TEMA 6º: SUPERFICIES DE RIEMANN ELEMENTALES.

1. INTRODUCCION.

Hay "funciones" de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, como la función raiz n-sima o la función logaritmo, que no son funciones propiamente dichas (en el sentido de aplicación), pues a cada punto de $\mathbb{C}$ le corresponde más de una imagen. Recordemos que

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n} e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}\right)} \qquad k=0,1,\dots,n-1 \qquad (z\neq 0)$$

$$\log z = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi), \quad k\in\mathbb{Z} \quad (z\neq 0).$$

Se pretende encontrar un dominio de definición adecuado para dichas funciones de forma que sean funciones en el sentido de aplicación. La idea de Riemann es considerar que sobre cada punto del plano complejo existen tantos puntos "coincidentes" como imágenes distintas hay. Por ejemplo, en el caso de la raiz n-sima, que sobre cada punto z del plano existen n puntos iguales en algún sentido que ya precisaremos, pero distintos, correspondientes cada uno de ellos con una de las raices n-simas. Intuitivamente puede considerarse el plano complejo como una hoja de papel, y lo que Riemann propone es superponer tantas hojas de papel como imágenes haya, cada una de las cuales se llama una copia del plano.

Pero interesa además que las funciones sean continuas. Para ello hemos de dotar al conjunto de las copias del plano de una topología adecuada, y sería deseable si fuese posible (¡que lo es!) que dicha topología induzca en cada copia una topología "igual" a la del plano complejo.

Intuitivamente, lo que haremos es cortar cada copia por el semieje real negativo, y "pegar" el borde superior de cada copia con el inferior de la que tiene encima.

Estas ideas se formalizan en lo que sigue.

2. SUPERFICIE DE RIEMANN PARA LA RAIZ n-SIMA.

En este caso interesará tener n copias del plano.

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{ \xi = (z, K) \ / \ z \in \mathbb{C}^*, K \in \mathbb{Z} \} \qquad (*)$$

Puesto que solo interesa tener n copias se define en $\mathcal{S}$ la siguiente relación de equivalencia: dos puntos de $\mathcal{S}$ $\xi_1 = (z_1, K_1)$ y $\xi_2 = (z_2, K_2)$ se dicen iguales (o equivalentes) si $z_1 = z_2$ y $K_1 \equiv K_2 \ (\mathrm{mod}\ n)$.

Intuitivamente lo que se hace es al llegar a la copia n-sima volvemos a la primera pegando el borde superior de aquella con el inferior de ésta. El conjunto cociente lo seguiremos denotando por $\mathcal{S}$.

Vamos a definir en $\mathcal{S}$ una topología definiendo una base de entornos de cada punto de $\mathcal{S}$.

Sea $\xi_0 = (z_0, K) \in \mathcal{S}$. Definimos una familia $\mathcal{B}(\xi_0)$ de partes $U_r(\xi_0)$ de $\mathcal{S}$ de la siguiente forma:

i) Si $\operatorname{Arg} z_0 \neq \pi$, es decir, si z_0 no es real negativo, se define

$$U_r(\xi_0) = \{ \xi = (z, K) \in \mathcal{S} \ / \ z \in B(z_0, r) \}$$

donde r debe verificar que $r \leq \delta(z_0)$ siendo

$$\delta(z_0) = \begin{cases} = |z_0| & \text{si } \operatorname{Re} z_0 \geq 0 \\ = |\operatorname{Im} z_0| & \text{si } \operatorname{Re} z_0 < 0 \end{cases}$$

es decir, en este caso $U_r(\xi_0)$ es una bola totalmente contenida en la copia K-esima con radio suficientemente pequeño para que no contenga a 0 ni corte al semieje real negativo (de ahí la elección de $\delta(z_0)$).

ii) Si $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$ se define

$$U_r(\xi_0) = \{ \xi = (z, K) \in \mathcal{S} / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z \geq 0 \} \cup \{ \xi = (z, K+1) \in \mathcal{S} / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z < 0 \}$$

donde ha de ser $r < |z_0|$ para que $0 \notin U_r(\xi_0)$; en este caso se considera el semidisco superior de la bola contenido en la copia K-esima (incluido el "trozo" de semieje real negativo) y el semidisco inferior en la

(*) $\mathcal{S}$ es un conjunto numerable de copias del plano. Cada punto z del plano se considera una cantidad numerable de veces y se distinguen llamandolas ...$(z,-2)$, $(z,-1)$, $(z,0)$, $(z,1)$, $(z,2)$...

copia $K+1$-esima.

