TEMA 5º: FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARITMICA. ARGUMENTO.

1. EXPONENCIALES COMPLEJA, REAL E IMAGINARIA.

Se define la función exponencial en $\mathbb{C}$ por

$$\exp : z \in \mathbb{C} \longmapsto e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \in \mathbb{C}$$

En primer lugar hemos de comprobar que la serie que define e^z, para cada z, es convergente: Aplicaremos para ello el criterio del cociente:

$$\frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Consecuencias inmediatas de la definición son:

1.1| La derivada de la exponencial compleja es ella misma:

▷ $(e^z)' = \sum_{n\geq 1} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z$. ▨

1.2| $e^0 = 1$ y $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

▷ $e^{z_1} = \sum_{n\geq 0} \frac{z_1^n}{n!}$, $e^{z_2} = \sum_{n\geq 0} \frac{z_2^n}{n!}$. Luego

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n\geq 0} \sum_{p+q=n} \frac{z_1^p}{p!}\frac{z_2^q}{q!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!\,q!} z_1^p z_2^q =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_1^p z_2^{n-p} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}. \ ▨$$

1.3| $e^z \neq 0$, $\forall z$

▷ $e^z e^{-z} = 1$ (por 1.2|) Luego $e^z \neq 0$. ▨

1.4| Si $z = x+iy$, $e^z = e^x \cdot e^{iy}$.

* EXPONENCIAL REAL: Se define la función exponencial real como

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \in \mathbb{R}$$

Se verifica que $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, pues $e^x = \left[e^{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 > 0$, $\forall x$.

Además $e^x > 1+x$, $\forall x>0$, pues $e^x = 1+x+\sum_{n\geq 2}\frac{x^n}{n!}$.

La derivada de la exponencial real es ella misma y, por tanto es una función estrictamente creciente ($e^x>0$).

$\lim_{x\to+\infty} e^x \geq \lim_{x\to+\infty}(1+x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0$.

Siendo $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ biyectiva admite función inversa que será estrictamente creciente como ella:

$\forall t\in]0,+\infty[$, $\exists \log t \in \mathbb{R}$ / $e^{\log t} = t$.

Se verifica que $\log(t_1 t_2) = \log t_1 + \log t_2$, que $\log 1 = 0$ y que

$$(\log t)' = 1/t$$

Se verifica que

$$\forall u \in]-1,1[,\ \log(1+u) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} \quad (1)$$

Basta observar que

$[\log(1+u)]' = \frac{1}{1+u} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n u^n$ si $|u|<1$ (es la suma de una progresión geométrica de razón $-u$). Integrado se obtiene la igualdad (1).

* EXPONENCIAL IMAGINARIA: Se define la exponencial imaginaria por $y\in\mathbb{R} \longmapsto e^{iy}\in\mathbb{C}$.

Se verifica

$$e^{iy} = \sum_{n\geq 0}\frac{(iy)^n}{n!} = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Es trivial que $(e^{iy})' = ie^{iy}$. Además

$$e^{-iy} = \left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right) - i\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

es decir, e^{-iy} es el conjugado de e^{iy}.

Se verifica entonces que

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Luego la exponencial imaginaria tiene de rango (imagen) la circunferencia unidad en $\mathbb{C}$.

Recordemos las definiciones de $\cos y$, $\operatorname{sen} y$:

$$\cos y = \operatorname{Re}(e^{iy}) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{Im}(e^{iy}) = \sum (-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Luego $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$.
De las definiciones de las funciones seno y coseno dadas se deducen trivialmente todas las propiedades ya conocidas para estas funciones.

