TEMA 1°: INTRODUCCION. PROPIEDADES DE $\mathbb{C}$ Y $\overline{\mathbb{C}}$.

1. INTRODUCCION: $\mathbb{C}$. CONJUGACION.

* Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo que contiene a $\mathbb{R}$ en el que tiene solución la ecuación $x^2+1=0$.

Sabemos que existe un cuerpo como el descrito. En efecto, $\mathbb{R}^2$ provisto de las leyes de composición

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

es un cuerpo que contiene a $\mathbb{R}$ (la aplicación $a\in\mathbb{R} \longmapsto (a,0)\in\mathbb{R}^2$ es un monomorfismo de cuerpos) y que soluciona la ecuación $x^2+1=0$ ($(0,1)$ es una solución de dicha ecuación).

Entonces, denominamos cuerpo de los números complejos al menor subcuerpo de $\mathbb{F}$ que contenga a $\mathbb{R}$ y solucione la ecuación $x^2+1=0$.

Precisemos la expresión "al menor subcuerpo". Sea $i\in\mathbb{F}$ una solución de la ecuación $x^2+1=0$, es decir, tal que $i^2=-1$. Se prueba que el conjunto

$$\mathbb{C}_1 = \{x+iy \;/\; x,y\in\mathbb{R}\}$$

es un subcuerpo de $\mathbb{F}$ que contiene a $\mathbb{R}$ y soluciona la ecuación $x^2+1=0$.

Si i' fuese otro elemento de $\mathbb{F}$ tal que $i'^2=-1$

$$\mathbb{C}_2 = \{x+i'y \;/\; x,y\in\mathbb{R}\}$$

sería otro subcuerpo de $\mathbb{F}$ que contiene a $\mathbb{R}$ y soluciona la ecuación $x^2+1=0$. En este caso, es obvio que la aplicación $x+iy \in \mathbb{C}_1 \longmapsto x+i'y \in \mathbb{C}_2$ es un isomorfismo de cuerpos. Además es trivial que cualquier otro subcuerpo de $\mathcal{F}$ que contenga a $\mathbb{R}$ y solucione la ecuación $x^2+1=0$ contiene un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}_1$ (basta considerar una solución de la ecuación $x^2+1=0$ en dicho subcuerpo de $\mathcal{F}$).

Por tanto, lo del menor subcuerpo de $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathbb{R}$ y soluciona $x^2+1=0$ debe entenderse que es único salvo isomorfismos. (*)

* $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado. Recordemos que un cuerpo K es ordenado si admite un subconjunto K^+ que decimos formado por elementos positivos de forma que se verifiquen las condiciones

1) $\forall a,b \in K^+$, $a+b \in K^+$, $a \cdot b \in K^+$

2) Si $K^- = \{x \in K / -x \in K^+\}$ entonces $K = K^+ \cup K^- \cup \{0\}$.

Veamos que $\mathbb{C}$ no puede ser un cuerpo ordenado.
En cualquier cuerpo ordenado 1 es positivo, pues si fuese $1<0$ entonces $-1>0$ y $(-1)(-1)=1>0$ en contra de que $1<0$. Luego debe ser $1>0$.
Veamos que i no puede ser positivo ni negativo.
Si fuese $i>0$ entonces $i \cdot i = -1 > 0$ lo cual es absurdo.
Si fuese $i<0$ entonces $-i>0$ y $(-i)(-i) = -1 > 0$, lo cual es absurdo.

Luego $\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado.

* CONJUGACION: Consideremos la aplicación

$$z = x+iy \in \mathbb{C} \longmapsto \bar{z} = x-iy \in \mathbb{C}$$

De $\bar{z}$ se dice que es el conjugado de z.
Sea $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$. Se define

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

La aplicación conjugación verifica las siguientes propiedades:

(*) En todo lo anterior cuando se dice cuerpo se entenderá cuerpo conmutativo.

