TEMA 4º: FUNCIONES HOLOMORFAS. FUNCIONES ANALITICAS.

1. DERIVACION EN $\mathbb{C}$

DEFINICION: (Derivada compleja)

Sea una función $f: A\subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathring{A}$. Se dice que f es derivable en z_0 si existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

En este caso dicho límite se denota por $f'(z_0)$ y se llama derivada de f en z_0.

Análogamente a como se hacía para funciones reales de variable real se prueba que: a) si f es derivable en z_0 entonces es continua en z_0, b) las funciones constantes son derivables y tienen derivada nula, c) la suma de funciones derivables en z_0 es derivable en z_0, d) el producto de funciones derivables en z_0 es derivable en z_0, e) el cociente de dos funciones derivables en z_0 es derivable en z_0 si el denominador no se anula en z_0. Además, la regla de la cadena funciona exactamente igual que en $\mathbb{R}$.

Recordemos que si E_1, E_2 son espacios normados y $f: A\subset E_1 \to E_2$ es una función y $x_0 \in \mathring{A}$, se decía que f es diferenciable en x_0 si existe una aplicación lineal continua $l: E_1 \to E_2$ y una función $\varphi: A \to E_2$ con $\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$ tales que

$$f(x) = f(x_0) + l(x-x_0) + \varphi(x)\,\|x-x_0\|, \ \forall x \in A.$$

Si recordamos que las aplicaciones lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ son de la forma $z\in\mathbb{C} \longmapsto az \in \mathbb{C}$ $(a\in\mathbb{C})$, y que todas las aplicaciones lineales de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ son continuas, [illegible] dar la siguiente

DEFINICION: Una función $f: A\subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $z_0 \in \mathring{A}$ si existen $c \in \mathbb{C}$ y una función $\varphi: A \to \mathbb{C}$ con $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$ tales que

$$f(z) = f(z_0) + c(z-z_0) + \varphi(z)|z-z_0|, \ \forall z \in A.$$

Es obvio que $f: A\subset\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $z_0 \in \mathring{A}$ si, y solo si, f es derivable en z_0. Se cumple además que $c = f'(z_0)$.

A veces $\varphi(z)|z-z_0|$ se escribe $o(z-z_0)$.

Si $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la consideramos como $f: A\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ entonces, que f sea diferenciable en (x_0,y_0) significa que

(1) $$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + \varphi(x,y)\,\|(x-x_0, y-y_0)\|, \ \forall (x,y)\in A$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = 0$. (*)

Por analogía con el caso real se define las derivadas parciales de f en (x_0,y_0) por

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \in \mathbb{C}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \in \mathbb{C}$$

por supuesto en el caso de que existan dichos límites.

Si f es diferenciable en (x_0,y_0) (se verifica (1)) entonces existen $f_x(x_0,y_0)$ y $f_y(x_0,y_0)$ y se verifica

$$f_x(x_0,y_0) = a \quad , \quad f_y(x_0,y_0) = b.$$

No es equivalente, sin embargo, la diferenciabilidad de $f: A\subset\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathring{A}$ a la diferenciabilidad de $f: A\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ en (x_0,y_0). La siguiente proposición aclara esta cuestión.

1.1. PROPOSICION: $f: A\subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable en $z_0 \in \mathring{A}$ si, y solo si, $f: A\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ es diferenciable en (x_0,y_0) y se satisface además la ecuación de Cauchy-Riemann

$$f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{i} f_y(x_0,y_0).$$

Demostr.: $\Rightarrow$] Si f es diferenciable en $z_0 = x_0+iy_0$ entonces

$$f(z) = f(z_0) + c(z-z_0) + \varphi(z)|z-z_0| \ , \forall z\in A$$

donde $c \in \mathbb{C}$ y $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$.

Escribiendo f como función de dos variables se tiene

(*) Las aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{C}$ son de la forma $(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mapsto ax+by \in \mathbb{C}$ $(a,b\in\mathbb{C})$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + c(x-x_0) + ic(y-y_0) + \varphi(x,y)\|(x-x_0, y-y_0)\|, \ \forall (x,y)\in A.$$
con $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varphi(x,y) = 0$.

Luego f es diferenciable en (x_0,y_0).

Además $f_x(x_0,y_0) = c$ y $f_y(x_0,y_0) = ic$.