Veremos después algunas propiedades interesantes de la función exponencial imaginaria, pero antes vamos a definir el número π. Para hacer posible esta definición necesitamos la siguiente

11. PROPOSICION: Existe un número real positivo y tal que
$$\cos y = 0.$$

Demostr.: Se verifica que $\cos 0 = 1$ (ver definición de coseno).
Si la proposición no fuese cierta, siendo la función coseno continua se verificaría que $\cos y > 0$, $\forall y > 0$.
Siendo la derivada del seno el coseno (ver las definiciones de seno y coseno) se tendría entonces que la función seno es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$; incluso lo sería en todo $\mathbb{R}$ pues $\forall y \geq 0$, $\cos(-y) = \cos y > 0$. En particular se tiene que $\forall y > 0$, $\operatorname{sen} y > \operatorname{sen} 0 = 0$.

Siendo la derivada del coseno el opuesto del seno se tendría que la función coseno es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$.
Además, las funciones seno y coseno son acotadas, pues se han definido como las partes imaginaria y real de un número complejo que siempre es de módulo 1. Se deduciría entonces que existen
$$\lim_{y\to+\infty} \cos y \quad \text{y} \quad \lim_{y\to+\infty} \operatorname{sen} y.$$
y por tanto, existe $c = \lim_{y\to+\infty} e^{iy} \in \mathbb{C}$, pues $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$.
Se verifica además que $|c| = 1$, pues $|e^{iy}| = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$.
Entonces, cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$
$$c = \lim_{y\to+\infty} e^{iy} = \lim_{y\to+\infty} e^{i(t+y)} = e^{it} \lim_{y\to+\infty} e^{iy} = e^{it} c.$$
Siendo $c \neq 0$, pues $|c| = 1$, se verificaría que $e^{it} = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y, por tanto, la derivada de la función $t \in \mathbb{R} \to e^{it}$ sería nula en todo punto $t \in \mathbb{R}$, es decir $ie^{it} = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ lo cual es obviamente absurdo pues $e^{it} \neq 0$ ($|e^{it}| = 1$).

Debe entonces existir $y>0$ tal que $\cos y = 0$. c.s.q.d.

Entonces

DEFINICION: (El número π)

Se considera el conjunto $A=\{y>0 / \cos y = 0\}$. Se define el número π como

$$\pi = 2 \cdot \inf A.$$

Observar que la definición es consistente pues $A \neq \emptyset$ y está acotado inferiormente por 0.

Además, siendo A cerrado por ser la función coseno continua, se deduce que $\frac{\pi}{2} = \inf A \in A$. Luego $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ y $\frac{\pi}{2}$ es el primer número positivo en el que se anula la función coseno.

Se deduce además que $\cos y > 0$, $\forall y \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

1.2. LEMA: Sea $T_1 = \{(u,v) / u^2+v^2=1, u,v \geq 0\}$. Entonces la aplicación $y \in [0,\frac{\pi}{2}] \longmapsto e^{iy} \in T_1$ es un homeomorfismo.

Demostr.: Veamos que, en efecto, $e^{iy} = (\cos y, \operatorname{sen} y) \in T_1$, $\forall y \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Es obvio que $\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y = 1$. Además $\cos y \geq 0$ si $0 \leq y \leq \pi/2$, por definición de π. Por otra parte como $D(\operatorname{sen} x) = \cos x$ se verifica que la función seno es creciente en $[0,\frac{\pi}{2}]$ y por tanto $\operatorname{sen} y \geq \operatorname{sen} 0 = 0$, $\forall y \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Luego $(\cos y, \operatorname{sen} y) \in T_1$, $\forall y \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

Si probamos que $y \in [0,\frac{\pi}{2}] \longmapsto e^{iy} \in T_1$ es biyectiva, tendríamos una aplicación biyectiva y continua definida en un compacto y valorada en un espacio de Haussdorf, y por tanto, ya sería homeomorfismo. Falta pues probar que es biyectiva.

Probaremos que $\forall (u_0,v_0) \in T_1$, $\overset{\circ}{\exists}\, y_0 \in [0,\frac{\pi}{2}] / e^{iy_0} = (u_0,v_0)$.

Puesto que $\cos([0,\frac{\pi}{2}]) = [0,1]$ y la función coseno es estrictamente decreciente en $[0,\frac{\pi}{2}]$ se verifica que dado $u_0 \in [0,1]$ existe un único $y_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$ tal que $\cos y_0 = u_0$.