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ $\quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$
3) $\overline{\overline{z}} = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$
4) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.

De 1) y 2) se deduce que la conjugación es un automorfismo de $\mathbb{C}$ (es evidentemente biyectiva). 4) dice que la conjugación deja fijos los números reales y solo ellos. Se demuestra que la conjugación es el único automorfismo de $\mathbb{C}$ no idéntico que deja fijos los números reales.

2. Modulo de un número complejo. Metrica en $\mathbb{C}$. Compactificacion de $\mathbb{C}$: $\overline{\mathbb{C}}$.

Si $z \in \mathbb{C}$ se define el módulo de ~~z~~ como

$$|z| = (z \cdot \overline{z})^{1/2}$$

Si $z = x + iy$ se verifica que

$$|z| = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

Notar que el módulo de $x+iy$ coincide con la norma euclidea del par (x,y) en $\mathbb{R}^2$, es decir:

$$|x+iy| = \|(x,y)\|_2$$

De esta igualdad se deducen las siguientes propiedades para el módulo

1) $|z| \geq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, y $|z| = 0 \iff z = 0$.
2) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
4) $|\overline{z}| = |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
5) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$ y $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

La aplicación módulo en $\mathbb{C}$ define una métrica de la siguiente forma:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \text{ , } \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Notar que $\mathbb{C}$ con esta métrica coincide con $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidea como espacio métrico: la aplicación

$$x + iy \in \mathbb{C} \longmapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

es trivialmente una isometría.

El espacio métrico $\mathbb{C}$ es localmente compacto (las bolas cerradas son conjuntos compactos), pero no compacto, pues $\{B(0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{C}$ que no admite ningún subrecubrimiento finito.

Nos planteamos ahora el problema de compactificar $\mathbb{C}$ mediante un punto (compactificación de Alexandroff) (*)

Consideremos para ello un elemento, que denotaremos por ∞, no perteneciente a $\mathbb{C}$.

Sea $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Vamos a definir en $\overline{\mathbb{C}}$ una topología que induzca en $\mathbb{C}$ su propia topología de forma que $\overline{\mathbb{C}}$ sea compacto. Veamos cómo son los abiertos de esta topología.

Sea $G \subset \overline{\mathbb{C}}$. Si $\infty \notin G$, diremos que G es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ si lo es en $\mathbb{C}$. Si $\infty \in G$, diremos que G es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ si su complementario G^c es compacto en $\mathbb{C}$.

Veamos que esta familia de abiertos es una topología en $\overline{\mathbb{C}}$.

- Obviamente $\emptyset, \overline{\mathbb{C}}$ son abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$.
- Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ una familia arbitraria de tales abiertos.

  Si ningún G_i contiene a ∞ entonces son abiertos en $\mathbb{C}$ y $\bigcup_{i\in I} G_i$ es abierto en $\mathbb{C}$ y, por tanto, en $\overline{\mathbb{C}}$.

  Si $\exists j \in I / \infty \in G_j$ entonces

  $$\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} G_i^c \subset G_j^c$$

  Puesto que $\bigcap_{i\in I} G_i^c$ es cerrado (como intersección de cerrados) en $\mathbb{C}$ y está contenido en el compacto G_j^c se deduce que $\bigcap_{i\in I} G_i^c$ es compacto en $\mathbb{C}$ y, por tanto, $\bigcup_{i\in I} G_i$ es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$.

- Sea $\{G_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de abiertos en $\overline{\mathbb{C}}$.
  - Si $\infty \in G_i$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, entonces $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto en $\overline{\mathbb{C}}$ pues su complementario es compacto en $\mathbb{C}$ como unión finita de compactos de $\mathbb{C}$.
  - Si $\infty \notin G_i$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto en $\mathbb{C}$ y, por tanto, en $\overline{\mathbb{C}}$.

(*) Se puede compactificar por un punto cualquier espacio Hausdorff localmente compacto. De hecho esta compactificación no es más que una generalización de la compactificación por un punto que ya se había hecho en $\mathbb{C}$.

