TEMA 3º: SERIES DE POTENCIAS EN $\mathbb{C}$

1. DEFINICIONES: SERIES NUMERICAS Y SERIES FUNCIONALES EN $\mathbb{C}$

* DEFINICION: Una serie numérica en $\mathbb{C}$ es un par de sucesiones $((a_n)_n, (A_n)_n)$ donde $a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$ y $A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Se denota por $\sum_{n\geq 0} a_n$.

La serie se dice convergente si la sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y en este caso se escribe

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} A_n = \sum_{n\geq 0} a_n \in \mathbb{C}.$$

y se le llama suma de la serie.

Dadas dos series en $\mathbb{C}$ se define

$$\sum_{n\geq 0} a_n + \sum_{n\geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n)$$

y $$\lambda \sum_{n\geq 0} a_n = \sum_{n\geq 0} \lambda a_n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

DEFINICION: (Producto de Cauchy de dos series numéricas)

Sean $\sum_{n\geq 0} a_n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n$ dos series en $\mathbb{C}$. Se define el producto de Cauchy de dichas series, y se escribe $\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0} b_n\right)$, como una nueva serie $\sum_{n\geq 0} c_n$ en $\mathbb{C}$ donde $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Una serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ se dice absolutamente convergente si es convergente la serie de números reales $\sum_{n\geq 0} |a_n|$

Es trivial comprobar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Se comprueba también que la suma de dos series convergentes es una serie convergente, y que el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes es convergente.

Diremos que una serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ está mayorada por otra serie $\sum_{n\geq 0} b_n$ si $|a_n| \leq |b_n|$, $\forall n \geq 0$.

Recordemos que es condición suficiente (también necesaria) para que una serie de números reales positivos sea convergente que la sucesión de sumas parciales esté acotada. También se verifica: si $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son sucesiones de números reales positivos tales que $a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n\geq 0} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, y si $\sum_{n\geq 0} a_n$ diverge, también diverge $\sum_{n\geq 0} b_n$.

Veamos dos criterios de convergencia de series en $\mathbb{C}$.

1.1. PROPOSICION a) (CRITERIO DEL COCIENTE O DE D'ALEMBERT)

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie en $\mathbb{C}$.

Si $\overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ entonces $\sum_{n\geq 0} a_n$ es convergente.

Si $\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ entonces $\sum_{n\geq 0} a_n$ es divergente.

Si $\underline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ el criterio no decide si la serie converge o no.

b) (CRITERIO DE LA RAIZ)

Sea $\sum_{n\geq 0} a_n$ una serie en $\mathbb{C}$.

Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, la serie converge.

Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, la serie diverge.

Si $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, es indecidible la naturaleza de la serie por este criterio.

* DEFINICION: (Series funcionales)

Una serie de funciones complejas es un par de sucesiones $((f_n)_n, (F_n)_n)$ siendo f_n funciones de un espacio normado E en $\mathbb{C}$ y $F_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Una serie funcional se dice convergente si lo es la sucesión $(F_n)_n$.

En este caso podemos hablar de distintos tipos de convergencia: puntual (absoluta o no), uniforme (absoluta o no), uniforme sobre compactos, en norma. La convergencia en norma de $\sum_{n\geq 0} f_n$ tiene sentido cuando $f_n \in B(E)$, es decir, cuando las f_n son acotadas. En este caso $\|f_n\| = \sup_{x\in E} |f_n(x)|$ y si $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ converge se dice que $\sum_{n\geq 0} (f_n)$ converge en norma. La convergencia en norma de una serie implica la convergencia de cualquiera de los otros tipos mencionados.

$\sum_{n\geq 0} f_n$ es absoluta y uniformemente convergente en E si, y solo si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu \in \mathbb{N} / q \geq p \geq \nu \Rightarrow \sum_{n=p}^{q} |f_n(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

Como $\left|\sum_{n=p}^{q} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |f_n(x)|$, $\forall x \in E$ la convergencia absoluta uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$ implica la convergencia uniforme de $\sum_{n\geq 0} f_n$. Ademas, si $f_n \in B(E)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\sum_{n=p}^{q} |f_n(x)| \leq \sum_{n=p}^{q} \|f_n\|, \forall x \in E.$$

y por tanto la convergencia en norma implica la convergencia absoluta uniforme.

Por otro lado la convergencia uniforme (absoluta o no) implica convergencia puntual.

1.2. TEOREMA: (CRITERIO DE WEIERSTRASS)

Si $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones complejas tales que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mu_n \geq 0 / |f_n(x)| \leq \mu_n$, $\forall x \in E$ y $\sum_{n\geq 0} \mu_n < \infty$ entonces $\sum_{n\geq 0} f_n$ es uniformemente convergente.

