TEMA 14: ESPACIOS CONEXOS

1. DEFINICION. EJEMPLOS.

DEFINICION: Diremos que un espacio topológico X es conexo si no existen dos abiertos no vacíos y disjuntos U y V de X tales que $X = U \cup V$.

Esta definición es equivalente a decir que no existan dos cerrados no vacíos y disjuntos de X que recubran a X, pues si existiesen F, G cerrados no vacíos disjuntos de X tal que $X = F \cup G$, se verificaría que existirían dos abiertos no vacíos y disjuntos que recubren a X pues $F = \complement G \Rightarrow F$ abierto y $G = \complement F \Rightarrow G$ abierto.

EJEMPLOS: - $\mathbb{Q}$ con la topología inducida por la topología usual en $\mathbb{R}$ es no conexo pues dado $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $]-\infty, \alpha[\cap \mathbb{Q}$ y $]\alpha, +\infty[\cap \mathbb{Q}$ son abiertos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q} = (]-\infty, \alpha[\cap \mathbb{Q}) \cup (]\alpha, +\infty[\cap \mathbb{Q})$.

- Todo espacio discreto con más de un punto es no conexo, pues dado $x \in X_d$, espacio discreto, $X_d = \{x\} \cup (X_d - \{x\})$ siendo $\{x\}$ y $X_d - \{x\}$ abiertos no vacíos y disjuntos de X_d.

- La familia de intervalos semiabiertos $\{]a,b] \,/\, a,b \in \mathbb{R}\}$ es una base de una topología no conexa sobre $\mathbb{R}$, pues dado $a \in \mathbb{R}$

$$U =]-\infty, a] = \bigcup_{x<a}]x, a]$$ es abierto en $\mathbb{R}$ por dicha topología

y $$V =]a, +\infty[= \bigcup_{x>a}]a, x]$$ también es abierto de $\mathbb{R}$. Ambos son no vacíos y, además son disjuntos y se tiene que $\mathbb{R} =]-\infty, a] \cup]a, +\infty[$.

DEFINICION: Un subespacio A de un espacio topológico X se dice conexo si A con la topología de subespacio es conexo, es decir, si A no se puede escribir como unión de dos abiertos de A no vacíos y disjuntos.

1.1. PROPOSICION: A, subespacio de X, es conexo sii se verifica que si $A \subset U \cup V$, siendo U y V abiertos de X tales que $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap A \neq \emptyset$, entonces $U \cap V \cap A \neq \emptyset$

Demostr.: Trivial

1.2 TEOREMA: Sea $\mathbb{R}$ dotado con la topología usual. Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es conexo sii es un intervalo acotado o no.

Demostr.: La definición más general de un intervalo en $\mathbb{R}$ es la siguiente: "Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es un intervalo si y solo si contiene todos los puntos comprendidos entre dos puntos cualesquiera de A, es decir

$$(A \text{ intervalo}) \Leftrightarrow (\forall a,b\in A, a<b, [a,b]=\{x\in\mathbb{R}/a\leq x\leq b\}\subset A)$$

$\Rightarrow]$ Supongamos que A no es un intervalo; entonces $\exists a,b\in A$, $a<b$, y $\exists c\in\mathbb{R}/ a<c<b \wedge c\notin A$.

Sea $U=]-\infty,c[$ y $V=]c,+\infty[$. Llamaremos:
$U_A=U\cap A$ y $V_A=V\cap A$
$U_A\neq\emptyset$ pues $a\in U_A$ y $V_A\neq\emptyset$ pues $b\in V_A$.
U_A y V_A son abiertos de A y disjuntos, y además
$c\notin A \Rightarrow A\subset U\cup V \Rightarrow A=U_A\cup V_A$.
Luego A no sería conexo, contra la hipótesis.

$\Leftarrow]$ Sea A un intervalo de $\mathbb{R}$. Supongamos que no es conexo. Entonces, existen dos abiertos U y V de A no vacíos, disjuntos tales que $U\cup V=A$.
Consideremos $a\in U \wedge b\in V$ y supongamos que $a<b$ (si $b>a$ se razona análogamente). Sea entonces