Entonces

2.1. TEOREMA: La familia $\mathcal{B}(\xi_0)$ verifica

1) $\forall U_r(\xi_0) \in \mathcal{B}(\xi_0)$, $\xi_0 \in U_r(\xi_0)$.

2) $\mathcal{B}(\xi_0)$ es una base de filtro, es decir es una familia no vacía de conjuntos no vacíos tal que
$\forall U_{r_1}(\xi_0), U_{r_2}(\xi_0)$, $\exists U_r(\xi_0) \in \mathcal{B}(\xi_0) / U_r(\xi_0) \subset U_{r_1}(\xi_0) \cap U_{r_2}(\xi_0)$.

3) Para cada $U_r(\xi_0) \in \mathcal{B}(\xi_0)$ y cada $\xi \in U_r(\xi_0)$ existe $U_s(\xi) \in \mathcal{B}(\xi)$ tal que $U_s(\xi) \subset U_r(\xi_0)$.

Demostr.: 1) Trivial.

2) Es trivial que $\mathcal{B}(\xi_0) \neq \emptyset$ y que $U_r(\xi_0) \neq \emptyset$ pues $\xi_0 \in U_r(\xi_0)$.
Además $U_{r_1}(\xi_0) \cap U_{r_2}(\xi_0) \supset U_r(\xi_0)$ donde $r = \min(r_1, r_2)$.

3) 3.1 Supongamos que $\xi_0 = (z_0, K)$ y que $\operatorname{Arg} z_0 \neq \pi$.
Si $\xi \in U_r(\xi_0)$ es de la forma (z', K) y $r \leq \delta(z_0)$.
Basta elegir $s = r - |z' - z_0|$ y ya es trivial que $B(z', s) \subset B(z_0, r)$
Además $\operatorname{Arg} z' \neq \pi$. Por tanto
$U_s(\xi) = \{(z, K) / z \in B(z', s)\} \subset U_r(\xi_0) = \{(z, K) / z \in B(z_0, r)\}$.

3.2 Supongamos ahora que $\xi_0 = (z_0, K)$ y $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$.
Sea $r < |z_0|$ y $\xi \in U_r(\xi_0)$. Entonces ξ puede ser de la forma $\xi = (z', K)$ ó $\xi = (z', K+1)$, y en el primer caso puede ocurrir que $\operatorname{Arg} z' \neq \pi$ o bien $\operatorname{Arg} z' = \pi$. Estos tres casos se pueden distinguir según sea $\operatorname{Im} z' > 0$, $\operatorname{Im} z' < 0$ ó $\operatorname{Im} z' = 0$. ~~(fig. 1)~~

3.2.1) $\operatorname{Im} z' > 0$: En este caso $\xi \in \{(z, K) / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
Sea $s = \min\{r - |z' - z_0|, \operatorname{Im} z'\} > 0$.
Entonces $B(z', s) \subset \{z \in \mathbb{C}^* / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z \geq 0\}$.
Por tanto $U_s(\xi) = \{(z, K) / z \in B(z', s)\} \subset \{(z, K) / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z \geq 0\} \subset$
$\subset U_r(\xi_0)$ (fig. 1)