Entonces $v_0 = \sqrt{1-u_0^2} = \sqrt{1-\cos^2 y_0} = \operatorname{sen} y_0 \geq 0$, pues $y_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$.

Luego $e^{iy_0} = (\cos y_0, \operatorname{sen} y_0) = (u_0,v_0)$, e y_0 es único. c.s.q.d.

El siguiente teorema da una interesante propiedad de la exponencial imaginaria. En particular, esta aplicación identifica (en sentido topológico) el intervalo $[0,2\pi[$ con la circunferencia unidad S^1

1.3. TEOREMA. La aplicación $h: y \in \mathbb{R} \longmapsto e^{iy} \in S^1$ es un homomorfismo "sobre" $S^1 = \{u \in \mathbb{C} \,/\, |u| = 1\}$, considerando $\mathbb{R}$ como grupo aditivo y S^1 como subgrupo multiplicativo de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además $\operatorname{Ker} h = \{2K\pi \,/\, K \in \mathbb{Z}\}$.

Demostr.: Es trivial que h es homomorfismo, pues $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $h(y_1 + y_2) = e^{i(y_1+y_2)} = e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = h(y_1) \cdot h(y_2)$.

Para ver que h es sobre basta ver que $h([0, 2\pi]) = S^1$. Sabemos que h aplica bijectivamente $[0, \frac{\pi}{2}]$ en T_1, que es el primer cuadrante de S^1. Veamos que $h([\frac{\pi}{2}, \pi]) = T_2$ donde $T_2 = \{(u,v) \,/\, u^2 + v^2 = 1,\ u \leq 0,\ v \geq 0\}$ es el 2° cuadrante de S^1. Sea $y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Entonces $y = (y - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}$. Es obvio que $y - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ y por tanto $u_1 = h(y - \frac{\pi}{2}) \in T_1$. Siendo $h(\frac{\pi}{2}) = i$ se deduce que $h(y) = i u_1 \in T_2$. (*)

Luego $h([\frac{\pi}{2}, \pi]) \subset T_2$.

Aun más, h aplica bijectivamente $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ en T_2, pues es la composición de biyecciones

$$y \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi] \longmapsto y - \tfrac{\pi}{2} \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \longmapsto h(y - \tfrac{\pi}{2}) \in T_1 \longmapsto i\,h(y - \tfrac{\pi}{2}) \in T_2.$$

De la misma forma se puede establecer una biyección entre $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ y el 3^{er} cuadrante T_3, y entre $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ y T_4 mediante la exponencial imaginaria.

Luego existe una biyección entre $[0, 2\pi[$ y S^1 (observar que $h(0) = h(2\pi) = 1$). Además si $h(y) = 1$ e $y \in [0, 2\pi[$ entonces $y = 0$.

Probemos ahora que $\operatorname{Ker} h = \{2K\pi \,/\, K \in \mathbb{Z}\}$.
Se verifica que $e^{2\pi i} = (e^{i\frac{\pi}{2}})^4 = (\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})^4 = i^4 = 1$.
Luego $2\pi \in \operatorname{Ker} h$.

Siendo $\operatorname{Ker} h$ subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$ se verifica que $2K\pi \in \operatorname{Ker} h$ para todo $K \in \mathbb{Z}$. Luego $\{2K\pi \,/\, K \in \mathbb{Z}\} \subset \operatorname{Ker} h$.
Sea ahora $y \in \operatorname{Ker} h$, es decir, tal que $h(y) = 1$.
Para este y, existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que $K \leq \frac{y}{2\pi} < K + 1$ y por tanto $2K\pi \leq y < 2K\pi + 2\pi$, y también

$$0 \leq y - 2K\pi < 2\pi$$

Como $y \in \operatorname{Ker} h$, $2K\pi \in \operatorname{Ker} h$ se tiene que $y - 2K\pi \in \operatorname{Ker} h$.
Además $y - 2K\pi \in [0, 2\pi[$. Luego $y - 2K\pi = 0$ c.s.q.d.