Se satisface pues la ecuación de Cauchy-Riemann.

$\Leftarrow$] Si f es diferenciable en (x_0,y_0) entonces
$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + \varphi(x,y)\|(x-x_0,y-y_0)\|, \forall (x,y)\in A.$$
Entonces $f_x(x_0,y_0) = a$, $f_y(x_0,y_0) = b$.

De la ecuación de Cauchy-Riemann se deduce que
$$a = \frac{1}{i} b$$
o bien $b = ia$. Identificando $z=(x,y)$ se tiene ya
$$f(z) = f(z_0) + a(z-z_0) + \varphi(z)|z-z_0|, \ \forall z\in A$$
con $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = 0$. c.s.q.d.

OBSERVACION: De la demostración anterior se deduce también que $f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{i} f_y(x_0,y_0) = f'(z_0) = c$.

Consideramos ahora la función $f: A\subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vista en la forma $f: A\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Denotemos por $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$. (*)

Son ciertas entonces las equivalencias

$[f: A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ es diferenciable en $z_0 = x_0 + iy_0] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f: A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ es diferenciable en (x_0,y_0) y $f_x(x_0,y_0) = \frac{1}{i} f_y(x_0,y_0)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [f=(u,v): A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es diferenciable en (x_0,y_0) y

$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$ y $u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)]$

pues $f_x(x_0,y_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0) = \frac{1}{i} f_y(x_0,y_0) =$
$$= \frac{1}{i}\left(u_y(x_0,y_0) + i v_y(x_0,y_0)\right).$$

Las condiciones
$$(2)\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$$
se llaman las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Consecuencia: Una condición suficiente para que f sea derivable en z_0 es que u y v sean de clase C^1 en un entorno de z_0 y se satisfagan las ecuaciones (2) de Cauchy-Riemann.

Esta es muchas veces la forma práctica de comprobar la derivabilidad de una función en un punto.

(*) La notación clásica es f_1 y f_2 para las componentes de f. Aquí las denotamos por u y v.

2. Funciones holomorfas

Definición: Una función $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice derivable en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ si es derivable en todo punto $z \in A$. En este caso a la aplicación $z \in A \longmapsto f'(z) \in \mathbb{C}$ se le llama función derivada.

Definición: (Función holomorfa en un conjunto A).
Una función f compleja de variable compleja se dice holomorfa en un conjunto A si existe un abierto G que contiene a A en el que f está definida y es derivable. Se denota $f \in H(A)$.

Por lo general, A será abierto y f será holomorfa en A si es derivable en A.

Si f es holomorfa en el abierto A es continua en A. Luego $H(A) \subset \mathcal{C}(A, \mathbb{C})$.

En adelante A será abierto.

Es trivial la siguiente

2.1. Proposición: f es holomorfa en A si, y solo si, f es diferenciable en cualquier punto $(x,y) \in A$ y se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto de A.

2.2. Proposición: Si f es holomorfa en A y u y v $(u = \mathrm{Re} f, v = \mathrm{Im} f)$ son de clase C^2 en A, entonces u y v son armónicas.

Demostr.: Siendo f holomorfa en A, en cada punto de A se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Derivando respecto a x y respecto a y se tiene

$$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ -u_{yx} = v_{xx} \end{cases}$$

Sumando se tiene

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

pues, por el teorema de Schwartz $v_{yx} = v_{xy}$ y $u_{xy} = u_{yx}$.

c.q.d.

(*) u es armónica si es de clase C^2 y satisface la ecuación de Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Algunos autores definen

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2i}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Si tenemos en cuenta que $f(x,y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$ podemos notar que las definiciones anteriores van encaminadas a que sigan siendo ciertas las reglas de cálculo ya conocidas. De acuerdo con esta definición, la ecuación de Cauchy-Riemann dice que

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Nosotros no utilizaremos estas notaciones.

2.3. PROPOSICIÓN: Si $f:]\alpha,\beta[\to \mathbb{C}$ es derivable en $]\alpha,\beta[$ y $f'(x)=0$, $\forall x \in]\alpha,\beta[$, entonces f es constante.

▷ La demostración es trivial sin más que descomponer f en sus partes real e imaginaria. ■

2.4. TEOREMA: Si A es un abierto conexo de $\mathbb{R}^2$ y $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ verifica que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en A, entonces f es constante.

