TEMA 2°: EL ESPACIO DE FUNCIONES CONTINUAS DEFINIDAS EN UN ABIERTO DEL PLANO Y VALORADAS EN UN ESPACIO METRICO COMPLETO.

1. INTRODUCCION

* Nos proponemos estudiar los espacios de funciones continuas $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ y $\mathcal{C}(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$. Si recordamos que $\mathbb{C}$ y $\overline{\mathbb{C}}$ son espacios métricos completos ($\overline{\mathbb{C}}$ es incluso compacto), podemos hacer el estudio de los dos al mismo tiempo si estudiamos $\mathcal{C}(\Omega, M)$ donde M es un espacio métrico completo. En todo lo anterior Ω es un abierto del plano.

Empezaremos haciendo algunas consideraciones sobre distancias, y dotaremos a $\mathcal{C}(\Omega, M)$ de una métrica apropiada a nuestros intereses.

* Denotemos con d la métrica de M. Definimos una aplicación

$$\mu : (x,y) \in M \times M \longmapsto \mu(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Es trivial comprobar que μ es una nueva métrica sobre M. Probaremos aquí la desigualdad triangular:

Consideremos la función

$$\varphi : t \in [0,+\infty[\longmapsto \varphi(t) = \frac{t}{1+t} \in [0,1[$$

Es trivial que φ es estrictamente creciente en $[0,+\infty[$. Entonces, dados $x,y,z \in M$ y, puesto que d es una métrica, se verifica que

$$\mu(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\leq\frac{d(x,z)+d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)}\leq\frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}+\frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}=$$

$$=\mu(x,z)+\mu(z,y).$$

Se verifica que μ es una métrica equivalente, incluso uniformemente equivalente, a d. Probémoslo:

Consideremos la identidad

$$i:(M,d)\longrightarrow(M,\mu)$$

Queremos ver que i e i^{-1} son uniformemente continuas.

Puesto que $1+d(x,y)\geq 1$ se verifica que

$$\mu(x,y)\leq d(x,y),\ \forall x,y\in M$$

y por tanto, i es trivialmente uniformemente continua.

Veamos que i^{-1} es también uniformemente continua.

Dado $\varepsilon>0$, sea $\delta=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}>0$.

Entonces si $\mu(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}<\delta=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ se verifica que $d(x,y)<\varepsilon$, por ser φ estrictamente creciente (lo que implica que $\varphi^{-1}: s\in[0,1[\rightarrow\varphi^{-1}(s)=\frac{s}{1-s}\in[0,+\infty[$ también es estrictamente creciente). (*)

* Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión expansiva de compactos del abierto Ω tal que

$$\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}K_n$$

Sabemos que existe una sucesión como la descrita.

Para cada natural n y cada par de funciones f,g de $\mathcal{C}(\Omega,M)$ se define

$$\rho_n(f,g)=\sup\{d(f(z),g(z))\ /\ z\in K_n\}.$$

Es trivial que $\rho_n(f,g)\geq 0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall f,g\in\mathcal{C}(\Omega,M)$.

Definimos entonces la aplicación

$$\rho:(f,g)\in\mathcal{C}(\Omega,M)\longmapsto\rho(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$$

Es obvio que ρ está bien definida, pues

$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}\leq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall f,g\in\mathcal{C}(\Omega,M)$ y $\sum\frac{1}{2^n}$ es conver-

(*) Se tiene así una métrica uniformemente equivalente a d con la importante propiedad de ser acotada.

gente (concretamente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$).

1.1. PROPOSICION: La aplicación ρ definida anteriormente es una métrica en $\mathcal{C}(\Omega, M)$.

Demostr.: – $\rho(f,g) \geq 0$, $\forall f,g \in \mathcal{C}(\Omega,M)$, trivialmente.

– $\rho(f,g)=0 \Leftrightarrow \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} = 0, \forall n \Leftrightarrow \rho_n(f,g)=0, \forall n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(z)=g(z), \forall z\in K_n, \forall n\in \mathbb{N} \Leftrightarrow f(z)=g(z), \forall z\in\Omega \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f=g$.