2. Argumentos de un número complejo: argumento principal

Definición: Dado $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se dice que $\theta \in \mathbb{R}$ es un argumento de z si $z = |z| e^{i\theta}$.

Observar que si $z \in \mathbb{C}^*$, $z/|z| \in S^1$ y por tanto existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $z/|z| = e^{i\theta}$. Luego todo número complejo tiene al menos un argumento. Se escribirá $\theta = \arg z$.

no nulo

Se verifica que dos argumentos de un mismo número complejo se diferencian en un múltiplo de 2π. En efecto: si $z = |z| e^{i\theta}$ y $z = |z| e^{i\theta_0}$ entonces dividiendo miembro a miembro se deduce que $e^{i(\theta-\theta_0)} = 1$. Luego $\theta - \theta_0 \in \operatorname{Ker} h$ y por tanto existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$.

Por tanto, el conjunto de los argumentos del número complejo z está contenido en $\theta_0 + \operatorname{Ker} h$. Incluso se da la igualdad entre estos dos conjuntos, pues si $z = |z| e^{i\theta_0}$ entonces $\forall k \in \mathbb{Z}$, $z = |z| e^{i(\theta_0 + 2k\pi)}$.

Se deduce de esto que todo intervalo de longitud 2π contiene algún argumento de cualquier número complejo $z \in \mathbb{C}^*$. ~~En~~ en particular se verifica

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \ \dot{\exists} \theta \in]-\pi, \pi] \ / \ e^{i\theta} = z/|z|$$

A este valor de θ se le llama argumento principal de z y se escribe $\theta = \operatorname{Arg} z$.

2.1. Proposición: Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ entonces se verifica

$$\boxed{\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}} \quad (*)$$

Demostr.:

$$e^{i(\arg z_1 + \arg z_2)} = e^{i\arg z_1} + e^{i\arg z_2} = \frac{z_1}{|z_1|} \cdot \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} =$$

$$= e^{i\arg(z_1 \cdot z_2)} \text{. c.s.q.d.}$$

Observación: No se puede asegurar que $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. Por ejemplo $\operatorname{Arg}(-1)^2 \neq \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg}(-1)$. Sí es cierta la igualdad salvo múltiplos de 2π.

3. LOGARITMO COMPLEJO

Nos preguntamos ahora si, dado $w \in \mathbb{C}^*$, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$.

Si $z = x+iy$ ha de verificar que $e^z = w$, debe ser $e^x e^{iy} = w$ y por tanto sería $|w| = |e^x e^{iy}| = e^x$, y $x = \log|w|$. Luego $w = |w| e^{iy}$ y en consecuencia y ha de ser un argumento de w. Luego z es de la forma $\log|w| + i\arg w$. Recíprocamente, si z es de esta forma se tiene que $e^z = |w| e^{i\arg w} = |w| \frac{w}{|w|} = w$.

Se ha probado así la siguiente

3.1 PROPOSICION: Si $w \in \mathbb{C}^*$ existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $e^z = w$ y z es necesariamente de la forma

$$z = \log|w| + i\arg w.$$

Además si z es de esta forma $e^z = w$.

Esto nos permite dar la siguiente

DEFINICION: Dado $w \in \mathbb{C}^*$ se llama un logaritmo de w y se denota por $\log w$ a cualquier $z \in \mathbb{C}$ que satisfaga $e^z = w$.

De acuerdo con la proposición 3.1. los logaritmos de $w \in \mathbb{C}^*$ son de la forma

$$\log w = \log|w| + i\arg w \qquad (1)$$

y se dice "los logaritmos" pues habiendo infinitos argumentos de w, hay infinitos logaritmos de w. Puesto que dos argumentos cualesquiera de w se diferencian en un múltiplo de 2π, a la vista de (1) es obvio que dos logaritmos cualesquiera se diferencian en un múltiplo de $2\pi i$, es decir, si $(\log w)_0$ es un logaritmo particular de w entonces el conjunto de los logaritmos de w es

$$\{(\log w)_0 + 2K\pi i \,/\, K \in \mathbb{Z}\}$$

DEFINICION: Se llama logaritmo principal de w y se denota por $\mathrm{Log}\, w$ a $\mathrm{Log}\, w = \log|w| + i\,\mathrm{Arg}\, w$.