$$\alpha=\sup\{x\in\mathbb{R}/[a,x[\subset U\}\in\overline{\mathbb{R}}$$

Como $[a,b]\not\subset U$, pues $b\notin U$, se tiene que $\alpha\leq b$. Luego $\alpha\in\mathbb{R}$.
Además $\alpha\in\overline{U}$, pues $\forall h>0$ / $\alpha-h$ no es cota superior de $\{x\in\mathbb{R}/[a,x[\subset U\}$. Luego $\forall h>0, \exists z\in\mathbb{R}/\alpha-h<z \wedge [a,z[\subset U$
Entonces $\forall h>0, \exists z\in\mathbb{R}/\alpha-h<z\leq\alpha<\alpha+h \wedge [a,z[\subset U$.
Sea $y\in\mathbb{R}/ a\leq y \wedge \alpha-h<y<z$. Entonces $y\in[a,z[\subset U \wedge y\in]\alpha-h,\alpha+h[$.
Luego $\forall h>0,]\alpha-h,\alpha+h[\cap U\neq\emptyset \Rightarrow \alpha\in\overline{U}$.
Además $\alpha\in A$, pues $a\leq\alpha\leq b$, $a,b\in A$ y A es intervalo. Luego:
$\alpha\in\overline{U}\cap A=\overline{U}_A$.
Pero $A=U\cup V$, siendo V abierto en A. Luego $U=\complement_A V$ es cerrado en A.
Por tanto $\overline{U}_A=U$. Luego $\alpha\in U$.
Debe ser entonces $\alpha<b$, pues $\alpha\in U$, $b\in V$ y $U\cap V=\emptyset$.
Además U es abierto en A, por hipótesis; luego $U\in\mathcal{V}_A(\alpha)$. Por tanto
$\exists h>0/ \alpha\in]\alpha-h,\alpha+h[\cap A\subset U$
Siendo $\alpha<b$, siempre podemos tomar h de modo que $\alpha+h<b$.
Entonces, como $[\alpha,\alpha+h[\subset A$, $[\alpha,\alpha+h[=[\alpha,\alpha+h[\cap A\subset$

$\subset\ ]\alpha-h,\alpha+h[\ \cap A \subset \mathcal{U}$. Es decir $[\alpha,\alpha+h[\ \subset \mathcal{U}$.

Entonces $[a,\alpha+h[\ = [a,\alpha[\ \cup [\alpha,\alpha+h[\ \subset \mathcal{U}$

de donde se deduce que $\alpha+h \in \{x\in\mathbb{R} / [a,x[\ \subset \mathcal{U}\}$, siendo $h>0$, lo cual contradice la hipótesis de que $\alpha = \sup\{x\in\mathbb{R}/[a,x[\ \subset\mathcal{U}\}$

Por tanto, A debe ser conexo. csqd.

1.3. COROLARIO: $\mathbb{R}$ es un espacio topológico conexo.

Consecuencia: No todo subespacio de un espacio conexo es conexo, pues $\mathbb{R}$ con la usual es conexo y $\mathbb{Q}$ no lo es.

DEFINICION: CONJUNTOS SEPARADOS. SEPARACION.

Sea X un espacio topológico y A, B y C tres subconjuntos de X. Decimos que A y B están separados si se verifica que

$$\bar{A}\cap B = A\cap\bar{B} = \emptyset.$$

Decimos que el par (A,B) constituye una separación de C si A y B estan separados y se verifica que

$$C\subset A\cup B \text{ siendo } C\cap A\neq\emptyset \wedge C\cap B\neq\emptyset.$$

1.4. TEOREMA: CARATERIZACION DE ESPACIOS CONEXOS.

Sea X un espacio topológico. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) X es conexo.

b) X no admite separación.

c) Los unicos conjuntos de X que son abiertos y cerrados simulltaneamente son $\emptyset$ y X.

d) No existe ninguna aplicación continua y sobre de X en un espacio discreto de dos elementos.

e) Toda aplicación continua de X en un espacio discreto Y es constante.

Demostr.: a) $\Rightarrow$ b)| Procederemos por reducción al absurdo. Supondremos que X admite una separación y probaremos que X no es conexo.

Si X admite una separación, existen dos partes A y B no vacías de X tal que $A\cap\bar{B} = \bar{A}\cap B = \emptyset$ y $X = A\cup B$

Entonces $A\cap B = \emptyset$ pues $A\cap B\subset A\cap\bar{B} = \emptyset$

Por tanto, $X = A\cup B \wedge A\cap B = \emptyset \Rightarrow B = \complement A$ (*)

Como $A\cap\bar{B} = \emptyset \Rightarrow \bar{B}\subset\complement A = B$. Luego B es cerrado

Analogamente, A es cerrado.

Entonces, existen dos cerrados disjuntos no vacíos de X que recubren X. Por tanto, X no es conexo, en contra de la hipótesis. Se deduce, entonces, que X no admite separación

b) $\Rightarrow$ c)] Supongamos que existe un subconjunto $\mathcal{U}$ de X, $\mathcal{U} \neq \emptyset \wedge \mathcal{U} \neq X$, que es abierto y cerrado. Entonces $\overline{\mathcal{U}} = \mathcal{U}$ y $\overline{\complement\mathcal{U}} = \complement\mathcal{U}$. Luego:

$$\overline{\mathcal{U}} \cap \complement\mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \overline{\complement\mathcal{U}} = \mathcal{U} \cap \complement\mathcal{U} = \emptyset \quad y \quad X = \mathcal{U} \cup \complement\mathcal{U}.$$