– Es obvio que $\rho(f,g)=\rho(g,f)$, $\forall f,g\in\mathcal{C}(\Omega,M)$.

– Si $f,g,h \in \mathcal{C}(\Omega,M)$ entonces

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)} \leq$$
$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)}\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}\right) = \rho(f,h)+\rho(h,g)$$

c.s.q.d.

La topología que induce la métrica ρ en $\mathcal{C}(\Omega,M)$ puede considerarse como la topología "natural" sobre un espacio de funciones continuas definidas en un abierto! Claro que la definición de ρ presenta un pequeño problema, y es que depende de la sucesión $\{K_n\}_n$ de compactos de Ω elegidos. Probaremos que, a pesar de ello, la topología inducida no depende de cual sea la sucesión. Para probarlo necesitamos el siguiente

1.2. LEMA: a) Dado $\epsilon>0$, existen $\delta>0$ y K compacto $\subset\Omega$ de forma que si $f,g\in\mathcal{C}(\Omega,M)$ verifican

$$\sup\{d(f(z),g(z)) / z\in K\} < \delta$$

entonces $\rho(f,g)<\epsilon$.

b) Dados $\delta>0$ y K compacto $\subset\Omega$, existe $\epsilon>0$ tal que si $f,g\in\mathcal{C}(\Omega,M)$ verifican $\rho(f,g)<\epsilon$ entonces

$$\sup\{d(f(z),g(z)) / z\in K\} < \delta$$

Demostr.: a) Puesto que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea el compacto $K = K_p$, donde $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión expansiva de compactos de Ω que recubren Ω.

Puesto que la función $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$ es continua en 0, para el ε anterior existe $\delta > 0$ tal que si $0 \leq t < \delta$ entonces

$$\frac{t}{1+t} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sean entonces $f, g \in \mathcal{C}(\Omega, M)$ tales que

$$\sup\{d(f(z), g(z)) / z \in K_p\} < \delta$$

Como $K_m \subset K_p$ si $1 \leq m \leq p$, se deduce de lo anterior que

$$\rho_m(f,g) < \delta \quad \text{para } m = 1, \dots, p.$$

De la elección de δ se deduce que

$$\frac{\rho_m(f,g)}{1 + \rho_m(f,g)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m = 1, \dots, p.$$

Entonces

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} +$$

$$+ \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

b) Sean $\delta > 0$ y K compacto $\subset \Omega$. Existe entonces $p \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_p$.

Se verifica entonces que, si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega, M)$

$$\sup\{d(f(z), g(z)) / z \in K\} \leq \rho_p(f,g) \qquad (\mathrm{I})$$

Siendo $\varphi^{-1}(s) = \frac{s}{1-s}$ continua en 0, dado $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 \leq s < 2^p \varepsilon$ entonces $\frac{s}{1-s} < \delta$ (1)

Si hacemos $t = \frac{s}{1-s}$ se verifica que $s = \frac{t}{1+t}$.

Entonces la proposición (1) se puede transcribir así:

si $\dfrac{t}{1+t} < 2^p \varepsilon$ entonces $t < \delta$. (1')

Suponemos (hipótesis) que $\rho(f,g) < \varepsilon$.
Entonces, en particular

$$\frac{1}{2^p} \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < \varepsilon$$

es decir $\dfrac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p \varepsilon$

Se deduce de (1') que entonces $\rho_p(f,g) < \delta$. (II)
Según (I) y (II)

$$\sup\{d(f(z),g(z)) \,/\, z \in K\} < \delta. \quad \text{csqd.}$$

La proposición siguiente nos dice como son los abiertos de $\mathcal{C}(\Omega, M)$ y como convergen las sucesiones en este espacio métrico.