▷ Siendo A abierto y conexo es conexo por poligonales, que incluso podemos tomar de lados paralelos a los ejes. Basta para probar el teorema aplicar la proposición anterior a cada lado de cada poligonal, utilizando que $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ó $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ según que dicho lado sea paralelo al eje OX o al eje OY. ■

2.5. COROLARIO: Si $f: A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable y A es abierto y conexo y $f'(z) = 0$, $\forall z \in A$ entonces f es constante.

▷ Basta observar que entonces $f_x = 0$ y $f_y = 0$. ■ (*)

La hipótesis de conexión de A es fundamental: basta considerar una función definida en la unión de dos discos abiertos disjuntos, constante sobre cada uno de ellos y no constante en la unión.

Un resultado "sorprendente" es el siguiente:

(*) $f'(z) = f_x(x,y) = \frac{1}{i} f_y(x,y)$.

2.6. TEOREMA: Sea A abierto y conexo y $f \in H(A)$. Si es constante ó bien $\operatorname{Re} f$ ó bien $\operatorname{Im} f$ ó $|f|$ ó bien $\operatorname{sig} f = \frac{f}{|f|}$, entonces f es constante.

Demostr.: • Supongamos que $u = \operatorname{Re} f$ es constante. Entonces $\forall z = x+iy \in A$, $f'(z) = f_x(x,y) = u_x + iv_x = u_x - iu_y = 0$

Luego $f'(z) = 0$, $\forall z \in A$ y, por tanto, f es constante.

• Análogamente se prueba si $v = \operatorname{Im} f$ es constante.

• Supongamos que $|f|^2 = u^2 + v^2 = \rho$ (cte ≥ 0). Supondremos $\rho > 0$ pues si $\rho = 0$ sería $f = 0$ y por tanto ya estaría probado.

Derivando $u^2 + v^2 = \rho$ respecto de x y de y se obtiene

$$\begin{cases} 2uu_x + 2vv_x = 0 \\ 2uu_y + 2vv_y = 0 \end{cases}$$

o bien
$$\begin{cases} uu_x + vv_x = 0 \\ uu_y + vv_y = 0 \end{cases}$$

Luego en cada punto $(x,y) \in A$ tenemos un sistema homogéneo que tiene solución no nula pues $u^2 + v^2 > 0$.

Debe ser entonces

$$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = 0$$

es decir $u_x v_y - u_y v_x = 0$

Siendo $v_y = u_x$ y $u_y = -v_x$ se deduce que

$$u_x^2 + v_x^2 = 0$$

es decir $|u_x + iv_x| = 0$, o bien $|f'(z)| = 0$, $\forall z \in A$.

Se deduce ya de esto que f es constante.

• Supongamos que $\frac{f}{|f|}$ es constante. Sea $\frac{f}{|f|} = \alpha + i\beta$.

Obviamente $|\alpha + i\beta| = 1$.

Entonces

$$\operatorname{Re}[(\beta + \alpha i) f] = \operatorname{Re}[(\beta + \alpha i)(\alpha + i\beta)|f|] =$$
$$= \operatorname{Re}[(\alpha^2 + \beta^2) i |f|] = \operatorname{Re}[i|f|] = 0$$

pues $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y $|f| \in \mathbb{R}$.

Como $(\beta + \alpha i) f$ es holomorfa, por serlo f, y tiene parte real constante, se deduce que $(\beta + \alpha i) f$ es constante, y por tanto f es constante. c.q.d.

DEFINICION: (Serie derivada)

Se llama serie derivada de la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a la serie $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$ (o bien $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$)

La siguiente proposición justifica esta definición. Entre otras cosas asegura que las series se pueden derivar término a término.

2.7. PROPOSICION: a) Las series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$ tienen el mismo radio ρ de convergencia. b) Además si $z\in B(0,\rho) \mapsto A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ entonces A es derivable en $B(0,\rho)$ y
$$A'(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}, \ \forall z \in B(0,\rho).$$

Demostr.: a) Sea $\alpha_n = |a_n|$, $\forall n\in \mathbb{N}_0$, y sean ρ y ρ' los radios de convergencia de las series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y su derivada, respectivamente. Probaremos que $\rho\leq\rho'$ y que $\rho'\leq\rho$.