Luego, el par $(\mathcal{U}, \complement\mathcal{U})$ es una separación de X, en contra de que X no admite separación. Luego los únicos conjuntos de X abiertos y cerrados, simultaneamente, son $\emptyset$ y X.

c) $\Rightarrow$ d)] Representaremos por $\{0,1\}$ un espacio discreto de dos elementos. Supongamos que existe una aplicación $f: X \longrightarrow \{0,1\}$ continua y sobre. Por ser sobre, $f^{-1}(\{0\})$ y $f^{-1}(\{1\})$ son no vacíos.
Además $\{0,1\}$ es discreto, luego $\{0\}$ y $\{1\}$ son abiertos y cerrados de $\{0,1\}$.
Siendo f continua, $f^{-1}(\{0\})$ es abierto y cerrado en X.
Como $f^{-1}(\{0\}) \neq X$, pues de suceder lo contrario sería $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$, se tiene que $f^{-1}(\{0\})$ es una parte propia de X que es abierta y cerrada simultaneamente, lo cual contradice que se verifica c).

d) $\Rightarrow$ e)] Supongamos que existe una aplicación f de X en un espacio discreto Y que es continua y no constante. Sea $\{0,1\}$ un espacio discreto de dos elementos. Definimos una aplicación $\varphi: Y \longrightarrow \{0,1\}$ que a un elemento fijo $b \in f(X) \subset Y$ le asocia $\varphi(b) = 0$ y si $y \in Y - \{b\}$, $\varphi(y) = 1$, es decir, sea $b \in Y / \exists x \in X / f(x) = b$, entonces $\varphi(b) = 0$ y si $y \neq b$, $\varphi(y) = 1$.
φ es continua, pues siendo Y discreto, $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{b\}$ y $\varphi^{-1}(\{1\}) = Y - \{b\}$ son abiertos de Y.
Luego, $\varphi \circ f: X \longrightarrow \{0,1\}$ es continua, como composición de funciones continuas.
Además $\varphi \circ f$ es sobre, pues si $\forall x \in X$, $(\varphi \circ f)(x) = 0$ se tendría, por definición de φ que $\forall x \in X$, $f(x) = b$, en contra de que f no es constante.
Por tanto, existe una aplicación $\varphi \circ f$ continua y sobre de X en un espacio discreto de dos elementos, lo cual contradice que se verifica d).

e) $\Rightarrow$ a)] Procederemos, una vez más, por reducción al absurdo. Supongamos que X es no conexo. Entonces, existen dos abiertos $\mathcal{U}$ y V no vacíos y disjuntos tales que $X = \mathcal{U} \cup V$.

Consideremos la función característica de $\mathcal{U}$ que, como sabemos, se define como sigue:

$$\delta_{\mathcal{U}} : X \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \longmapsto \delta_{\mathcal{U}}(x) = \begin{cases} = 1 \text{ si } x \in \mathcal{U} \\ = 0 \text{ si } x \in X - \mathcal{U} = V \end{cases}$$

donde $\{0,1\}$ es un espacio discreto.

La función $\delta_{\mathcal{U}}$ es continua, pues:

$\delta_{\mathcal{U}}^{-1}(\{1\}) = \mathcal{U}$ es abierto y $\delta_{\mathcal{U}}^{-1}(\{0\}) = V$ también es abierto.

Además $\delta_{\mathcal{U}}$ no es constante, pues:

$V \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in X \,/\, x \in V \Rightarrow \exists x \in X \,/\, \delta_{\mathcal{U}}(x) = 0$

$\mathcal{U} \neq \emptyset \Rightarrow \exists y \in X \,/\, y \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists y \in X \,/\, \delta_{\mathcal{U}}(y) = 1$

Por tanto, existe una aplicación continua de X en el espacio discreto $\{0,1\}$ que no es constante, lo cual esta en contradicción con e). Luego, X es conexo. csqd.

1.5. COROLARIO: Sea X un espacio topológico. Un subespacio C de X es conexo si y solo si no admite separación.

Demostr.: $\Rightarrow$) Supongamos que C admite separación, es decir, que existen dos subconjuntos A y B de X ~~tales que~~

$C \subset A \cup B$, $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.

Entonces, $C = (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

y $(A \cap C) \cap (B \cap C) \subset A \cap B \subset A \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow (A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$.

Por otra parte, $A \cap \overline{B} = \emptyset \Rightarrow \overline{B} \subset \complement A \Rightarrow \overline{B} \cap C \subset (\complement A) \cap C = \complement_C A = B \cap C$, según lo anterior.

Entonces, $\overline{B \cap C}_C = \overline{B \cap C} \cap C \subset \overline{B} \cap C \subset B \cap C$.

lo que prueba que $B \cap C$ es cerrado en C.