Es trivial la demostración de la siguiente

3.2. PROPOSICION: Si $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*$ entonces

$$\log(w_1 \cdot w_2) = \log w_1 + \log w_2 \pmod{2\pi i}$$

OBSERVACION: La igualdad no se da necesariamente en la proposición anterior. Por ejemplo

$$\operatorname{Log}(-1)^2 = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log}(-1) = \pi i + \pi i = 2\pi i.$$

En el caso de que $w \in \mathbb{R}$, si $w > 0$ $\operatorname{Log} w = \log w$ y si $w < 0$, $\operatorname{Log} w = \log(-w) + \pi i$.

DEFINICION: (Determinaciones del logaritmo y el argumento)

Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ tal que $0 \notin \Omega$. Se dice que una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es una determinación del logaritmo (resp. argumento) si se cumple

i) f es continua en Ω.

ii) $\forall z \in \Omega$, $f(z)$ es un logaritmo de z (resp. un argumento de z), es decir, $\forall z \in \Omega$, $e^{f(z)} = z$ (resp. $e^{if(z)} = \frac{z}{|z|}$).

Algunos autores a la determinación del logaritmo (resp. argumento) le llaman rama del logaritmo (resp. argumento).

Cabe preguntarse en qué tipos de abiertos existe una determinación del logaritmo. A esto se responderá más adelante: la respuesta es en los simplemente conexos.

Sabemos que dos logaritmos de un mismo número complejo se diferencian en un múltiplo de $2\pi i$; para otro número complejo la diferencia puede ser otro múltiplo, distinto del anterior, de $2\pi i$. Sin embargo, para dos determinaciones del logaritmo, en virtud de i), se verifica

3.3. PROPOSICION: Si $f_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una determinación del logaritmo (resp. argumento) y Ω es abierto y conexo, entonces las determinaciones del logaritmo (resp. argumento) en Ω son de la forma

$$f_0 + 2K\pi i,\ K \in \mathbb{Z} \quad (\text{resp. } f_0 + 2K\pi,\ K \in \mathbb{Z})$$

Demostr.: Haremos la demostración del enunciado referente al logaritmo. La del argumento es análoga.

Si f_0 es una determinación del logaritmo entonces f_0 es continua en Ω y $e^{f_0(z)} = z$, $\forall z \in \Omega$. Entonces si $K \in \mathbb{Z}$, $f_0 + 2K\pi i$ es trivialmente una determinación del logaritmo en Ω. Veamos el recíproco, es decir, que para toda determinación f del logaritmo en Ω existe $K \in$

tal que $f(z) = f_0(z) + 2k\pi i$, $\forall z \in \Omega$.

Dada f consideremos la función

$$z \in \Omega \longmapsto K(z) = \frac{f(z) - f_0(z)}{2\pi i}$$

Esta función es continua en Ω. Además toma valores en $\mathbb{Z}$ pues $\forall z \in \Omega$, $f(z) \equiv f_0(z) \pmod{2\pi i}$.

Siendo Ω conexo y $K(z)$ continua en Ω valorada en $\mathbb{Z}$ ha de verificarse que $K(\Omega)$ es un conexo en $\mathbb{Z}$. Luego $K(\Omega)$ es unitario y, por tanto, $K(z)$ es constante, es decir $\exists k \in \mathbb{Z} \mid f(z) = f_0(z) + 2k\pi i$, $\forall z \in \Omega$. csqd.

3.4. PROPOSICION: ① Si f es una determinación del argumento en Ω entonces la función

$$g: z \in \Omega \longmapsto \log|z| + i f(z)$$

es una determinación del logaritmo en Ω.