- Supongamos entonces que $G = G_1 \cap G_2$ de forma que $\infty \notin G_1$, $\infty \in G_2$. Entonces G_2^c es compacto en $\mathbb{C}$ y, por tanto, cerrado en $\mathbb{C}$. Luego $\complement_{\mathbb{C}} G_2^c = G_2 \setminus \{\infty\}$ es abierto en $\mathbb{C}$. Como G_1 es abierto en $\mathbb{C}$ se deduce que
$$G = G_1 \cap G_2 = G_1 \cap (G_2 \setminus \{\infty\})$$
es abierto en $\mathbb{C}$, y por tanto en $\overline{\mathbb{C}}$

Se trata pues de una topología sobre $\overline{\mathbb{C}}$ que induce en $\mathbb{C}$ su propia topología, evidentemente.
Observar que si G es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ que contiene a ∞, entonces $G \setminus \{\infty\}$ es un abierto en $\mathbb{C}$; en efecto, G^c es compacto en $\mathbb{C}$ y, por tanto, cerrado en $\mathbb{C}$; luego $\complement_{\mathbb{C}}(G^c) = G \setminus \{\infty\}$ es abierto en $\mathbb{C}$.

Veamos como son las bases de entornos de un punto de $\overline{\mathbb{C}}$. Si $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$, una base de z_0-entornos es $\{B(z_0, r)\}_{r \in \mathbb{R}^+}$, trivialmente; incluso se puede encontrar una base numerable de z_0-entornos: $\{B(z_0, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Una base de entornos de ∞ está formada por conjuntos del tipo
$$\{z \in \mathbb{C} / |z| > M\} \cup \{\infty\}$$
con $M \in \mathbb{R}^+$. En efecto: si G es un abierto de $\overline{\mathbb{C}}$ que contiene a ∞, G^c es compacto en $\mathbb{C}$ y, por tanto, existe $M > 0$ tal que
$$G^c \subset \overline{B}(0, M)$$
Tomando complementarios en $\overline{\mathbb{C}}$ se deduce que
$$G \supset \{z \in \mathbb{C} / |z| > M\} \cup \{\infty\}$$
Definida esta topología en $\overline{\mathbb{C}}$ es trivial definir qué significa que una sucesión $\{a_n\}_n$ converja a $z_0 \in \mathbb{C}$.
Que una sucesión $\{a_n\}_n$ converja a ∞ en $\overline{\mathbb{C}}$ significa que
$$\forall M > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow a_n \in \{z \in \mathbb{C} / |z| > M\} \cup \{\infty\}$$
y si $a_n \in \mathbb{C}, \forall n$, lo anterior equivale a que
$$\forall M > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow |a_n| > M$$

Es trivial comprobar que $\overline{\mathbb{C}}$ es un espacio de Hausdorff. Además es compacto: sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de $\overline{\mathbb{C}}$. Existe entonces $j\in I$ tal que $\infty \in U_j$. Como U_j es abierto e $\infty\in U_j$ se verifica que U_j^c es compacto en $\mathbb{C}$. Como $\{U_i \setminus \{\infty\}\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{C}$, también lo es de U_j^c, y por tanto existe un número finito de índices $i_1,\dots,i_p\in I$ tales que $U_j^c \subset (U_{i_1}\setminus\{\infty\})\cup\dots\cup(U_p\setminus\{\infty\}) \subset U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_p}$

Luego $\overline{\mathbb{C}} = U_j \cup U_j^c \subset U_j\cup U_{i_1}\cup\dots\cup U_{i_p}$. Luego, efectivamente, $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto.