Análogamente, $A \cap C$ es cerrado en C.

Entonces existen dos cerrados de C, $\mathcal{U}_C = A \cap C$ y $V_C = B \cap C$, tales que $\mathcal{U}_C \neq \emptyset$, $V_C \neq 0$, $C = \mathcal{U}_C \cup V_C$ y $\mathcal{U}_C \cap V_C = \emptyset$, en contra de que C es conexo.

Luego C no admite separación.

$\Leftarrow$) Supongamos que C no es conexo. Entonces, existen dos cerrados no vacíos $\mathcal{U}$ y V de X tales que

$C \subset \mathcal{U} \cup V$, $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap V \neq \emptyset$ y $C \cap \mathcal{U} \cap V = \emptyset$

Sea $A = C\cap \mathcal{U}$ y $B = C\cap V$.

Entonces $\bar{A}\cap B = \overline{C\cap \mathcal{U}} \cap C\cap V \subset \bar{\mathcal{U}}\cap C\cap V = \mathcal{U}\cap C\cap V = \emptyset$, pues $\bar{\mathcal{U}}=\mathcal{U}$.

Analogamente $A\cap \bar{B} = \emptyset$.

Además $C = A\cup B$.

Luego (A,B) es una separación de C, lo cual está en contradicción de la hipótesis. Luego C es conexo. csqd.

1.6. PROPOSICION: a) Sea X un espacio topológico y $(C_i)_{i\in J}$ una familia de subconjuntos conexos de X de modo que $\bigcap_{i\in J} C_i \neq \emptyset$. Entonces, $C = \bigcup_{i\in J} C_i$ es conexo.

b) Sea $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conexos de X de modo que para cada $n\in\mathbb{N}$, $C_n\cap C_{n+1}\neq\emptyset$. Entonces $C=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es conexo.

c) Si para cada par de puntos x e y de X existe un conexo $C_{x,y}$ tal que $C_{x,y}\supset\{x,y\}$, entonces X es conexo.

Demostr.: a) Probemos que toda función continua f de $C=\bigcup_{i\in J} C_i$ en un espacio discreto Y es constante, con lo cual quedará probado que C es conexo. Para cada $j\in J$, la restricción de f a C_j es continua y constante, por ser C_j conexo.

Siendo $\bigcap_{i\in J} C_i\neq\emptyset$, podemos considerar un punto $y\in\bigcap_{i\in J} C_i$

Entonces $\forall x\in C_j$, $f/_{C_j}(x) = f/_{C_j}(y) \Rightarrow \forall x\in C_j$, $f(x)=f(y)$

y esto para cada $j\in J$. Luego

$$\forall x\in C=\bigcup_{i\in J} C_i,\ f(x)=f(y)$$

que prueba que f es constante en C. Luego C es conexo.

b) Para cada $n\in\mathbb{N}$ haremos

$$C'_n = C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$$

Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C'_n = C'_1$, pues $C'_1\subset C'_2\subset\cdots\subset C'_n\subset\cdots$

Pero $C'_1 = C_1$ y $C_1\neq\emptyset$ pues, por hipotesis, $C_1\cap C_2\neq\emptyset$. Luego:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C'_n\neq\emptyset$$

Ademas $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C'_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = C$.

Si probamos que los C'_n son conexos quedará probado, por el apartado anterior, que $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C'_n$ es conexo.

Procederemos por inducción:

- Si $n=1$, $C'_1 = C_1$ que es conexo por hipótesis.
- Supongamos que C'_{n-1} es conexo. Entonces, $C'_n = C'_{n-1} \cup C_n$ es conexo, pues $C'_{n-1} \cap C_n \supset C_{n-1} \cap C_n$ que, por hipótesis, es no vacío. Luego, siendo C'_{n-1} conexo, C_n conexo y $C'_{n-1} \cap C_n \neq \emptyset$ se tiene por a) que $C'_n = C'_{n-1} \cup C_n$ es conexo.

Entonces, $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$ es conexo.

c) Sea x un punto fijo de X. Entonces $X = \bigcup_{y\in X} C_{x,y}$.

Cada $C_{x,y}$ es conexo, además $\bigcap_{y\in X} C_{x,y} \neq \emptyset$, pues $x \in \bigcap_{y\in X} C_{x,y}$.

Entonces, por a), $\bigcup_{y\in X} C_{x,y}$ es conexo. Luego, X es conexo. csqd.

2. Aplicaciones continuas y conjuntos conexos. Propiedad de los valores intermedios

2.1. Teorema: La imagen continua de un espacio conexo es conexa. Es decir

Sea X un espacio conexo e Y un espacio topológico. Si $f: X \to Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es conexo en Y.