2. SERIES DE POTENCIAS.

DEFINICION: Una serie de potencias es una serie funcional de la forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ y $a_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Estudiaremos, sin pérdida de generalidad, el caso $z_0 = 0$.

2.1. TEOREMA: Sea la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y sea

$$\rho = \begin{cases} = 0 & \text{si } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \\ = +\infty & \text{si } \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \\ = 1/\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces

a) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es convergente en norma si $|z| \leq r$, $\forall r \in [0, \rho[$

b) $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge si $|z| > \rho$.

Demostr.: a) En el caso $\rho = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $\rho > 0$ y sea $r \in [0, \rho[$. Entonces

$$\forall z \in \overline{B}(0,r), \quad \| a_n z^n \| \leq \sup_{|z|\leq r} |a_n z^n| = a_n r^n$$

Denotemos por $f_n(z) = a_n z^n$. Entonces $\|f_n\| = a_n r^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Por el criterio de la raiz, siendo

$$\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = \overline{\lim_n}\, r \sqrt[n]{|a_n|} = r\, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = r \frac{1}{\rho} < 1$$

Se deduce que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge en norma si $|z| \leq r$.

b) Si $|z| > \rho$ entonces

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| |z|^n} \geq \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \rho^n} = \rho\, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

Por el criterio de la raiz se deduce que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es **di**vergente si $|z| > \rho$. c.q.d.

DEFINICION: Al número ρ definido en el teorema anterior se le llama radio de convergencia de la serie de potencias. A $B(0,\rho)$ se le llama disco o círculo de convergencia.

OBSERVACIONES: Toda serie de potencias define una función continua en su disco de convergencia como límite uniforme ne de funciones continuas. Una serie de potencias converge uniformemente sobre cada compacto contenido en ~~su~~ disco de convergencia, y esta convergencia uniforme es además absoluta. En el exterior del disco de convergencia la serie es divergente. En la frontera del disco de convergencia puede haber convergencia, divergencia o ambas cosas (en distintos puntos, claro está).

Ejemplo: Las series de potencias $\sum_{n\geq 0} z^n$, $\sum_{n\geq 0} z^n/n^2$ y $\sum_{n\geq 0} z^n/n$ tienen radio de convergencia $\rho=1$. La primera no converge en ningún punto de la frontera. La segunda converge en todos los puntos de la frontera. La tercera converge en $z=-1$ y diverge en $z=1$.

Recordemos que es condición necesaria para que una serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ converja que $\lim_n a_n=0$. En las series alternadas dicha condición también es suficiente.

2.2 TEOREMA: (CRITERIO DE PICARD)

Sea $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ una sucesión decreciente de números reales tales que $\lim_n a_n = 0$. Entonces $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge para todo punto z tal que $|z|=1$ salvo quizás en $z=1$.

Demostr.: Si definimos $a_{-1}=0$ podemos escribir

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^k - z^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k - a_n z^{n+1}.$$

Sea $z\in\mathbb{C}$ tal que $|z|=1$ y $z\neq 1$.

Entonces

$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) z^k$ converge absolutamente, pues

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k-1}|\,|z|^k \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k-1}| = a_0 + (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots +$$
$$+ (a_{n-1} - a_n) = 2a_0 + a_n$$

Luego $\lim_n \sum_{k=0}^{n} |a_k - a_{k-1}|\,|z|^k \leq 2a_0$, pues $\{a_n\}_n \to 0$.

Además $\{a_n z^{n+1}\}_n \to 0$ si $|z|=1$.

Luego $\{(1-z)\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\}_{n\in\mathbb{N}}$ ~~es~~ convergente, es decir

$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es convergente. Siendo $z \neq 1$, se deduce que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ también converge. c.s.q.d.

2.3. TEOREMA: (Lema de Abel)

Sea $0 < r < r_0$. Sea $M > 0$ y $(a_n)_n$ una sucesión en $\mathbb{C}$ tal que $|a_n| r_0^n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalmente para todo z de módulo menor o igual que r.

Demostr.: Se trata de probar que $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n$ es convergente. Pero

$$\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n = \sum_{n\geq 0} |a_n| r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \sum_{n\geq 0} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n < +\infty$$

pues se trata de una serie geométrica de razón menor que uno. c.s.q.d.

2.4. TEOREMA: Sean $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ series con radios de convergencia mayor o igual que $\rho > 0$. Entonces

a) Los radios de convergencia de las series suma $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$ y producto de Cauchy $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ $\left(c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q\right)$ son mayores o iguales que ρ.

b) Sea ρ el mínimo de los radios de convergencia de las series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$. Si $|z| < \rho$ definimos

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad , \quad B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

$$S(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n \qquad P(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

Entonces $S(z) = A(z) + B(z)$ y $P(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Demostr.: a) Sea $r < \rho$ $(r > 0)$. Entonces

$$\sum_{n\geq 0} |a_n + b_n| r^n \leq \sum_{n\geq 0} (|a_n| + |b_n|) r^n = \sum_{n\geq 0} |a_n| r^n + \sum_{n\geq 0} |b_n| r^n$$

y estas dos series son convergentes por ser r menor que los radios de convergencia de las mismas.