3. PROYECCION ESTEREOGRAFICA.

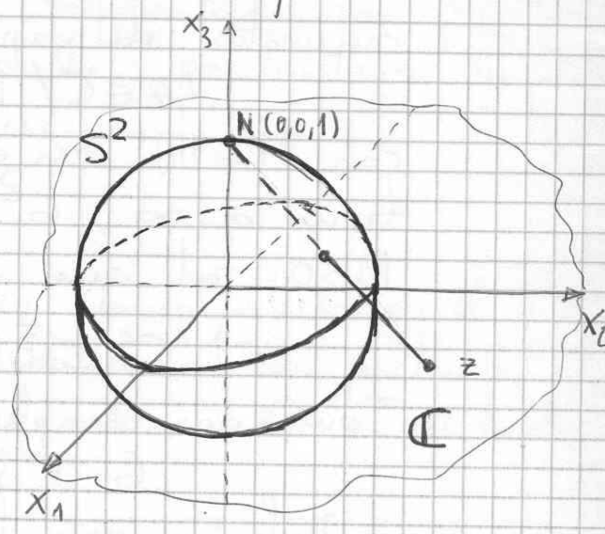
En un principio, no se compactificó $\mathbb{C}$ como se ha indicado anteriormente, sino como lo vamos a hacer ahora. De hecho la compactificación de Alexandroff (por un punto) para un espacio Hausdorff localmente compacto no es más que una generalización de la compactificación que ya se había hecho de $\mathbb{C}$ por proyección estereográfica.

Consideremos la esfera unidad

$$S^2 = \{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 / x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$$

y el plano complejo

$$\mathbb{C} = \{(x_1,x_2,0) / x_1,x_2\in\mathbb{R}\}.$$



Sea N el punto (0,0,1)
Dado un punto $z\in\mathbb{C}$ existe uno y sólo un punto de S^2, distinto de N, que está sobre la recta que une z y N. Recíprocamente, para cada punto de S^2 distinto de N existe un único complejo z que pertenece a la recta que une N con dicho punto de S^2. Si al punto N de S^2 le asociamos el punto $\infty\in\overline{\mathbb{C}}$ tenemos así establecida una biyección

$$\varphi: S^2 \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

S^2, provisto de la distancia ~~que~~ induce la distancia euclídea de $\mathbb{R}^3$, es un espacio métrico compacto. (*)

Mediante la biyección φ podemos "trasladar" la topología de S^2 a $\overline{\mathbb{C}}$. Nuestro propósito es comprobar que dicha topología sobre $\overline{\mathbb{C}}$ coincide con la topología definida sobre $\overline{\mathbb{C}}$ en el apartado anterior.

Veamos como actua φ analíticamente.

Sea $z = x+iy \in \mathbb{C}$. La recta que pasa por N y z es

$$\{ tN + (1-t)z \ / \ t \in \mathbb{R} \}$$

o bien

$$\{ ((1-t)x, (1-t)y, t) \ / \ t \in \mathbb{R} \} \qquad (I)$$

La intersección de esta recta con S^2 (distinta de N) es $\varphi^{-1}(z)$.

Veamos cual es dicha intersección:

$$1 = (1-t)^2 x^2 + (1-t)^2 y^2 + t^2 \iff$$

$$\iff 1 - t^2 = (1-t)^2 (x^2+y^2) \iff$$

$$\iff 1 - t^2 = (1-t)^2 |z|^2 \iff$$

$$\iff (1-t)(1+t) = (1-t)^2 |z|^2$$

Si descartamos la solución $t=1$ (que corresponde al punto N) se obtiene

$$1+t = (1-t)|z|^2$$

de donde

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Por tanto, $\varphi^{-1}(z)$ es el punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ donde

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2+1} \qquad x_2 = \frac{2y}{|z|^2+1} \qquad x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \quad (=t)$$

o bien, en funcion de z

$$\varphi^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

Recíprocamente, sea $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ y calculemos $z = \varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Si $z = x+iy$, el punto (x_1, x_2, x_3) debe estar en la recta (I) para el valor $t = x_3$. Se deduce de ello que

$$x = \frac{x_1}{1-x_3} \qquad y = \frac{x_2}{1-x_3}$$

excluido el caso $t=1$ ($x_3=1$) que corresponde al punto N.

