a})$, existe un abierto, que podemos tomar elemental, $\mathcal{U} = \prod_{i \in J} \mathcal{U}_i$ tal que

$\bar{a} \in \prod_{i \in J} \mathcal{U}_i \subset V$, siendo $\mathcal{U}_i = X_i$ excepto para los índices $i_1, \dots, i_n$

Siendo V cerrado, $V \supset \overline{\prod_{i \in J} \mathcal{U}_i} = \prod_{i \in J} \overline{\mathcal{U}}_i \ni \bar{a}$

$\prod_{i \in J} \overline{\mathcal{U}}_i$ es un cerrado en el compacto V, luego por PROPOSICION 1.2., TEMA 12,

$\prod_{i \in J} \overline{\mathcal{U}}_i$ es compacto. Además $\prod_{i \in J} \overline{\mathcal{U}}_i \supset \prod_{i \in J} \mathcal{U}_i \ni \bar{a}$.

Luego $\prod_{i \in J} \overline{\mathcal{U}}_i$ es un entorno compacto de $\bar{a}$. Por tanto, si X es localmente compacto, cada punto $\bar{a}$ de X admite un entorno elemental compacto. Por el teorema de Tychonoff, si $\prod_{i \in J} \overline{\mathcal{U}}_i$ es compacto, para cada $i \in J$, $\overline{\mathcal{U}}_i$ es compacto.

Como $\mathcal{U}_i = X_i$ salvo para un nº finito de índices, se deduce que los X_i son compactos excepto para un nº finito de índices.

$\Leftarrow$ Probemos que si cada X_i es localmente compacto y los X_i son compactos excepto para un número finito de índices $i_1, \dots, i_K$, entonces $X = \prod_{i \in J} X_i$ es localmente compacto.

Sea $\bar{a} = (a_i)_{i \in J}$ un punto cualquiera de $X = \prod_{i \in J} X_i$.

Probemos que admite un entorno compacto.

Consideremos $\forall i \in J - \{i_1, \dots, i_K\}$, $V_i = X_i$, que es compacto, por hipótesis. y si $1 \leq r \leq K$, $V_{i_r} \in \mathcal{V}(a_{i_r})$, siendo V_{i_r} compacto, que siempre lo podremos encontrar puesto que X_{i_r} es localmente compacto.

Entonces $\prod_{i \in J} V_i$ es compacto por el teorema de Tychonoff y además $\prod_{i \in J} V_i \in \mathcal{V}(\bar{a})$, trivialmente. Luego, X es localmente compacto. c.s.q.d.