1.3. PROPOSICION: a) Un conjunto G de $\mathcal{C}(\Omega,M)$ es abierto si, y solo si, para cada $f \in G$ existen un compacto K de Ω y $\delta > 0$ tal que

$$\{g \in \mathcal{C}(\Omega,M) \,/\, \sup\{d(f(z),g(z)) / z \in K\} < \delta\} \subset G$$

b) Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $(\mathcal{C}(\Omega,M), \rho)$ converge a un elemento f de $\mathcal{C}(\Omega,M)$ si, y solo si, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente sobre cada compacto de Ω.

Demostr: a) $\Rightarrow$| Sea G un abierto de $\mathcal{C}(\Omega,M)$ y $f \in G$. Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que $B(f,\varepsilon) \subset G$, es decir, tal que si $g \in \mathcal{C}(\Omega,M)$ verifica que $\rho(f,g) < \varepsilon$ entonces $g \in G$.
Por el lema anterior, dado $\varepsilon > 0$, existen K compacto $\subset \Omega$ y $\delta > 0$ tal que si $g \in \mathcal{C}(\Omega,M)$ verifica

$$\sup\{d(f(z),g(z)) \,/\, z \in K\} < \delta$$

entonces $\rho(f,g) < \varepsilon$, es decir, $g \in B(f,\varepsilon) \subset G$.

$\Leftarrow$| Probemos que G es entorno de todos sus puntos.
Sea $f \in G$. Por hipótesis, existen K compacto $\subset \Omega$ y $\delta > 0$ tal que

$$A = \{g \in \mathcal{C}(\Omega,M) \,/\, \sup\{d(f(z),g(z)) / z \in K\} < \delta\} \subset G$$

Por la parte b) del lema anterior, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(f,\varepsilon) \subset A \subset G.$$

b) $\Rightarrow$] Supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to f$ en $(\mathcal{C}(\Omega,M),\rho)$. Sea K compacto $\subset \Omega$. Se trata de probar que $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre K, es decir, que

$$\forall \delta>0,\ \exists \nu\in\mathbb{N} \ / \ n\geq \nu \Rightarrow d(f_n(z),f(z))<\delta,\ \forall z\in K.$$

En virtud del lema anterior, dados K y $\delta>0$ existe $\varepsilon>0$ tal que si

$$\rho(f,g)<\varepsilon \text{ entonces } \sup\{d(f(z),g(z))\ /z\in K\}<\delta. \quad (I)$$

Para este $\varepsilon>0$, puesto que $\{f_n\}_n \to f$ en $(\mathcal{C}(\Omega,M),\rho)$, se verifica que existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq\nu$ entonces $\rho(f_n,f)<\varepsilon$.

Entonces si $n\geq\nu$, en virtud de (I) se verifica que

$$d(f_n(z),f(z))<\delta,\ \forall z\in K.$$

$\Leftarrow$] Supongamos que $\{f_n\}_n$ converge a f uniformemente sobre cada compacto de Ω. Se trata de probar que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\nu\in\mathbb{N}\ /\ n\geq\nu \Rightarrow \rho(f_n,f)<\varepsilon.$$

Dado este $\varepsilon>0$, por el lema, existen $\delta>0$ y K compacto $\subset\Omega$ tales que si $g\in\mathcal{C}(\Omega,M)$ verifica

$$\sup\{d(f(z),g(z))\ /z\in K\}<\delta \text{ entonces } \rho(f,g)<\varepsilon. \quad (II)$$

Dado $\delta>0$, puesto que $\{f_n\}_n\to f$ uniformemente sobre K, existe $\nu\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq\nu$ entonces

$$d(f_n(z),f(z))<\delta,\ \forall z\in K$$

es decir, $\sup\{d(f_n(z),f(z))\ /z\in K\}<\delta$ si $n\geq\nu$.

Luego, por (II), si $n\geq\nu$ se verifica que

$$\rho(f_n,f)<\varepsilon \quad \text{c.s.q.d.}$$

Para cada compacto K de Ω y cada $\delta>0$ definimos

$$\mathcal{U}_{K,\delta}=\{g\in\mathcal{C}(\Omega,M)\ /\ \sup\{d(f(z),g(z))\ /z\in K\}<\delta\}$$

El lema anterior demuestra $\{\mathcal{U}_{K,\delta}\}_{K \text{ compacto}\subset\Omega,\ \delta>0}$ es una base de entornos de f en $\mathcal{C}(\Omega,M)$.