(*) Dicha distancia en S^2 se llama métrica cordal, por razones obvias.

Por tanto

$$z = \varphi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S^2 \setminus \{N\}.$$

Traslademos ahora la estructura métrica de S^2 a $\overline{\mathbb{C}}$ mediante φ.

Sean $z, z' \in \overline{\mathbb{C}}$ tales que $\varphi^{-1}(z) = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$ y $\varphi^{-1}(z') = (x'_1, x'_2, x'_3) \in S^2$.

La distancia euclídea entre estos puntos de S^2 es

$$((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{1/2}$$

Definimos entonces

$$\chi(z, z') = ((x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2)^{1/2}$$

χ así definida es una métrica en $\overline{\mathbb{C}}$ que se llama métrica cordal, pues la distancia de z a z' es la longitud de la cuerda que une $\varphi^{-1}(z)$ y $\varphi^{-1}(z')$.

Puesto que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$, se deduce que

$$\chi(z, z')^2 = 2 - 2(x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3) \qquad (\mathrm{II})$$

Sabemos que

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \qquad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \qquad (\text{si } z \neq \infty)$$

y que

$$x'_1 = \frac{z' + \overline{z'}}{|z'|^2 + 1} \qquad x'_2 = \frac{z' - \overline{z'}}{i(|z'|^2 + 1)} \qquad x'_3 = \frac{|z'|^2 - 1}{|z'|^2 + 1} \qquad (\text{si } z' \neq \infty)$$

Después de efectuar operaciones se obtiene de (II) que

$$\chi(z, z') = \frac{2|z - z'|}{\sqrt{|z|^2 + 1}\sqrt{|z'|^2 + 1}} \qquad (\text{si } z, z' \neq \infty)$$

Si $z' = \infty$ se obtiene trivialmente que

$$\chi(z, \infty) = \sqrt{2 - 2x_3} = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}$$

Hemos transportado mediante φ la estructura métrica de S^2 a $\overline{\mathbb{C}}$. Esta métrica en $\overline{\mathbb{C}}$ induce una topología en $\overline{\mathbb{C}}$. Se trata de probar que esta topología coincide con la que definimos en $\overline{\mathbb{C}}$ en el apartado 2.

Basta para ello probar que $\varphi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo cuando $\overline{\mathbb{C}}$ va provisto de la topología del apartado 2.

Puesto que φ es biyectiva, S^2 es compacto y $\overline{\mathbb{C}}$ es Hausdorff, basta probar que φ es continua (*)

Es claro que φ es continua en todo punto de S^2 distinto de $(0,0,1)$, pues si $x_3 \neq 1$

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3} \qquad (**)$$

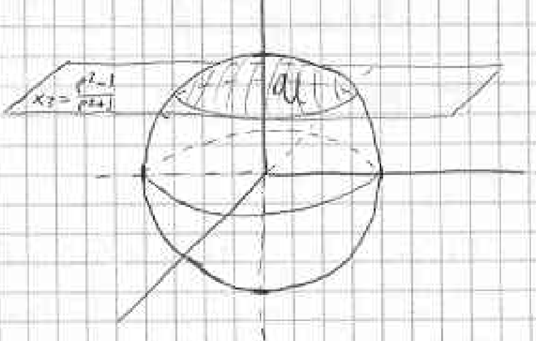
Probemos que también es continua en $(0,0,1)$. Consideremos un entorno básico arbitrario de ∞

$$V = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| > \rho\} \cup \{\infty\} \qquad (\rho > 0)$$

Se trata de probar que existe un entorno $\mathcal{U}$ de $(0,0,1)$ en S^2 tal que $\varphi(\mathcal{U}) \subset V$.