Demostr.: Supongamos que $f(X)$ no es conexo. Entonces, existen dos abiertos $\mathcal{U}'$ y V' de Y tales que

$$\mathcal{U}' \cap f(X) \neq \emptyset, \quad V' \cap f(X) \neq \emptyset, \quad \mathcal{U}' \cap V' \cap f(X) = \emptyset$$

$$\text{y} \quad f(X) \subset \mathcal{U}' \cup V'$$

Entonces $X = f^{-1}(\mathcal{U}') \cup f^{-1}(V')$

Como f es continua, $f^{-1}(\mathcal{U}')$ y $f^{-1}(V')$ son abiertos de X y son no vacíos pues $\mathcal{U}' \cap f(X) \neq \emptyset$ y $V' \cap f(X) \neq \emptyset$.

Además $f^{-1}(\mathcal{U}') \cap f^{-1}(V') = f^{-1}(\mathcal{U}' \cap V') = f^{-1}(\mathcal{U}' \cap V' \cap f(X)) = \emptyset$

Esto está en contradicción con la conexión de X. Por tanto, $f(X)$ es conexo. csqd.

2.2. PROPOSICION: La conexión es una propiedad topológica.

Demostr.: Sean X e Y dos espacios topológicos homeomorfos. Entonces, X e Y son simultaneamente conexos o disconexos, pues si X es conexo $f(X)=Y$ es conexo, pues f continua y si Y es conexo, $X=f^{-1}(Y)$ tambien lo es pues f^{-1} es continua.

2.3. TEOREMA: PROPIEDAD DE LOS VALORES INTERMEDIOS

Sea X un espacio topológico conexo y $f: X \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces dados dos puntos a y b de X, f alcanza en X todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b), es decir, supuesto que $f(a) \le f(b)$ $\forall y \in [f(a), f(b)]$, $\exists x \in X / f(x)=y$.

Demostr.: Siendo X conexo y f continua, se deduce que f(X) es conexo en $\mathbb{R}$. Entonces, f(X) es un intervalo en $\mathbb{R}$. Por tanto, $\forall y_1, y_2 \in f(X)$, $y_1 \le y_2 \Rightarrow [y_1, y_2] \subset f(X)$

En particular, dados $a, b \in X$, $f(a), f(b) \in f(X)$.

Si $f(a) \le f(b)$, $[f(a), f(b)] \subset f(X)$

Entonces, si $y \in [f(a), f(b)]$, $y \in f(X)$. Luego $\exists x \in X / f(x)=y$. csqd.

3. OTRAS PROPIEDADES DE LOS CONJUNTOS CONEXOS

3.1. PROPOSICIÓN: Sea X un espacio topológico y A un conexo de X. Si B es un subconjunto de X comprendido entre A y su adherencia, entonces, B es conexo, es decir.
$(A \text{ conexo}) \wedge (A \subset B \subset \bar{A}) \Rightarrow (B \text{ conexo})$.

Demostr.: Sea Y un espacio discreto con más de un punto. Probemos que toda función $f: B \to Y$ que sea continua es constante.

Siendo A conexo, como $f/_A: A \to Y$ es continua, $f/_A$ es constante. Dado un punto $a \in A$, $f(A) = \{f(a)\}$.

Siendo $f: B \to Y$ continua y A un subconjunto de X se tiene que:
$f(\bar{A}_B) \subset \overline{f(A)} = \overline{\{f(a)\}} = f(A)$, pues $\{f(a)\}$ es cerrado por ser Y discreto.

Pero $f(\bar{A}_B) = f(\bar{A} \cap B) = f(B)$ pues $\bar{A} \supset B \Rightarrow \bar{A} \cap B = B$.

Luego $f(B) \subset f(A) = \{f(a)\}$. Por tanto $f: B \to Y$ es constante. csqd.

3.2. COROLARIO: Sea X un espacio topológico. Si una parte A de X es conexa entonces su adherencia $\bar{A}$ también es conexa.

Demostr.: Es suficiente observar que $A \subset \bar{A} \subset \bar{A}$.

3.3. PROPOSICION: Sea X un espacio topológico y A un conexo de X. Entonces, si dada una parte B de X, se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$ y $A \cap \complement B \neq \emptyset$ se verifica también que $A \cap Fr(B) \neq \emptyset$

Demostr.: Supongamos que $A \cap Fr(B) = \emptyset$.

Dada una parte B de X sabemos que $X = \mathring{B} \cup \overset{\circ}{\complement B} \cup Fr(B)$

Entonces $A = A \cap X = (A \cap \mathring{B}) \cup (A \cap \overset{\circ}{\complement B})$, pues $A \cap Fr(B) = \emptyset$.

Probemos que $A \cap \mathring{B} \neq \emptyset$ y $A \cap \overset{\circ}{\complement B} \neq \emptyset$

Siendo $\bar{B} = \mathring{B} \cup Fr(B)$, se tiene que $A \cap \bar{B} = A \cap \mathring{B}$

Como $A \cap \bar{B} \neq \emptyset \Rightarrow A \cap \mathring{B} \neq \emptyset$.