Según se ha probado en la proposición anterior, los abiertos de la topología de $\mathcal{C}(\Omega,M)$ no dependen para nada de la sucesión expansiva de compactos $\{K_n\}$ elegida para definir ρ. La topología de $\mathcal{C}(\Omega,M)$

es la topología compacta-abierta. Podríamos haber llegado a esta topología sobre $\mathcal{C}(\Omega, M)$ de otra forma: definiendo para cada elemento del espacio $\mathcal{C}(\Omega, M)$ la base de entornos $\{\mathcal{U}_{K,\delta}\}_{\substack{K \text{ compacto} \subset \Omega \\ \delta > 0}}$ y comprobar que dicha topología es la inducida por una métrica sobre $\mathcal{C}(\Omega, M)$.

El apartado b) de la proposición anterior asegura que la topología compacta-abierta sobre $\mathcal{C}(\Omega, M)$ coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos de Ω.

No olvidemos que nuestro propósito es estudiar los espacios $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ y $\mathcal{C}(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$. $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ es además un espacio vectorial, que dotado de la topología compacta-abierta se convierte en un espacio localmente convexo metrizable ($\{\mathcal{U}_{K_n, \frac{1}{m}}\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ m \in \mathbb{N}}}$ es una base numerable de entornos de cero en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$).

Según se ha probado, una sucesión $\{f_n\}_n$ converge a f en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ si

$$\forall K \text{ compacto} \subset \Omega, \forall \delta > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \,/\, n \geq \nu \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \delta, \forall z \in K$$

Una sucesión $\{f_n\}_n$ converge a f en $\mathcal{C}(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$ si, y solo si

$$\forall K \text{ compacto} \subset \Omega, \forall \delta > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} \,/\, n \geq \nu \Rightarrow \frac{2|f_n(z) - f(z)|}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}\sqrt{1+|f(z)|^2}} < \delta, \forall z \in K$$

Se verifica que toda función continua de Ω en $\mathbb{C}$, también es continua de Ω en $\overline{\mathbb{C}}$, pues $\overline{\mathbb{C}}$ induce en $\mathbb{C}$ su propia topología. Por tanto, $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$.

Es claro que si $\{f_n\}_n$ converge a f en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ también se verifica que $\{f_n\}_n \to f$ en $\mathcal{C}(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$, por la relación que existe entre χ y $|\cdot|$. También es cierto, y se verá más adelante, que si $f_n, f \in \mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C}), \forall n$, y $\{f_n\}_n \to f$ en $\mathcal{C}(\Omega, \overline{\mathbb{C}})$ también se verifica que $\{f_n\}_n \to f$ en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$.

Si al estudiar en $\mathcal{C}(\Omega, \mathbb{C})$ la convergencia de una sucesión se utiliza $|\cdot|$ se dirá que dicha sucesión es uniformemente convergente sobre los compactos de Ω, y si se utiliza χ, se dirá que es uniformemente convergente sobre cada compacto de Ω.

Se verifica la siguiente

1.4. PROPOSICION: El espacio de funciones continuas $\mathcal{C}(\Omega, M)$ es completo.

Demostr.: Sea $\{f_n\}_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(\Omega, M)$. Entonces, para todo compacto K de Ω $\{f_n|_K\}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{C}(K, M)$, es decir

(I) $\forall K$ compacto $\subset \Omega$, $\forall \delta > 0$, $\exists \nu \in \mathbb{N}$ / $m, n \geq \nu \Rightarrow d(f_n(z), f_m(z)) < \delta$, $\forall z \in K$.

En particular, dado $z \in \Omega$, $\{z\}$ es compacto y, por tanto, $\{f_n(z)\}_n$ es una sucesión de Cauchy en M.