Sea $\mathcal{U} = \{(x_1,x_2,x_3) \in S^2 \,/\, x_3 > \frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}\}$

Desde luego $\mathcal{U}$ es un abierto no vacío de S^2 (observar que se trata de un casquete esférico, que es no vacío por ser $\frac{\rho^2-1}{\rho^2+1} < 1$). Probemos que $\varphi(\mathcal{U}) \subset V$. Desde luego $\varphi(0,0,1) = \infty \in V$. Consideremos entonces $(x_1,x_2,x_3) \in \mathcal{U}$ tal que $x_3 < 1$. En este caso se verifica que



$$\frac{\rho^2-1}{\rho^2+1} < x_3 < 1$$

y, por tanto, existe un único $M > \rho$ tal que

$$x_3 = \frac{M^2-1}{M^2+1}$$

En efecto: consideremos la función

$$\phi : x \in]0,+\infty[\longmapsto \phi(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} \in]-1,1[$$

Esta función es estrictamente creciente en $]0,+\infty[$, y por tanto inyectiva. Es además continua y se verifica que

$$\lim_{x \to 0^+} \phi(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \phi(x) = 1.$$

Luego, dado $x_3 \in]-1,1[$ existe un único $M \in]0,+\infty[$

(*) Se sabe que toda biyección continua de un compacto en un Hausdorff es un homeomorfismo.
(**) Observar que $\overline{\mathbb{C}}$ induce en $\mathbb{C}$ su propia topología.

tal que $x_3 = \phi(M) = \frac{M^2-1}{M^2+1}$. Si además $x_3 > \frac{\rho^2-1}{\rho^2+1}$ se verifica que $M > \rho$ por ser ϕ estrictamente creciente.

Luego dado $(x_1, x_2, x_3) \in U \setminus \{(0,0,1)\}$, existe un único $M > 0$ tal que $x_3 = \frac{M^2-1}{M^2+1}$, y además $M > \rho$.

Si hacemos $z = \varphi(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}$, se verifica que

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2+1}$$

Por ser ϕ inyectiva se deduce que $|z| = M > \rho$, y por tanto $z = \varphi(x_1, x_2, x_3) \in V$.

Luego φ es continua también en $(0,0,1)$.

Entonces, queda probado que la topología en $\overline{\mathbb{C}}$ inducida por la métrica cordal y la topología en $\overline{\mathbb{C}}$ de compactificación por un punto coinciden. (*)

La métrica cordal en $\overline{\mathbb{C}}$ induce sobre $\mathbb{C}$ una métrica que seguiremos llamando cordal y denotando por χ. Sobre $\mathbb{C}$ también tenemos la métrica del módulo. Pues bien, lo que se ha probado es que ambas métricas inducen la misma topología en $\mathbb{C}$, es decir, son métricas equivalentes, en el sentido de que la identidad

$$i : (\mathbb{C}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathbb{C}, \chi)$$

es un homeomorfismo.

Cabe preguntarse si dichas métricas son uniformemente equivalentes, es decir, si i e i^{-1} son uniformemente continuas. La respuesta es negativa: desde luego i es uniformemente continua, pues

$$\chi(z,z') = \frac{2\,|z-z'|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|z'|^2}} \leq 2|z-z'| \quad (\sqrt{1+|z|^2} \geq 1)$$

Pero i^{-1} no lo es: si lo fuese transformaría sucesiones de Cauchy en $(\mathbb{C}, \chi)$ en sucesiones de Cauchy sobre $(\mathbb{C}, |\cdot|)$. Sin embargo no ocurre esto, pues $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{C}, \chi)$ (es convergente a ∞ en $(\overline{\mathbb{C}}, \chi)$, por tanto de Cauchy en $(\overline{\mathbb{C}}, \chi)$, y por tanto de Cauchy en $(\mathbb{C}, \chi)$) pero no lo es en $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

(*) Ambas son homeomorfas a la de S^2.