Análogamente, $A \cap \overset{\circ}{\complement B} \neq \emptyset$

Siendo $\mathring{B}$ y $\overset{\circ}{\complement B}$ abiertos de X, $A \cap \mathring{B}$ y $A \cap \overset{\circ}{\complement B}$ son abiertos de A y no vacíos según hemos probado.

Además $(A \cap \mathring{B}) \cap (A \cap \overset{\circ}{\complement B}) = \emptyset$.

Por tanto, $(A \cap \mathring{B}, A \cap \overset{\circ}{\complement B})$ constituye un partición por abiertos de A, en contra de que A es conexo.

Por tanto, A corta también a la frontera. csqd.

3.4. COROLARIO: Sea X un espacio topológico conexo. Entonces, si B es parte propia de X, la frontera de B es no vacía.

Demostr.: Siendo $B \neq \emptyset \wedge B \neq X$ se tiene que

$$B \cap X \neq \emptyset \quad y \quad (\complement B) \cap X \neq \emptyset$$

Como X es conexo, por la proposición anterior $Fr(B) = Fr(B) \cap X \neq \emptyset$. csqd

4. ESPACIOS PRODUCTO CONEXOS

4.1. TEOREMA: Sea $(X_i)_{i \in J}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, el espacio producto $X = \prod_{i \in J} X_i$ es conexo si y solo si cada espacio coordenada es conexo.

Demostr.: $\Rightarrow$] Si $X=\prod_{i\in J} X_i$ es conexo, como las aplicaciones proyección $pr_j:\prod_{i\in J}X_i \longrightarrow X_j$ son continuas y sobres, los $X_j = pr_j(X)$ son conexos.

$\Leftarrow$] (Recordemos un resultado de un problema del TEMA 6 que decía que si $\prod_{i\in J}X_i$ es un espacio producto y $\bar a=(a_i)_{i\in J}$ un punto de $\prod_{i\in J}X_i$ entonces el conjunto $D=\{\bar x=(x_i)_{i\in J}\in X / x_i=a_i$ excepto para un número finito de índices$\}$ es denso).

Sea, entonces, $f:\prod_{i\in J}X_i \longrightarrow Y$ una aplicación continua con valores en un espacio discreto Y con más de un punto. Probaremos que f es constante sobre el conjunto denso D, con lo cual, por ser f continua, será constante en $X=\prod_{i\in J}X_i$.

Sea $\bar a=(a_i)_{i\in J}\in\prod_{i\in J}X_i$. Entonces, para cada $i\in J$, X_i es homeomorfo a $X_i\times\prod_{j\neq i}\{a_j\}$. Como cada X_i es conexo, por hipótesis, se verifica que, para cada $i\in J$, $A_i=X_i\times\prod_{j\neq i}\{a_j\}$ es conexo.

Evidentemente, $\forall i\in J$, $A_i\subset D$, pues los elementos de A_i tienen todas las coordenadas iguales a las de $\bar a$ salvo quizás la coordenada i-ésima.

Siendo A_i conexo de X, $f/_{A_i}:A_i\longrightarrow Y$ es constante, para cada $i\in J$.

Luego $\forall \bar x=(x_i)\in A_i$, $(x_j=a_j$ si $j\neq i$, $x_i\in X_i)$, $f(\bar x)=f(\bar a)$, $\forall i\in J$.

Probemos entonces que, $\forall \bar x\in D$, $f(\bar x)=f(\bar a)$.

Procederemos por inducción sobre el número de coordenadas en que se diferencian los elementos $\bar x$ y $\bar a$.

- Si $\bar x$ se diferencia de $\bar a$ en una coordenada, está probado que $f(\bar x)=f(\bar a)$, pues en este caso $\bar x$ pertenece a algún A_i.
- Supongamos que para todo elemento $\bar y$ de D que se diferencie de $\bar a$ en $n-1$ coordenadas se verifica que $f(\bar y)=f(\bar a)$.

Sea, entonces, $\bar x\in D$ tal que se diferencia de $\bar a$ en n coordenadas: $x_j=a_j$, $\forall j\in J-\{i_1,\dots,i_n\}$

Consideremos el elemento $\bar b=(b_i)_{i\in J}$ con $b_j=x_j=a_j$ si $j\in J-\{i_1,\dots,i_n\}$

$b_{i_n}=a_{i_n}$ y $b_{i_k}=x_{i_k}$ si $k\in\{1,\dots,n-1\}$

$\bar{b}$ se diferencia de $\bar{a}$ en $n-1$ coordenadas. Entonces, por hipótesis de inducción $f(\bar{b}) = f(\bar{a})$. Además, $\bar{x}$ y $\bar{b}$ se diferencian en una coordenada. Luego, $f(\bar{x}) = f(\bar{b})$. Por tanto, $f(\bar{x}) = f(\bar{a})$, y esto para cualquier $\bar{x} \in D$.