3.2.2) $\operatorname{Im} z' < 0$: Entonces $\xi \in \{(z, K+1) / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z < 0\}$.
Sea $s = \min\{r - |z' - z_0|, |\operatorname{Im} z'|\}$
Entonces $B(z', s) \subset \{z \in \mathbb{C}^* / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z < 0\}$
y por tanto $U_s(\xi) = \{(z, K+1) / z \in B(z', s)\} \subset$
$\subset \{(z, K+1) / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z < 0\} \subset U_r(\xi_0)$ (fig. 2)

3.2.3. $\operatorname{Im} z' = 0$ (ó $\operatorname{Arg} z' = \pi$): Entonces $\xi = (z', K) \in \{(z, K) / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z \geq 0\}$
Sea $s = r - |z' - z_0|$. Luego $B(z', s) \subset B(z_0, r)$ y por tanto

$U_s(\xi) = \{(z,k) / z \in B(z',s), \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{(z,k+1) / z \in B(z',s), \operatorname{Im} z < 0\} \subset$
$\subset \{(z,k) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{(z,k+1) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z < 0\} =$
$= U_r(\xi_0)$. (fig. 3) c.s.q.d.

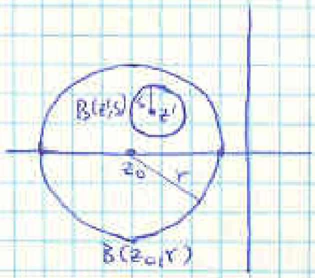

fig. 1

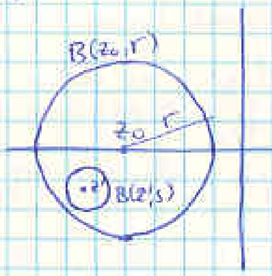

fig. 2

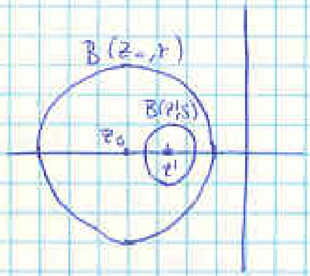

fig. 3.

2.2. COROLARIO: Existe una única topología en $\mathcal{S}$ para la cual $\mathcal{B}(\xi_0)$ es base de entornos de ξ_0, para cada $\xi_0 \in \mathcal{S}$. Además $\mathcal{S}$ con esta topología es Haussdorf.

Demostr.: El teorema anterior prueba que $\mathcal{B}(\xi_0)$ satisface las condiciones que ha de verificar una base de entornos de un punto.

Veamos que dicha topología es separada: Sean $\xi_0 \neq \xi_1 \in \mathcal{S}$ y supongamos $\xi_0 = (z_0, K_0)$, $\xi_1 = (z_1, K_1)$

- Si $K_0 = K_1$ entonces $z_0 \neq z_1$: tenemos dos puntos distintos sobre la misma copia que obviamente se pueden separar mediante dos bolas disjuntas.
- Si $z_0 = z_1$ entonces $K_0 \neq K_1$, es decir están en copias distintas. Si $\operatorname{Arg} z_0 \neq \pi$, $U_r(\xi_0) \cap U_{r'}(\xi_1) = \emptyset$ pues los elementos de $U_r(\xi_0)$ son de la forma (z, K_0) y los de $U_{r'}(\xi_1)$ de la forma (z, K_1) y $K_0 \neq K_1$.

Podría pensarse que habría problemas si $z_0 = z_1$ y $K_1 = K_0 + 1$, pero no ocurre así pues

$U_r(\xi_0) = \{(z, K_0) / z \in B(z_0, r), \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{(z, K_0+1) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z < 0\} = A_1 \cup A_2$
$U_{r'}(\xi_1) = \{(z, K_0+1) / z \in B(z_0, r'), \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{(z, K_0+2) / z \in B(z_0, r'), \operatorname{Im} z < 0\} = B_1 \cup B_2$

Obviamente, $A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_2 \cap B_2 = \emptyset$, $A_1 \cap B_2 = \emptyset$. Además $A_2 \cap B_1 = \emptyset$ pues aunque son elementos de la misma copia, los de A_1 tienen parte imaginaria negativa y los de B_1 tienen parte imaginaria ≥ 0.