Por otra parte

$$\sum_{n\geq 0} |c_n| r^n \leq \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+q=n} |a_p| \cdot |b_q|\right) r^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+q=n} |a_p| r^p |a_q| r^q\right) =$$

$= \left(\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n\right)\left(\sum_{n\geq 0} |b_n| r^n\right) < +\infty$.

b) Trivial. $\blacksquare$

* DEFINICION: Una familia de series de potencias $\left\{\sum_{n\geq 0} a_{in} z^n\right\}_{i\in I}$ se dice sumable si para cada natural n, $a_{in}=0$ salvo quizás para un número finito de índices $i\in I$.

En ese caso se define la suma como

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I} a_{in}\right) z^n.$$

Consideremos un caso particular: Sean $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{q\geq 1} b_q z^q$ $(b_0=0)$. Entonces la familia

$$\left\{a_n\left(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

es sumable, pues dicha familia es

para $n=0$	a_0
para $n=1$	$a_1 b_1 z + a_1 b_2 z^2 + a_1 b_2 z^3 + \ldots$
para $n=2$	$a_2 b_1^2 z^2 + a_2(b_1 b_2 + b_2 b_1) z^3 + \ldots$
para $n=3$	$a_3 b_1^3 z^3 + \ldots$

. . . .

para $n=K$ se obtiene una serie en la que no aparecen potencias menores que K. Luego, en todas estas series, el número de coeficientes no nulos que multiplican z^n (n fijo) es finito. Es decir, es una familia sumable. Podemos entonces reagrupar potencias en el sentido de la definición y a la serie obtenida se dice que es resultado de sustituir $\sum_{q\geq 1} b_q z^q$ en $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y se escribe

$$\sum_{n\geq 0} a_n\left(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\right)^n$$

2.5 TEOREMA: (Sustitución de una serie convergente en otra convergente)

Sean $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{q\geq 1} b_q z^q$ series con radios de convergencia $\rho_A, \rho_B > 0$. Existe entonces $r>0$ tal que $\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q < \rho_A$ y el radio de la serie obtenida por sustitución es un número $\rho \geq r$. Además si $|z|\leq r$ se tiene $|B(z)| < \rho_A$ y $A(B(z)) = S(z)$ donde $A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ para $|z|<\rho_A$, $B(z) = \sum_{q\geq 1} b_q z^q$ para $|z|<\rho_B$ y $S(z)$ la función definida por la serie sustitución para $|z|<\rho$.

Demostr.: • Si r verifica $0<r<\rho_B$ entonces $\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q < +\infty$.
Por tanto $\sum_{q\geq 1} |b_q| r^{q-1}$ es también convergente.

Como $\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q = r \sum_{q\geq 1} |b_q| r^{q-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ se verifica que existe $r>0$ tal que $b = \sum_{q\geq 1} |b_q| r^q < \rho_A$.

Siendo $b<\rho_A$ es convergente la serie $\sum_{p\geq 0} |a_p| b^p$.
Sea $M = \sum_{p\geq 0} |a_p| b^p$.

Consideremos la serie de sustitución

$$\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n = \sum_{p\geq 0} |a_p| \Big(\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q\Big)^p$$

Se verifica

$$\sum_{n=0}^{K} \gamma_n r^n \leq \sum_{p=0}^{K} |a_p| \Big(\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q\Big)^p \overset{(*)}{=} \sum_{p=0}^{K} |a_p| b^p \leq M, \ \forall K.$$

Luego $\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n$ es convergente, por estar acotadas sus sumas parciales.

Si $\sum_{n\geq 0} c_n z^n = \sum_{p\geq 0} a_p \Big(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\Big)^p$ es la serie obtenida por sustitución, entonces $|c_n| \leq \gamma_n$, $\forall n\geq 0$. Luego $\sum_{n\geq 0} |c_n| r^n$ es convergente por estar majorada por una serie convergente.
Luego si ρ es su radio de convergencia debe verificarse que $\rho \geq r > 0$.