$\rho'\leq\rho$) Si fuese $\rho'=0$ es trivial. Supongamos que $\rho'>0$. Si $r\in]0,\rho'[$, entonces $\sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$.

Excepto para $n=0$ se verifica que $\alpha_n \leq n\alpha_n$, $\forall n$.

Como $r\left(\sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^{n-1}\right) = \sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^n < +\infty$ se verifica que $\sum_{n\geq 0} \alpha_n r^n < +\infty$. Luego $r\leq\rho$. Siendo esto cierto para todo $r\in]0,\rho'[$ se verifica que $\rho'\leq\rho$.

$\rho\leq\rho'$) Si $\rho=0$ es trivial. Si no sea $0<r<\rho$. Existe entonces $r'>0$ tal que $r<r'<\rho$.

Por tanto $\sum_{n\geq 0} \alpha_n r'^n$ es convergente.

En consecuencia, existe $M>0$ tal que $\alpha_n r'^n \leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Se verifica entonces
$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\alpha_n r^{n-1} = \frac{n}{r'}\alpha_n r'^n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1} \leq \frac{M}{r'} n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^{n-1}$ está mayorada por $\frac{M}{r'}\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$.

Pero esta última serie es convergente: basta aplicar el criterio del cociente
$$\frac{n+1}{n}\,\frac{\left(\frac{r}{r'}\right)^n}{\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r'} < 1$$

Luego $\sum_{n\geq 0} n\alpha_n r^{n-1}$ es convergente. Por tanto $r\leq\rho'$. Esto que esto es cierto para todo $r \in]0,\rho[$ se verifica que $\rho \leq \rho'$.

b) Sea ρ el radio de convergencia de las series $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$ y supongamos $\rho > 0$. Veamos que la función A es derivable en todo punto $z \in B(0,\rho)$ y que su derivada es $A_1(z) = \sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$.

Basta ver que
$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - A_1(z)\right) = 0$$
Se trata de probar que
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - A_1(z)\right| < \varepsilon.$$
Sea $r > 0$ tal que $|z| < r < \rho$.

Sea h tal que $0 \neq |h| < r - |z|$. Entonces $|z+h| \leq |z| + |h| < r$. es decir, $z+h \in B(0,r) \subset B(0,\rho)$.

Se verifica que
$$\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - A_1(z) = \sum_{n\geq 1} u_n(z,h)$$
donde
$$u_n(z,h) = a_n\left[(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + z^{n-1} - n z^{n-1}\right]$$
En efecto, el término general es
$$a_n\left(\frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1}\right) \overset{(*)}{=} a_n\left[(z+h)^{n-1} + (z+h)^{n-2}z + \ldots + z^{n-1} - n z^{n-1}\right].$$
Puesto que $|z| < r$ y $|z+h| < r$ se verifica que
$$|u_n(z,h)| \leq |a_n|\left[|(z+h)^{n-1}| + |z+h|^{n-2}|z| + \ldots + |z|^{n-1} + n|z|^{n-1}\right] \leq$$
$$\leq \alpha_n\left[r^{n-1} + r^{n-1} + \ldots + r^{n-1} + n r^{n-1}\right] = 2n\alpha_n r^{n-1}, \ \forall n \geq 1.$$
Siendo $r < \rho$, $\sum_{n\geq 1} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$ y por tanto $\sum_{n\geq 1} 2n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$

Entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que
$$\sum_{n > \nu} 2n\alpha_n r^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2}$$
Además, $\forall n$, $u_n(z,h)$ es un polinomio en h que vale 0 si $h = 0$. Luego $\sum_{n=1}^{\nu} u_n(z,h)$ es un polinomio en h que vale cero cuando $h = 0$.

Luego dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$ entonces $\left|\sum_{n=1}^{\nu} u_n(z,h)\right| < \varepsilon/2$

Por tanto, $\exists \delta > 0 \,/\, |h| < \delta \Rightarrow \left|\frac{A(z+h)-A(z)}{h} - A_1(z)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{\nu} u_n(z,h)\right| +$

(*) Comprobar que $\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$

$+\left|\sum_{n>r} u_n(z,h)\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

Luego $A_1(z)=A'(z)$. Esto prueba que A es derivable y que su derivada es la función que define la serie derivada de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. c.s.q.d.