Por tanto, f es constante sobre el conjunto denso D; siendo Y discreto, es separado; luego f es constante sobre X. (TEMA 1º COROLARIO 1.5

Luego, X es conexo. csqd.

4.2. COROLARIO: $\mathbb{R}^n$ es conexo.

5. Componente conexa de un punto

DEFINICION: Dado un punto x de un espacio topológico X, definimos la componente conexa del punto x, $C(x)$, como el mayor conexo que contiene al punto x.

* Veamos a continuación que en un espacio topológico X siempre existe la componente conexa de cualquier punto de X.

Sea x un punto de X. Sea $\mathcal{F} = (C_i)_{i \in J}$ la familia de conexos de X que contienen al punto x. La familia $\mathcal{F}$ es no vacía, pues $\{x\}$ es un conexo de X que contiene al punto x; $\{x\}$ es conexo pues no se puede separar por dos abiertos disjuntos de X.

Llamemos $C(x) = \bigcup_{i \in J} C_i$; siendo $\bigcap_{i \in J} C_i \neq \emptyset$ ya que $x \in \bigcap_{i \in J} C_i$ (es más: $\bigcap_{i \in J} C_i = \{x\}$), se deduce que $C(x)$ es conexo.

Además $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x. Luego $C(x)$ es la componente conexa de x, como queríamos probar.

5.1 PROPOSICION: a) Las componentes conexas son conjuntos cerrados.

b) La relación $\mathcal{R}$ definida del siguiente modo

$$x \,\mathcal{R}\, y \overset{\text{def}}{\iff} y \in C(x)$$

es una relación de equivalencia. En consecuencia, X admite una partición por componentes conexas.

a) Si $C(x)$ es conexo, entonces $\overline{C(x)}$ es conexo.

Como $x \in \overline{C(x)}$ y $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x se verifica que $\overline{C(x)} \subset C(x)$. Luego $\forall x \in X$, $C(x)$ es cerrado.

b) - Reflexiva: $\forall x \in X$, $x \,\mathcal{R}\, x$ pues $x \in C(x)$.

- Simétrica: Probemos que $x R y \Rightarrow C(x) = C(y)$.
$x R y \Rightarrow y \in C(x) \Rightarrow C(x) \subset C(y)$, pues $C(y)$ es el mayor conexo que contiene a y, y $C(x)$ es conexo.
Además $[x \in C(x)] \wedge [C(x) \subset C(y)] \Rightarrow [x \in C(y)]$
Luego $C(y) \subset C(x)$, por la misma razón.
~~En~~ definitiva, $C(x) = C(y)$

Entonces $x R y \Rightarrow C(x) = C(y)$
Por tanto, $x R y \Leftrightarrow y \in C(x) \Rightarrow C(x) = C(y) \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in C(y) \Rightarrow y R x$.

- Transitiva:
$$\left.\begin{array}{l} x R y \\ y R z \end{array}\right\} \Rightarrow C(x) = C(y) \wedge C(y) = C(z) \Rightarrow$$
$\Rightarrow C(x) = C(z) \Rightarrow z \in C(x) \Rightarrow x R z$. csqd.

6. ESPACIOS TOPOLOGICOS LOCALMENTE CONEXOS

DEFINICION: Diremos que un espacio topológico es localmente conexo si cada punto admite un sistema fundamental de entornos conexos.

- $\mathbb{R}$ es un espacio topológico localmente conexo, pues para cada $x \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{]x-\delta, x+\varepsilon[\ / \ \delta, \varepsilon > 0 \}$ es un sistema fundamental de entornos conexos de x.

OBSERVACION: Un espacio topológico puede ser conexo y no ser localmente conexo, o bien, ser localmente conexo y no ser conexo.
Ejemplo: Un espacio discreto con más de un punto no es conexo (se deduce inmediatamente, si tenemos en cuenta que dado $x \in X$, $X = (X - \{x\}) \cup \{x\}$, y $X-\{x\}$ y $\{x\}$ son abiertos). Sin embargo, sí es localmente conexo pues $\{x\}$ es un sistema fundamental de entornos conexo de x.

6.1. TEOREMA: Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) X es localmente conexo.
b) Las componentes conexas de los elementos de un conjunto abierto U, respecto de U, son abiertos.
c) Existe en X una base formada por abiertos y conexos

Demostr.: a) $\Rightarrow$ b)] Sea U un abierto de X. Hay que probar que para cada $x \in U$, el mayor conexo que contiene a x y está contenido en U, es abierto.