• Sea ahora $A_n(z) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p$, $\forall n\geq 0$. Entonces

$$\sum_{p=0}^{n} a_p \Big(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\Big)^p = a_0 + a_1 \Big(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\Big) + \dots + a_n \Big(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\Big)^n =$$
$$= \sum_{m\geq 0}^{\infty} c_{m,n} z^m .$$

Sabemos incluso que $c_{m,n} = c_m$ si $m \leq n$.
Si $|z| \leq r$ tiene sentido para cada $n\in\mathbb{N}$

$$S_n(z) = \sum_{m\geq 0} c_{m,n} z^m$$

$$\text{y} \quad S(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

Además si $|z| \leq r < \rho_B$, $B(z) = \sum_{q\geq 1} b_q z^q < +\infty$ y puesto que la convergencia es absoluta, se mantiene la convergencia en los productos finitos y combinaciones lineales, es decir: $\Big(\sum_{q\geq 1} b_q z^q\Big)^n = B(z)^n, \dots$

Entonces $A_n(B(z)) = a_0 + a_1 B(z) + \dots + a_n (B(z))^n = S_n(z)$ si $|z| \leq r$.
Por otra parte $|B(z)| \leq \sum_{q\geq 1} |b_q| r^q < \rho_A$, por la elección de r.

(*) Observar que siendo $\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q = b$ convergencia absoluta $\Big(\sum_{q\geq 1} |b_q| r^q\Big)^p = b^p$

Tiene pues sentido hablar de $A(B(z))$ para $|z|\leq r$; es decir existe $\lim_{n\to\infty} A_n(B(z)) = A(B(z))$ si $|z|\leq r$.

Teniendo en cuenta que la sustitución en la diferencia es la diferencia de sustituciones se tiene: $|S(z)-S_n(z)| = |\sum_{p>n} a_p (\sum_{q\geq 1} b_q z^q)^p| \leq \sum_{p>n} \gamma_p r^p$

Es claro que $(\sum_{p>n} \gamma_p r^p) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, por ser $\sum_{n\geq 0} \gamma_n r^n$ convergente.

Luego $S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z) = \lim_{n\to\infty} A_n(B(z)) = A(B(z))$.

c.s.q.d.

Veamos que, para el producto de Cauchy, el inverso de una serie convergente es convergente. Antes probemos

2.6. PROPOSICION: Sea $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias en $\mathbb{C}$. Dicha serie tiene inverso, para el producto de Cauchy, si y sólo si $a_0 \neq 0$.

Demostr.: $\Rightarrow$) Se trata de probar que, si existe $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ tal que $(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)(\sum_{n\geq 0} b_n z^n) = 1$ entonces $a_0 \neq 0$.

Pero esto es trivial, pues en ese caso sería $a_0 b_0 = 1$ y todos los demás coeficientes cero. En particular $a_0 \neq 0$.

$\Leftarrow$) Si $a_0 \neq 0$ sea $b_0 = a_0^{-1}$.

Si debe ser $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ se tendrá $b_1 = -\frac{a_1}{a_0} b_0$

Tambien debe ser $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$. Luego $b_2 = -\frac{a_1 b_1 + a_2 b_0}{a_0}$

De este modo se puede construir la serie $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ que es el inverso de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. csqd.

2.7. TEOREMA: Sea $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie en la que $a_0 \neq 0$ con radio de convergencia estrictamente positivo. Entonces, la serie inversa $(\sum_{n\geq 0} a_n z^n)^{-1}$ tiene radio de convergencia estrictamente positivo y además ambas series definen funciones inversas.

Demostr.: Consideremos la serie

$$\sum_{n\geq 0} a'_n z^n = 1 - a_0^{-1} (\sum_{n\geq 0} a_n z^n)$$

Es obvio que $a'_0 = 0$ y que

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n = a_0 (1 - \sum_{n\geq 1} a'_n z^n). \quad (1)$$

Puesto que, trivialmente

$$1 = (1-z)\left(\sum_{p\geq 0} z^p\right)$$

y utilizando que la sustitución en el producto es el producto de sustituciones se tiene

$$1 = \left(1 - \sum_{n\geq 1} a'_n z^n\right)\left(\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1} a'_n z^n\right)^p\right)$$

que se puede escribir

$$1 = a_0\left(1 - \sum_{n\geq 1} a'_n z^n\right) a_0^{-1}\left(\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1} a'_n z^n\right)^p\right)$$

o bien, según (1)

$$1 = \left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)\left(\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1} a'_n z^n\right)^p\right) a_0^{-1}$$

Luego $\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right)^{-1} = a_0^{-1} \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{n\geq 1} a'_n z^n\right)^p$

Entonces, si el radio de convergencia de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es positivo, también lo es el de $1 - a_0^{-1}\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Además $\sum_{p\geq 0} z^p$ tiene radio de convergencia positivo (concretamente 1).

Luego la inversa de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, que se obtiene por sustitución de una serie de radio positivo en otra de radio positivo, tiene también radio positivo (Teorema 2.5).

Es obvio además que definen funciones inversas para el producto de Cauchy. ■