Luego $\mathcal{S}$ es un espacio de Haussdorf c.s.q.d.

Una deseable propiedad la da el siguiente teorema.

2.3. TEOREMA: Todo punto $\xi_0 \in \mathcal{S}$ posee un entorno homeomorfo a un disco del plano complejo.

Demostr.: Sea $\xi_0 = (z_0, k)$. Distinguiremos dos casos:

i) $\operatorname{Arg} z_0 \neq \pi$: un entorno de ξ_0 es
$$U_r(\xi_0) = \{(z,k) / z \in B(z_0, r)\} \quad \text{con } r \leq \delta(z_0).$$
Consideremos la aplicación (que llamaremos proyección):
$$p: U_r(\xi_0) \longrightarrow B(z_0, r)$$
$$(z,k) \longmapsto p(z,k) = z$$
Es trivial que p es un homeomorfismo.

ii) $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$: Un entorno de ξ_0 es de la forma
$$U_r(\xi_0) = \{(z,k) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \{(z,k+1) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z < 0\}$$
con $r \leq |z_0|$. Entonces la proyección
$$p: U_r(\xi_0) \longrightarrow B(z_0, r)$$
$$(z,k) \longmapsto z$$
$$(z,k+1) \longmapsto z$$
es un homeomorfismo. c.s.q.d.

OBSERVACION: Se puede decir por este teorema que $\mathcal{S}$ es localmente "igual" al plano complejo. Como consecuencia de ello se tiene el siguiente

2.4. COROLARIO: $\mathcal{S}$ es un espacio AN1 (satisface el 1er axioma de numerabilidad), es decir, cada punto de $\mathcal{S}$ tiene una base de entornos numerable.

OBSERVACION: Entre otras cosas el corolario anterior permite estudiar la continuidad por sucesiones, en lugar de tener que utilizar redes.

2.5. TEOREMA: $\mathcal{S}$ es un espacio conexo.

Demostr.: Denotemos por Π_k la copia k-esima del plano, es decir $\Pi_k = \{(z,k) / z \in \mathbb{C}^*\}$. Es trivial comprobar que su clausura en $\mathcal{S}$ es
$$\overline{\Pi_k} = \Pi_k \cup \{(z, k-1) / z \in \mathbb{R}^-\} \quad (*)$$
Se verifica además que
$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{n-1} \overline{\Pi_k}.$$

Puesto que $\overset{\circ}{\Pi}_K$ es homeomorfo a $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{R}^- \cup \{0\})$ se tiene que $\overset{\circ}{\Pi}_K$ es conexo y, por tanto su cierre $\overline{\Pi}_K$ es conexo. Además se verifica que

$$\overline{\Pi}_K \cap \overline{\Pi}_{K+1} = \{(z,K) \,/\, z \in \mathbb{R}^-\} \neq \emptyset$$

Luego $\mathcal{S} = \bigcup_{K=0}^{n-1} \overline{\Pi}_K$ es conexo (ver TOPOLOGIA I). csqd

OBSERVACION: Lo que se ha probado hasta ahora de $\mathcal{S}$ es que es una variedad analítica (que se definirá más adelante). $\mathcal{S}$ es ya el dominio adecuado para definir la raiz n-sima.

DEFINICION: Si $\xi = (z,K) \in \mathcal{S}$ se define

$$\sqrt[n]{\xi} = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\operatorname{Arg} z + 2K\pi}{n}\right)}$$

La raiz n-sima definida en $\mathcal{S}$ ya es una aplicación.
Desde luego sigue siendo una raiz pues

$$\left(\sqrt[n]{\xi}\right)^n = |z|\, e^{i(\theta + 2K\pi)} = |z|\, e^{i\theta} e^{2K\pi i} = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = z, \text{ donde } \theta = \operatorname{Arg} z.$$

Además

2.6. TEOREMA: La función $\sqrt[n]{\ } : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ es continua.

Demostr.: Puesto que $\mathcal{S}$ es AN1 basta estudiar la continuidad por sucesiones, es decir, hemos de probar que si $(\xi_m)_m \xrightarrow{\mathcal{S}} \xi_0$ entonces $(\sqrt[n]{\xi_m})_m \longrightarrow \sqrt[n]{\xi_0}$. Distinguiremos dos casos.