② Si f es una determinación del logaritmo en Ω entonces la función

$$g: z \in \Omega \longmapsto \frac{1}{i}\left(f(z) - \log|z|\right)$$

es una determinación del argumento en Ω.

Demostr.: La continuidad de g en Ω es trivial en ambos casos.

① $e^{g(z)} = e^{\log|z| + i f(z)} = |z| e^{i f(z)} = |z| \frac{z}{|z|} = z$, $\forall z \in \Omega$.

② $e^{i g(z)} = e^{f(z) - \log|z|} = e^{f(z)}/e^{\log|z|} = \frac{z}{|z|}$, $\forall z \in \Omega$. csqd.

3.5. PROPOSICION: La función logaritmo principal

$$\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg} z$$

es una determinación del logaritmo en el plano complejo cortado por el semieje real negativo, es decir, en el conjunto $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$.

Demostr.: Desde luego $e^{\operatorname{Log} z} = z$, $\forall z \in \Omega$.

Falta probar que Log es continua en Ω, para lo cual es suficiente probar que Arg es continua en Ω.

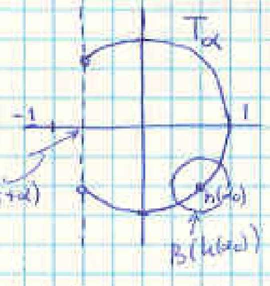
Llamaremos T' a la circunferencia unidad en $\mathbb{C}$ excepto el punto -1. Es trivial que Arg es la composición de las aplicaciones

$z \in \Omega \longmapsto \frac{z}{|z|} \in T'$ y $h^{-1}: T' \longrightarrow]-\pi, \pi[$ donde

h es la exponencial imaginaria restringida a $]-\pi, \pi[$.
La primera aplicación ($z \longmapsto z/|z|$) es trivialmente continua en Ω. Para ver que h^{-1} es continua basta probar que $h:]-\pi,\pi[\longrightarrow T'$ es abierta.

Probaremos que, dado $\alpha_0 \in]-\pi,\pi[$, h transforma entornos de α_0 en $]-\pi,\pi[$ en entornos de $h(\alpha_0)$ en T'.

Sea pues $\alpha_0 \in]-\pi,\pi[$ y sea $\alpha > 0$ tal que $-\pi+\alpha < \pi-\alpha$ y tal que $\alpha_0 \in [-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$.



Es fácil comprobar que
$$h([-\pi+\alpha,\pi-\alpha]) = \{z \in T' / \operatorname{Re} z \geq \cos(-\pi+\alpha)\}$$
conjunto que denotaremos por T_α.

Entonces h es un homeomorfismo de $[-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$ en T_α (con la topología que induce la de S^1 en T_α, que coincide con la topología que induce la de $\mathbb{R}^2$ en T_α).

Sea entonces $]\alpha_0-\varepsilon, \alpha_0+\varepsilon[$ un entorno abierto de α_0, donde podemos suponer ε suficientemente pequeño para que $]\alpha_0-\varepsilon,\alpha_0+\varepsilon[\subset [-\pi+\alpha, \pi-\alpha]$. Por tanto, $h(]\alpha_0-\varepsilon, \alpha_0+\varepsilon[)$ es un entorno abierto de $h(\alpha_0)$ en T_α. Existe pues una bola abierta $B(h(\alpha_0))$ centrada en α_0, de radio suficientemente pequeño para que esté contenida en $\{z \in \mathbb{C}^* / \operatorname{Re} z \geq \cos(-\pi+\alpha)\}$ y de forma que
$$T_\alpha \cap B(h(\alpha_0)) \subset h(]\alpha_0-\varepsilon, \alpha_0+\varepsilon[)$$
Pero trivialmente $T_\alpha \cap B(h(\alpha_0)) = T' \cap B(h(\alpha_0))$.
Luego $T' \cap B(h(\alpha_0)) \subset h(]\alpha_0-\varepsilon, \alpha_0+\varepsilon[)$, lo que prueba que $h(]\alpha_0-\varepsilon,\alpha_0+\varepsilon[)$ es entorno de $h(\alpha_0)$ en T' c.q.d.