Sabemos que existe una isometría entre $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ y $\mathbb{R}^2$ con la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_2$. $\mathbb{C}$ es, por tanto, conexo, aun más, conexo por arcos, localmente conexo y localmente arco-conexo. Incluso es conexo por poligonales, que se pueden tomar de lados paralelos a los ejes. $\overline{\mathbb{C}}$ es tambien arco-conexo (pensar en S^2) y localmente arco-conexo; no tiene aquí sentido hablar de conexión por poligonales.

La siguiente proposición nos será muy útil en lo sucesivo. Recordar que la componente conexa de un punto es el mayor conexo que lo contiene.

3.1. PROPOSICION: Sea G un abierto de $\mathbb{C}$. Existe, entonces una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de G tal que

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$$

Se cumple además que $\{K_n\}_n$ se puede elegir de forma que:

a) $\{K_n\}_n$ es una sucesión expansiva: $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

b) Si K es un compacto de G, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $K\subset K_n$.

c) Cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ contiene una componente conexa de $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, para cada n.

Demostr.: Para cada natural n definimos

$$K_n = \{z\in\mathbb{C} / |z|\leq n\} \cap \{z\in\mathbb{C} / d(z, \mathbb{C}\setminus G) \geq \frac{1}{n}\}$$

K_n es acotado (esta contenido en la bola de centro 0 y radio n) y cerrado (como intersección de dos cerrados). Luego K_n es compacto. Además $K_n\subset G$ pues si $z\in K_n$, $d(z, \mathbb{C}\setminus G) > 0$.

Por tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset G$.

Además si $z\in G$, existe $n_1\in\mathbb{N}$ tal que $z\in B(0,n_1)$, y existe $n_2\in\mathbb{N}$ tal que $d(z,\mathbb{C}\setminus G)\geq \frac{1}{n_2}$ (por ser $\mathbb{C}\setminus G$ cerrado). Sea $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Entonces $z\in K_{n_0}$. Luego

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n.$$

a) Sea $A_n = \{z / |z| < n+1\} \cap \{z / d(z, \mathbb{C}\setminus G) > \frac{1}{n+1}\}$

A_n es un abierto que verifica: $K_n \subset A_n \subset K_{n+1}$.

Siendo A_n abierto, $A_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ y, por tanto, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

b) Puesto que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ es trivial que

$$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_n$$

Si K es un compacto contenido en G, entonces

$$K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{K}_n$$

Siendo K compacto, existen $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subset \bigcup_{r=1}^{p} \overset{\circ}{K}_{n_r} \subset \bigcup_{r=1}^{p} K_{n_r}$$

Sea $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_p\}$. Entonces $K \subset K_{n_0}$.

c) Puesto que $K_n \subset G$ se verifica que $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n \supset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$.

Notar que no se dice que cada componente de $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ está contenida en una de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$, lo cual es trivial, sino que cada componente de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ contiene a una de $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$.

Desde luego, la componente de ∞ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ contiene a la componente de ∞ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$, pues el mayor conexo que contiene a ∞ contenido en $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ es un conexo que contiene a ∞ y está contenido en $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$. La componente de ∞ en $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ es la única componente no acotada de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$. En efecto, probemos que cualquier otra componente de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ está contenida en $\{z / |z| \leq n\}$.

Como $K_n \subset \{z / |z| \leq n\}$ se verifica que

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n \supset \{z / |z| > n\} \cup \{\infty\}$$

Puesto que $\{z / |z| > n\} \cup \{\infty\}$ es un conexo que contiene a ∞ se deduce que la componente conexa de ∞ contiene a $\{z / |z| > n\} \cup \{\infty\}$. Como las componentes conexas son disjuntas dos a dos, cualquier otra componente conexa debe estar contenida en $\{z / |z| \leq n\}$.

Sea entonces D otra componente (esta, por tanto, acotada) de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$. Entonces $D \subset \{z / |z| \leq n\}$.