2.8. COROLARIO: Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es una serie con radio de convergencia ρ entonces la función $A: z\in B(0,\rho)\longmapsto A(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n \in \mathbb{C}$ es holomorfa en $B(0,\rho)$. Además la derivada m-ésima de A es $A^{(m)}(z)=\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n z^{n-m}$, que también es holomorfa en $B(0,\rho)$. Se verifica además que

$$a_m = \frac{A^{(m)}(0)}{m!}, \quad \forall m\geq 0.$$

▷ La demostración es trivial. Para ver que $a_m=\frac{A^{(m)}(0)}{m!}$ basta observar que $A^{(m)}(0)=m(m-1)\cdots(m-m+1)a_m = m!\,a_m$. ■

3. FUNCIONES DESARROLLABLES EN SERIES DE POTENCIAS. FUNCIONES ANALÍTICAS

DEFINICIÓN: Una función $f: B(z_0,\rho)\to\mathbb{C}$ se dice desarrollable en serie de potencias en z_0 si

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z\in B(z_0,\rho).$$

En relación con esto tenemos la siguiente

3.1. PROPOSICIÓN: a) Si $f: B(z_0,\rho)\to\mathbb{C}$ es desarrollable en serie su desarrollo es único y es

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad \forall z\in B(z_0,\rho).$$

b) Si dos series con el mismo radio de convergencia ρ definen una misma función en un entorno de z_0, entonces las funciones coinciden en $B(z_0,\rho)$.

c) Si f y g son desarrollables en z_0 y $f\cdot g=0$ en un entorno de z_0 entonces una de las dos funciones es cero.

d) Si f es desarrollable en z_0 entonces existe g desarrollable en z_0 tal que $g'=f$, y además g es única salvo constantes aditivas.

Demostr.: a) COROLARIO 2.8

b) En este caso coincidirían todas las derivadas y los coeficientes de las series coinciden.

c) Si fuesen $f\neq 0$ y $g\neq 0$ eligiendo en las series que las definen ~~los~~ menores coeficientes no nulos se comprobaría que $f\cdot g\neq 0$, contra la hipótesis.

d) Si $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ entonces $g(z)=\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ tiene el mismo radio de convergencia que f y verifica que $g'=f$. Además g es única salvo constantes aditivas, pues si hubiese dos, la diferencia tiene derivada nula y por tanto es constante. c.s.q.d.

DEFINICION: (Función analítica en un abierto)

Sea Ω ~~un~~ abierto de $\mathbb{C}$ y $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una función. Se dice que f es analítica en Ω si es desarrollable en serie de potencias en cada punto $z_0\in\Omega$, es decir, f es analítica en Ω si $\forall z_0\in\Omega,\ \exists \rho>0 \ /\ f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n,\ \forall z\in B(z_0,\rho)$.

Es trivial comprobar que

a) Si f es analítica en Ω, tiene todas las derivadas en Ω y estas son analíticas en Ω. ▷ Es evidente, pues en un entorno de cada punto z_0 de Ω f se escribe como una serie de potencias y, en dicho entorno, y en particular en z_0, f es derivable infinitas veces. ■ Observar que si f es analítica en Ω ($f\in A(\Omega)$) entonces $f\in H(\Omega)$.

b) La suma y el producto de dos funciones analíticas en Ω son analíticas en Ω.

c) Si f es analítica en Ω, $1/f$ es analítica en el abierto $\Omega\setminus\{x\in\Omega / f(x)=0\}$, y $1/f$ en cada punto de dicho abierto viene definida por la serie inversa de la que define a f en dicho punto.

d) Si $f:\Omega\to\Omega'$ y $g:\Omega'\to\mathbb{C}$ son analíticas, entonces $g\circ f$ es analítica en Ω. ▷ Aplicar el teorema de sustitución de una serie convergente en otra convergente. ■

e) Si f es analítica en el abierto conexo Ω y si existe $g:\Omega\to\mathbb{C}$ tal que $g'=f$, entonces g es analítica en Ω y es única salvo constantes aditivas.

Observar que una función analítica no tiene porqué admitir primitiva; desde luego sí la admite en un entorno de cada punto, y en el caso de que f admita primitiva global, ésta ha de coincidir con cada una de las primitivas locales de f.