<u>OBSERVACIONES</u>: Es sencillo probar los siguientes resultados, utilizando argumentos análogos a los que se han utilizado para la demostración de la proposición anterior:

① Si $(z_n)_n \xrightarrow[\mathbb{C}]{} z$ y $z<0$ e $\operatorname{Im} z_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $(\operatorname{Arg} z_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{} \pi$.

② Si $(z_n)_n \xrightarrow[\mathbb{C}]{} z$ y $z<0$ e $\operatorname{Im} z_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $(\operatorname{Arg} z_n) \xrightarrow[\mathbb{R}]{} -\pi$.

3.6. PROPOSICION: Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una determinación del logaritmo en Ω, entonces f es derivable en todo punto de Ω y se verifica
$$f'(z) = \frac{1}{z}, \quad \forall z \in \Omega. \qquad (*)$$

Demostr.: Se trata de estudiar si existe
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$
Sea $\omega' = f(z+h)$ y $\omega = f(z)$. Entonces, por ser f una determinación del logaritmo se tiene que $e^{\omega'} = z+h$ y $e^{\omega} = z$, y además f es continua; portanto, $h\to 0 \Rightarrow \omega' \to \omega$.

Entonces
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\omega'\to\omega} \frac{\omega'-\omega}{e^{\omega'}-e^{\omega}} = \lim_{\omega'\to\omega} \frac{1}{\frac{e^{\omega'}-e^{\omega}}{\omega'-\omega}} =$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{\omega'\to\omega} \frac{e^{\omega'}-e^{\omega}}{\omega'-\omega}} = \frac{1}{e^{\omega}} = \frac{1}{z}$$
pues la función exponencial es derivable y su derivada en un punto ω es e^{ω}. csqd.

3.7. COROLARIO: La función logaritmo principal es holomorfa en el plano complejo cortado por el semieje real negativo.

▷ Basta ver que en dicho conjunto Log es una determinación del logaritmo, lo cual se probó en 3.5. PROPOSICION. ▨

3.8. PROPOSICION: Se verifica que
$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{para } |z|<1.$$

Demostr.: Observar que siendo $|z|<1$, Log $(1+z)$ no es ni cero ni real negativo. Por tanto, $\mathrm{Log}(1+z)$ es derivable en $\{z\in\mathbb{C} / |z|<1\}$ y su derivada es
$$(1) \quad D(\mathrm{Log}(1+z)) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} \quad (\text{para } |z|<1)$$
pues $\left((-1)^{n-1} z^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es una progresión geométrica cuya suma es $\frac{1}{1+z}$. Integrando (1) se obtiene
$$\mathrm{Log}(1+z) = C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{para } |z|<1$$

Si observamos que para $z=0$, $\operatorname{Log}(1+0)=0$ se deduce que $C=0$ y por tanto

$$\operatorname{Log}(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} \quad \text{csqd}$$

4. EXPONENCIAL COMPLEJA DE BASE COMPLEJA. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS E HIPERBOLICAS EN $\mathbb{C}$.

DEFINICION: Sea $a\in\mathbb{C}^*$. Se define

$$a^z=e^{z\log a}$$

Luego a^z toma "tantos" valores como pueda tomar $\log a$.

Las siguientes definiciones generalizan las funciones trigonométricas e hiperbólicas de $\mathbb{R}$.

DEFINICION: Para cada $z\in\mathbb{C}$ se define

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \operatorname{sen} z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

DEFINICION. Para cada $z\in\mathbb{C}$ se define

$$\operatorname{Ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{Sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

OBSERVACION: Nótese que las funciones coseno y seno complejas no son acotadas como ocurría con las reales. Baste observar que si $z=iy$ entonces

$$\cos z=\cos iy=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$