Si $z \in D$ entonces $|z| \leq n$. Además $z \notin K_n$, pues $D \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$. Debe verificarse entonces que

$$d(z, \mathbb{C} \setminus G) < \frac{1}{n}$$

Existe pues $w \in \mathbb{C} \setminus G$ tal que $d(z, w) < \frac{1}{n}$

Consideremos la bola $B(w, \frac{1}{n})$.

Entonces $z \in B(w, \frac{1}{n})$.

Además $B(w,\frac{1}{n}) \subset \overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$. En efecto: si $z' \in B(w,\frac{1}{n})$, $d(z',w)<\frac{1}{n}$ y, por tanto, $d(z',\overline{\mathbb{C}}\setminus G)<\frac{1}{n}$, pues $w\in\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, con lo cual $z'\notin K_n$, es decir, $z'\in \overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$. Luego

$$z\in B(w,\tfrac{1}{n})\subset \overline{\mathbb{C}}\setminus K_n.$$

$B(w,\frac{1}{n})$ es un conjunto conexo que contiene a z y está contenido en $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$, y por tanto, $B(w,\frac{1}{n})$ está contenido en la componente conexa de z en $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ que, obviamente, es D. (*)

En particular, $w\in D$. Entonces si D_1 es la componente de w en $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, se verifica que $D_1\subset D$ pues $w\in \overline{\mathbb{C}}\setminus G\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$.

Luego toda componente conexa de $\overline{\mathbb{C}}\setminus K_n$ contiene a una de $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$. cqd.

OBSERVACION: Si K es un compacto de $\mathbb{C}$ (resp. $\overline{\mathbb{C}}$) entonces solo existe una componente conexa contenida en $\mathbb{C}\setminus K$ (resp. $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$) que es no acotada según se ha probado en la demostración del apartado c). Esto no ocurre para conjuntos arbitrarios. Consideremos el conjunto G de la figura 1. Es claro que en $\mathbb{C}\setminus G$ hay dos componentes no acotadas en $\mathbb{C}\setminus G$. Notar que en $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$, en este caso solo hay una componente no acotada (las dos que habría en $\mathbb{C}\setminus G$ se unen en el punto ∞). Ver la figura 2.

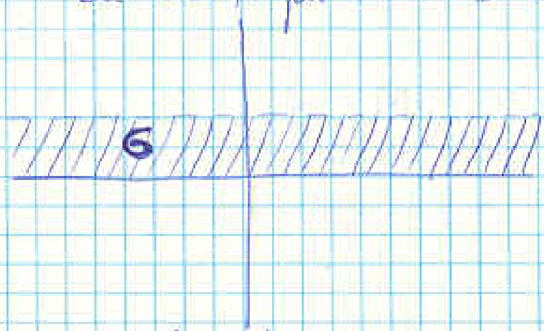


fig. 1

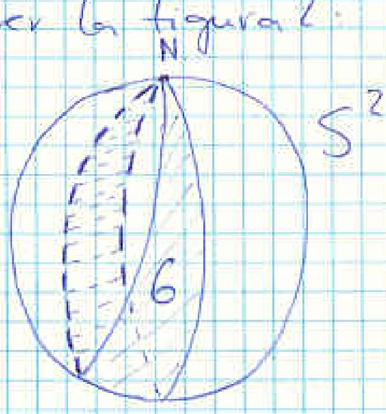


fig. 2.

Se ha dicho que se puede pensar en $\overline{\mathbb{C}}$ como S^2. Sin embargo, hay que tener cuidado en algunos aspectos. Por ejemplo, la componente contenida en $\overline{\mathbb{C}}\setminus G$ es no acotada, pero todo subconjunto de S^2 es acotado. Esto es debido a que se ha probado que $\overline{\mathbb{C}}$ y S^2 son homeomorfos ($\overline{\mathbb{C}}$ con la topología de compactificación por un punto), pero nada se ha dicho (ni se puede) sobre "acotación".

(*) Una componente conexa lo es de todos sus puntos.