1) Supongamos que $\xi_0 = (z_0, K)$ con $\operatorname{Arg} z_0 \neq \pi$: en este caso $\overset{\circ}{\Pi}_K$ es un entorno de ξ_0 y por tanto, si $(\xi_m)_m \to \xi_0$ podemos suponer que $(\xi_m)_m \subset \overset{\circ}{\Pi}_K$ (al menos se verifica a partir de un índice en adelante). Si $(\xi_m)_m \to \xi_0$ siendo la proyección continua se verifica que $(z_m)_m \longrightarrow z_0$ y en consecuencia $(|z_m|)_m \to |z_0|$ y $(\operatorname{Arg} z_m) \longrightarrow \operatorname{Arg} z_0$. (*)

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{\xi_m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{|z_m|}\; e^{\frac{\operatorname{Arg} z_m + 2K\pi}{n} i} = \sqrt[n]{|z_0|}\; e^{\frac{\operatorname{Arg} z_0 + 2K\pi}{n} i}$$

por ser continuas la raiz n-sima en $\mathbb{R}$ y la exponencial imaginaria.

2) Consideremos ahora el caso en que $\xi_0 = (z_0, K)$ y $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$.
Puesto que $\Pi_K \cup \Pi_{K+1}$ es un entorno de ξ_0 podemos suponer

(*) Esto es cierto pues siendo Arg una determinación del argumento es continua en el plano complejo cortado por el semieje real negativo y [illegible] que $(\xi_m)_m \subset \Pi_K \cup \Pi_{K+1}$. Consideremos las subsucesiones de $(\xi_m)_m$ contenidas en Π_K y Π_{K+1} respectivamente. Veamos que las imágenes de dichas subsucesiones por $\sqrt[n]{\ }$ es $\sqrt[n]{\xi_0}$ con lo cual $(\sqrt[n]{\xi_m})_m \to \sqrt[n]{\xi_0}$. Para ello basta probar (por evitar complicar la notación) que si $(\xi_m)_m \subset \Pi_K$ entonces $(\sqrt[n]{\xi_m})_m \to \sqrt[n]{\xi_0}$ y si $(\xi_m)_m \subset \Pi_{K+1}$ entonces $(\sqrt[n]{\xi_m})_m \to \sqrt[n]{\xi_0}$

$\boxed{2.1}$ Supongamos que $(\xi_m)_m \to \xi_0 = (z_0, k)$ con $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$ y $(\xi_m)_m \subset \Pi_K$. Entonces si $\xi_m = (z_m, k)$ se verifica que $\operatorname{Im} z_m \geq 0$ (al menos desde un índice en adelante), pues dado $U_r(\xi_0)$, $\exists \nu \in \mathbb{N} / \xi_m \in U_r(\xi_0) = \{(z,k) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z \geq 0\} \cup \cup \{(z, k+1) / z \in B(z_0,r), \operatorname{Im} z < 0\}$, $\forall m > \nu$.

Siendo la proyección continua $(z_m)_m \to z_0$.

Luego, $(|z_m|)_m \to |z_0|$ y además, siendo $\operatorname{Im} z_m \geq 0$, $\forall m$ se verifica que $(\operatorname{Arg} z_m)_m \to \operatorname{Arg} z_0 = \pi$.

Por tanto $(\sqrt[n]{\xi_m})_m \to \sqrt[n]{\xi_0}$.

$\boxed{2.2.}$ Supongamos ahora que $(\xi_m)_m \to \xi_0 = (z_0, k)$, $\operatorname{Arg} z_0 = \pi$ y que $(\xi_m)_m \subset \Pi_{K+1}$. Se puede suponer que $\operatorname{Im} z_m < 0$ (cosa que al menos ocurre a partir de un índice en adelante). Se verifica entonces que $(|z_m|)_m \to |z_0|$ y que $(\operatorname{Arg} z_m)_m \to -\pi = \operatorname{Arg} z_0 - 2\pi$.