Siendo M completo (*), existe $f(z) \in M$ tal que

$$f(z) = \lim_n f_n(z).$$

Ahora hemos de probar que $f \in \mathcal{C}(\Omega, M)$ y que $\{f_n\}_n$ converge a f en $\mathcal{C}(\Omega, M)$.

Probemos que para cada compacto $K \subset \Omega$ se verifica que

$$\forall \delta > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / n \geq \nu \Rightarrow d(f_n(z), f(z)) \leq \delta, \forall z \in K$$

En virtud de (I), dado $\delta > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq \nu \Rightarrow d(f_n(z), f_m(z)) < \delta, \forall z \in K$$

y tomando límite cuando $m \to \infty$ se deduce que si $n \geq \nu$ entonces $d(f_n(z), f(z)) < \delta$, $\forall z \in K$

Con esto queda probado que f es límite uniforme de $\{f_n\}_n$ sobre cada compacto de Ω.

Además se deduce de esto también que $f \in \mathcal{C}(\Omega, M)$ pues si $z_0 \in \Omega$ existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $z_0 \in \mathring{K}$ y siendo f límite uniforme de funciones continuas definidas en el compacto K se deduce que f también es continua en K y, por tanto, en z_0, y esto $\forall z_0 \in \Omega$. c.s.q.d.

Recordemos los siguientes resultados: Sea E un espacio métrico. Entonces

a) $B \subset E$ es relativamente compacto si, y solo si, para cada sucesión $\{x_n\}_n$ de puntos de B existe una subsucesión convergente. Si todas las subsucesiones anteriores convergen en B, B es compacto.

(*) Habíamos supuesto que (M, d) era un espacio métrico completo, pero hasta aquí no lo habíamos utilizado.

b) B es compacto si, y solo si, B es completo y totalmente acotado (precompacto).

c) Si E es completo, entonces B es relativamente compacto si, y solo si, es totalmente acotado.

DEFINICION: Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas de Ω en M se dice normal si $\mathcal{F}$ es un conjunto relativamente compacto de $\mathcal{C}(\Omega, M)$.

1.5. PROPOSICION: $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}(\Omega, M)$ es una familia normal si, y solo si, para cada compacto $K \subset \Omega$ y cada $\delta > 0$ existen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \exists j \in \{1, \dots, n\} \,/\, \sup\{d(f(z), f_j(z)) \,/\, z \in K\} < \delta$$

Demostr.: $\Rightarrow$) Dados K y $\delta > 0$, existe $\varepsilon' > 0$ tal que si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega, M)$ verifican $\rho(f, g) < \varepsilon'$ entonces

$$\sup\{d(f(z), g(z)) \,/\, z \in K\} < \delta. \quad (1)$$

Siendo $\mathcal{F}$ normal (relativamente compacto) y $\mathcal{C}(\Omega, M)$ completo, $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.

Por tanto, dado $\varepsilon' > 0$, existen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F} \subset B(f_1, \varepsilon') \cup \dots \cup B(f_n, \varepsilon')$$

y por tanto, $\forall f \in \mathcal{F},\ \exists j \in \{1, \dots, n\} \,/\, \rho(f_j, f) < \varepsilon'$

Teniendo en cuenta **(1)** queda probada la necesidad.

$\Leftarrow$) Siendo $\mathcal{C}(\Omega, M)$ completo, para ver que $\mathcal{F}$ es normal basta probar que es totalmente acotado.

Sea pues $\varepsilon > 0$. Existen entonces un compacto $K \subset \Omega$ y $\delta > 0$ tal que si $f, g \in \mathcal{C}(\Omega, M)$ verifican que $\sup\{d(f(z), g(z)) / z \in K\} < \delta$ entonces $\rho(f, g) < \varepsilon$.

Por hipótesis, dados K y δ existen $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \exists j \in \{1, \dots, n\} \,/\, \sup\{d(f(z), f_j(z)) \,/\, z \in K\} < \delta$$

y por tanto

$$\mathcal{F} \subset B(f_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(f_n, \varepsilon) \qquad \text{csqd.}$$