Dado $x \in \mathcal{U}$, sea $C(x)$ la componente conexa de x respecto de $\mathcal{U}$. Veamos que $\forall y \in C(x)$, $C(x) \in \mathcal{V}(y)$.

Como $y \in C(x) \subset \mathcal{U}$ $\wedge$ $\mathcal{U}$ abierto, existe un entorno V de y, que podemos tomar conexo, por ser X localmente conexo, tal que $y \in V \subset \mathcal{U}$

Si $(y \in V) \wedge (V \text{ conexo}) \Rightarrow V \subset C(y)$.

Además, $y \in C(x) \Rightarrow C(x) = C(y)$.

Entonces: $y \in V \subset C(x)$.

Como $V \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow C(x) \in \mathcal{V}(y)$, $\forall y \in C(x)$.

Luego $C(x)$ es abierto. csqd.

b) ⇒ c) | Sea $\mathcal{U}$ un abierto de X. Entonces $\mathcal{U} = \bigcup_{x \in \mathcal{U}} C(x)$

Por hipótesis, $C(x)$ es abierto. Luego todo abierto de X se puede escribir como unión de abiertos conexos. Por tanto, los conjuntos abiertos y conexos en X constituyen una base de la topología sobre X.

c) ⇒ a) | Si los conjuntos abiertos y conexos constituyen una base de la topología definida en X, como el conjunto de abiertos de la base que contienen a un punto x constituyen un SFE de x, queda probado que X es localmente conexo. csqd.

6.2. TEOREMA: Sea $(X_i)_{i \in J}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces $\prod_{i \in J} X_i$ es localmente conexo si y solo si cada X_i es localmente conexo y, además, los X_i son conexos salvo, quizás, para un número finito de índices.

La demostración es análoga que la hecha en el tema anterior en Teorema 1.5. para espacios localmente compactos.

7. ESPACIOS CONEXOS POR ARCOS

DEFINICIÓN: Sea X un espacio topológico. Un arco en X es una aplicación continua $\varphi : [0,1] \longrightarrow X$.

Observación: En general, un arco es una aplicación continua de un intervalo compacto $[a,b]$ en X; pero como sabemos que todos los intervalos compactos son homeomorfos, si $f : [a,b] \longrightarrow X$ es ...

arco en X, como existe un homeomorfismo $h: [0,1] \to [a,b]$, la aplicación continua $\varphi = f \circ h : [0,1] \to X$ es el mismo arco en X.

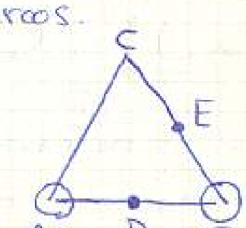
Un arco en $\mathbb{R}^2$ será una aplicación continua $\varphi: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ que a cada $t \in [0,1]$ le asocia el par $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$.

- Los extremos del arco son $\varphi(0)$ y $\varphi(1)$.

<u>DEFINICION</u>: Diremos que un espacio topológico X es conexo por arcos si para cada dos puntos $a, b \in X$ existe un arco de extremos a y b contenido en X.

<u>Ejemplos</u>: - $\mathbb{R}$ es conexo por arcos.

- No todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son conexos por arcos.



Consideremos la frontera del triángulo de la figura excepto los puntos **A** y **B**. Este subconjunto de $\mathbb{R}^2$ no es conexo por arcos, pues los puntos D y E no se pueden unir mediante un arco que esté totalmente contenido en el subconjunto que hemos considerado.

<u>7.1. PROPOSICION</u>: Si X es un espacio topológico conexo por arcos, entonces X es conexo

<u>Demostr.</u>: Sea x un punto fijo de X. Entonces, para cada $y \in X$ existe una aplicación $\varphi_y : [0,1] \to X$ continua tal que $\varphi_y(0) = x$ y $\varphi_y(1) = y$. Siendo φ_y continua y $[0,1]$ conexo en $\mathbb{R}$, $\varphi_y([0,1])$ es conexo en X.

Sea, para cada $y \in X$, $C_{x,y} = \varphi_y([0,1])$

Entonces, $X = \bigcup_{y \in X} C_{x,y}$, pues $\forall y \in X$, $y \in C_{x,y}$.

Además $\bigcap_{y \in X} C_{x,y} \neq \emptyset$, pues $x \in C_{x,y}$, $\forall y \in X$. Luego $\bigcup_{y \in X} C_{x,y}$ es conexo y, por tanto, X es conexo. c.q.d.

<u>7.2. PROPOSICIONES</u>. a) La unión de conjuntos conexos por arcos es conexo por arcos, cuando los conjuntos tienen intersección no vacía.
b) La adherencia de un conjunto conexo por arcos es conexa por arcos.

<u>7.3. TEOREMA</u>: Un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ es **conexo** si y solo si es conexo por arcos.