Entonces

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{\xi_m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[n]{|z_m|}\, e^{\frac{\operatorname{Arg} z_m + 2(k+1)\pi}{n} i} =$$

$$= \sqrt[n]{|z_0|}\, e^{\frac{(\operatorname{Arg} z_0 - 2\pi) + 2(k+1)\pi}{n} i} = \sqrt[n]{|z_0|}\, e^{\frac{\operatorname{Arg} z_0 + 2k\pi}{n} i} = \sqrt[n]{\xi_0}. \text{ c.s.q.d.}$$

DEFINICION: Una función $g : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ se dice diferenciable en un punto $\xi_0 \in \mathcal{S}$ si existe

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \frac{g(\xi) - g(\xi_0)}{z - z_0}$$

donde $z = p(\xi)$, $z_0 = p(\xi_0)$. En ese caso dicho límite se denota por $g'(\xi_0)$.

Que $g : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ sea diferenciable en ξ_0 equivale a que $g \circ p^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sea derivable en z_0, por ser p un homeomorfismo local de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{C}$.

Se dice que $g : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es diferenciable si lo es en cada punto de $\mathcal{S}$.

2.7. TEOREMA: La función raíz n-sima es diferenciable en $\mathcal{S}$ y $f'(\xi_0) = \frac{1}{n} f(\xi_0)^{1-n}$, donde denotamos $f = \sqrt[n]{\ }$.

Demostr.:

$$f'(\xi_0) = \lim_{\xi \to \xi_0} \frac{f(\xi)-f(\xi_0)}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{w^n - w_0^n} = \frac{1}{\lim\limits_{w \to w_0} \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0}} = \frac{1}{n w_0^{n-1}} =$$

$= \frac{1}{n} f(\xi_0)^{1-n}$, donde $w = f(\xi)$ y por tanto $z = w^n$. c.q.d.

3. SUPERFICIE DE RIEMANN PARA EL LOGARITMO

Consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{(z, k) \,/\, z \in \mathbb{C}^*,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

y diremos que $(z,k) = (z',k')$ cuando, y sólo cuando, ocurra que $z = z'$ y $k = k'$.

De la misma forma que en la sección 2 se define una topología en $\mathcal{S}$ localmente homeomorfa a la de $\mathbb{C}$, y por tanto, $\mathcal{S}$ es AN1. Además es un espacio de Hausdorff conexo: para probar la conexión basta observar que $\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_n$, donde $\mathcal{S}_n = \bigcup_{k=-n}^{n} \Pi_k$ es conexo (se prueba de forma análoga a como se hizo en 2). Luego, $\mathcal{S}$ es conexo como unión numerable de conexos con intersección no vacía.

DEFINICION: Si $\xi = (z,k) \in \mathcal{S}$ se define

$$\log \xi = \log(z,k) = \log|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi).$$

De esta forma log es una función de $\mathcal{S}$ en $\mathbb{C}$, que trivialmente sigue siendo un logaritmo. De forma análoga que para la raíz n-sima se prueba que

3.1. TEOREMA: $\log : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es continua.

3.2. TEOREMA: log es diferenciable en $\mathcal{S}$ y su derivada en cada punto $\xi_0 \in \mathcal{S}$ es $\frac{1}{z_0}$ siendo z_0 el punto base de ξ_0 $(z_0 = p(\xi_0))$

Demostr.: Haciendo $w = \log \xi$, $w_0 = \log \xi_0$

$$\lim_{\xi \to \xi_0} \frac{\log \xi - \log \xi_0}{z - z_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{e^w - e^{w_0}} = \lim_{w \to w_0} \frac{1}{\frac{e^w - e^{w_0}}{w - w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0} \text{ c.q.d.}$$